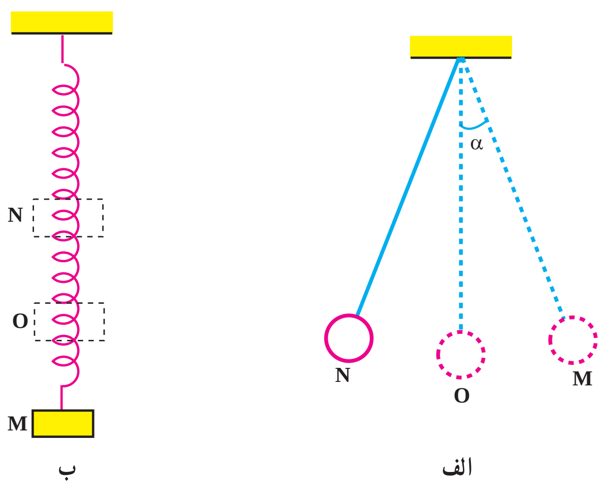
حرکت نوسانی

فصل ۳

حرکت نوسانی

نگاهی به فصل :گردش زمین به دور خورشید، گردش ماه به دور زمین، ضربان قلب انسان، ارتعاش تارهای کمانچه یا تار و سه‌تار، بالا و پایین رفتن تاب بازی، پیدایش فصل‌های سال، طلوع و غروب خورشید، یا حرکت یک آونگ ساده (شکل ۳ــ۱ ــ الف)، حرکت وزنه‌ای که به یک فنر متصل است (شکل ۳ــ۱ــ ب) و مثال‌های بسیار دیگری مانند اینها، حرکت‌های دوره‌ای هستند که با گذشت زمان بارها تکرار می‌شوند. در حرکت‌های دوره‌ای، متحرک پس از طی زمان معینی به وضعیت اولیه برمی‌گردد و حرکت خود را از نو آغاز می‌کند. در این فصل پس از معرفی پدیده‌های دوره‌ای به توصیف حرکت هماهنگ ساده می‌پردازیم. زیرا شناخت و بررسی این حرکت، پایه و اساس مناسبی برای درک امواج و انتشار آنها فراهم می‌کند.



شکل ۳ــ۱

۳ــ۱ــ حرکت هماهنگ ساده

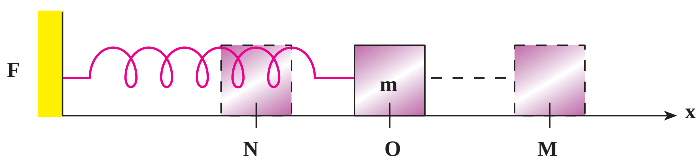
یک حرکت نوسانی را **هماهنگ ساده** می‌نامیم وقتی مسیر رفت و برگشت متحرک روی یک پاره‌خط حول نقطه‌ای واقع در وسط آن باشد. برای مثال، حرکت آونگ (شکل ۳ ــ ۱ــ الف)، وقتی زاویهٔ α خیلی کوچک

باشد، به گونه‌ای که بتوان تانژانت و سینوس آن را برابر گرفت و همچنین بالا و پایین رفتن وزنهٔ آویخته به فنر (شکل ۳ـ۱ـ ب). در این دو حرکت، متحرک، دربازه‌های زمانی یکسان، از ابتدای پاره خط، یعنی از نقطهٔ M به نقطهٔ N می‌رود و برمی‌گردد و به این ترتیب حول نقطهٔ O واقع در وسط پاره خط نوسان می‌کند. از این پس دستگاهی را که دارای حرکت هماهنگ ساده است نوسانگر هماهنگ ساده می‌نامیم. نوسانگر وزنه ــ فنر در شکل ۳ـ۱ـ ب الگوی مناسبی برای بررسی حرکت نوسانی ساده است. ابتدا برخی مفهوم‌ها را در این حرکت معرفی می‌کنیم.

دوره و بسامد : در حرکت هماهنگ ساده بازهٔ زمانی بین دو وضعیت یکسان و متوالی را **دوره** می‌نامیم. به عبارت دیگر دوره، زمان یک نوسان (زمان یک رفت و برگشت به وضع قبلی) است و با T نشان داده می‌شود. همچنین تعداد دوره‌ها یا تعداد نوسان‌ها را در یک ثانیه **بسامد** می‌نامیم و آن رابا **f** نشان می‌دهیم. یکای بسامد در SI، s^{-1} است که هرتز (Hz) نامیده می‌شود. با توجه به تعریف دوره، معلوم می‌شود که بسامد وارون دوره است :

$$f=\frac{1}{T} \qquad (۳ـ۱)$$

دامنهٔ نوسان : جسمی به جرم m را در نظر بگیرید که به سر آزاد یک فنر متصل است و می‌تواند در راستای محور x، روی یک سطح افقی که اصطکاک آن ناچیز است، جابه‌جا شود (شکل ۳ ـ۲). در حالتی که فنر طول عادی خود را دارد برآیند نیروهای وارد به جسم صفر و در نتیجه جسم در حال تعادل است.



شکل ۳ـ۲

حال اگر مبدأ محور مختصات، یعنی نقطهٔ O، را منطبق بر مکان جسم در حالت تعادل اختیار نماییم و سپس جسم را تا نقطهٔ M به سمت راست بکشیم و سپس رها کنیم، جسم حول وضع تعادلش (نقطهٔ O) با حرکت هماهنگ ساده شروع به نوسان می‌کند. در ضمن نوسان جسم، فاصلهٔ آن از مبدأ تغییر می‌کند، امّا هیچ‌گاه فاصلهٔ آن از مبدأ بیش از OM یا ON نمی‌شود. این بیشترین فاصلهٔ نوسانگر از مبدأ را **دامنه** می‌نامیم و معمولاً آن‌را با A نشان می‌دهیم.

نیروی بازگرداننده : در شکل ۳ــ۲، جهت نیروی فنر همواره به گونه‌ای است که می‌خواهد جسم را به حالت تعادل (نقطهٔO) برگرداند، این نیرو، **نیروی بازگرداننده** نامیده می‌شود. نیروی بازگردانندهٔ فنر با تغییر طول فنر متناسب است و از رابطهٔ زیر، که به قانون هوک معروف است، به‌دست می‌آید :

$$F=-kx \qquad (۳ــ۲)$$

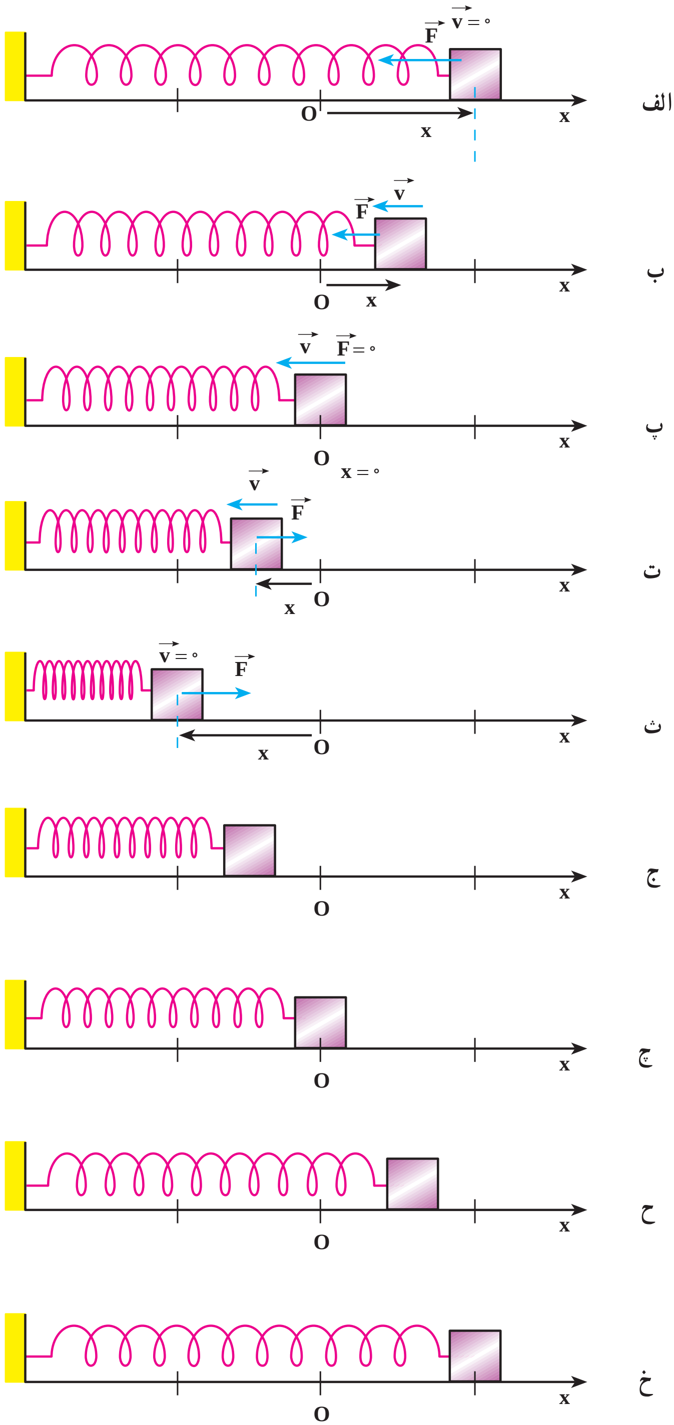
در این رابطه ، x تغییر طول فنر، F نیروی بازگردانندهٔ فنر و k ثابت تناسب است که به ویژگی‌های فنر بستگی دارد و آن را ثابت نیروی فنر می‌نامیم. یکای k در SI نیوتون برمتر (N/m) است. علامت منفی در رابطهٔ ۳ــ۲ نشان می‌دهد که جهت نیروی بازگردانندهٔ فنر همواره خلاف جهت بردار مکان جسم است. هر دستگاهی که نیروی بازگردانندهٔ آن از قانون هوک پیروی کند، حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت.

حال اثر نیروی بازگرداننده را در نوسانگر وزنه ــ فنر، در یک دوره، بررسی می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل ۳ــ۳ــ الف تا پ دیده می‌شود، اگر جسم را پس از خارج کردن از وضع تعادل رها کنیم، تحت اثر نیروی بازگرداننده به‌طرف وضع تعادل خود (نقطهٔ O) برمی‌گردد و پس از رسیدن به نقطهٔ O، به سبب داشتن انرژی جنبشی، به حرکتش به سمت چپ ادامه می‌دهد (شکل پ). از این لحظه به بعد، مکان و سرعت جسم منفی و نیروی بازگرداننده در جهت محور x و مثبت است. بنابه قانون دوّم نیوتون، چون شتاب با نیروی برآیند هم جهت است در این مرحله از حرکت، شتاب نیز مثبت است. اما چون سرعت آن منفی است حرکت جسم کند شونده است (شکل ت)؛ یعنی از سرعت آن کاسته می‌شود و در یک لحظه به صفر می‌رسد. در این لحظه فنر بیشترین فشردگی یا تغییر طول را دارد و نیروی بازگرداننده بیشینه است (شکل ث).

فعالیت ۳ــ۱

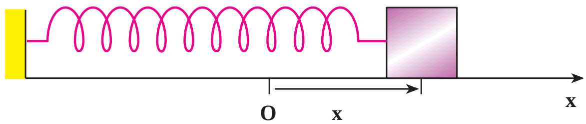
دیدیم در لحظه‌ای که فنر بیشترین فشردگی را پیدا می‌کند سرعت نوسانگر به صفر می‌رسد. اکنون با توجه به شکل‌های ۳ــ۳ــ ج تا خ نیروی وارد بر نوسانگر و همچنین مکان، سرعت و شتاب نوسانگر را پس از لحظهٔ مذکور بررسی کنید.



شکل ۳ــ۳

۳ــ۲ــ معادلۀ حرکت هماهنگ ساده

یک نوسانگر را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۳ــ۴ در فاصلۀ x از وضع تعادل قرار دارد.



شکل ۳ــ۴

بنابه رابطۀ ۳ــ۲ نیروی وارد بر وزنه در این لحظه $F=-kx$ است. اگر جرم وزنه m باشد بنابه قانون دوّم نیوتون داریم :

$$a=\frac{F}{m}$$

$$a=-\frac{k}{m}x \qquad (۳ــ۳)$$

بنابه آنچه در فصل ۱ دیدیم، شتاب مشتق دوم مکان نسبت به زمان است، یعنی :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$$

بنابراین $x=f(t)$ باید به صورتی باشد که مشتق دوم آن نسبت به زمان، با علامت منفی، با x متناسب باشد. با توجه به اینکه تابع سینوسی، که در درس ریاضی خوانده‌اید، همین ویژگی را دارد، معادلۀ حرکت هماهنگ ساده باید به صورت زیر باشد.[1]

$$x=A\sin\omega t \qquad (۳ــ۴)$$

اگر از رابطۀ ۳ــ۴ دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{dx}{dt}=A\omega\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t$$

با توجه به رابطۀ ۳ــ۴ می‌توان نوشت :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$$

۱ــ در برنامۀ درسی این کتاب همواره فرض می‌شود که نوسانگر در مبداء زمان در مبداء مکان بوده و در جهت مثبت محور x در حال حرکت است.

از مقایسهٔ رابطهٔ اخیر با رابطهٔ ۳ــ۳ نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۳ــ۵)$$

ω را **بسامد زاویه‌ای** می‌نامیم. یکای بسامد زاویه‌ای رادیان بر ثانیه است. در رابطهٔ ۳ــ۴، x مکان متحرک در لحظهٔ t و A دامنه نوسان است؛ (چرا؟). همچنین $\varphi = \omega t$ فاز حرکت در لحظهٔ t نامیده می‌شود. اگر در لحظهٔ t_1 فاز حرکت :

$$\varphi_1 = \omega t_1$$

و در لحظهٔ t_2 فاز حرکت

$$\varphi_2 = \omega t_2$$

باشد، تغییر فاز بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر است با :

$$\Delta\varphi = \omega t_2 - \omega t_1 = \omega(t_2 - t_1)$$

یا

$$\Delta\varphi = \omega \Delta t \qquad (۳ــ۶)$$

در رابطهٔ ۳ــ۶ اگر $\Delta t = 1s$ باشد $\Delta\varphi = \omega$ می‌شود. یعنی بسامد زاویه‌ای (ω) تغییر فاز در هر ثانیه است.

رابطهٔ بسامد زاویه‌ای و دورهٔ‌تناوب : چون دورهٔ تناوب تابع سینوسی، 2π است باید در هر دوره (یعنی در زمان T) فاز به اندازهٔ 2π تغییر کند، بنابراین، با توجه به رابطهٔ ۳ــ۶ می‌توان چنین نوشت :

$$\Delta\varphi = \omega T = 2\pi$$

و از آنجا

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (۳ــ۷)$$

اکنون با توجه به رابطه‌های ۳ــ۵ و ۳ــ۷ رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (۳ــ۸)$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۳ــ۹)$$

رابطهٔ ۳ـ۸ نشان می‌دهد که دوره به ویژگی‌های فیزیکی نوسانگر بستگی دارد؛ چنانکه اگر وزنه را تغییر دهیم (m تغییر کند) یا فنر را عوض کنیم (k تغییر کند) دوره و در نتیجه بسامد نوسان‌های دستگاه، تغییر می‌کند. از طرف دیگر دوره و بسامد به دامنه بستگی ندارد؛ به همین دلیل گفته می‌شود که بسامد یک نوسانگر از ویژگی‌های ساختاری آن نوسانگر است و بسامد طبیعی آن نامیده می‌شود.

مثال ۳ـ۱

معادلهٔ حرکت نوسانگری در SI به صورت زیر است.

$$x=0/05\sin 60\pi t$$

الف) دامنه، دوره و بسامد این حرکت چه مقدار است؟

ب) مکان نوسانگر را در لحظهٔ $\frac{1}{360}$ ثانیه به‌دست آورید.

پاسخ

الف) باتوجه به معادلهٔ ۳ـ۴ و رابطهٔ ۳ـ۷ نتایج زیر حاصل می‌شود.

دامنه : $A=0/05\,m$

دوره : $\omega=\frac{2\pi}{T}=60\pi \Rightarrow T=\frac{1}{30}s$

بسامد : $f=\frac{1}{T}=30Hz$

ب) $x=0/05\sin 60\pi\times\frac{1}{360} \Rightarrow x=0/05\sin\frac{\pi}{6}=0/025m$

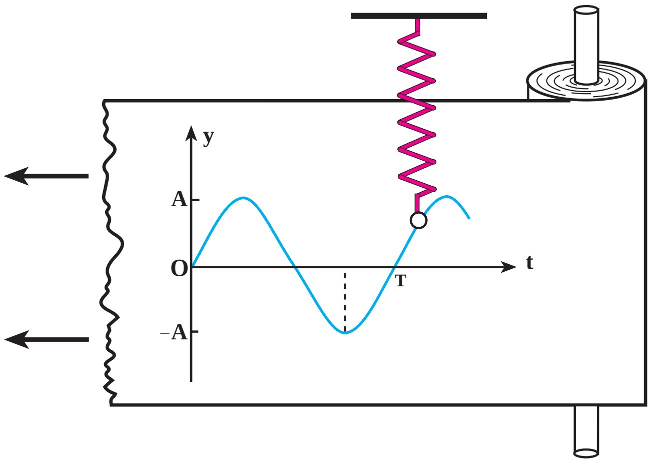
مثال ۳ـ۲

دامنهٔ نوسان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای ۲cm و بسامد آن ۲۰Hz است. معادلهٔ حرکت آن را بنویسید.

پاسخ $A=0/02m\ ,\ f=20Hz\ ,\ \omega=2\pi f \Rightarrow \omega=40\pi\ rad/s$

$x=A\sin\omega t \Rightarrow x=0/02\sin 40\pi t$

رسم نمودار یک نوسانگر هماهنگ ساده : یکی از روش‌های نمایش نمودار مکان ــ زمان حرکت نوسانگر هماهنگ ساده در شکل ۳ــ۵ نشان داده شده است.



شکل ۳ــ۵

در این روش نوار کاغذی روی استوانه‌ای که در امتداد قائم قرار دارد پیچیده شده است. استوانه می‌تواند به‌طور یکنواخت حول محورش بچرخد. نوسانگر وزنه ــ فنر در امتداد قائم طوری نصب شده است که وزنهٔ متصل به آن به‌وسیلهٔ نوک یک مداد با نوار کاغذی در تماس است. اگر نوسانگر ساکن باشد و نوار کاغذی به سمت چپ کشیده شود نوک مداد یک خط افقی (محور زمان) روی نوار ثبت می‌کند. اگر نوار ساکن باشد و نوسانگر را به نوسان درآوریم نوک مداد، خطی در امتداد قائم رسم می‌کند، که نشان‌دهندهٔ جابه‌جایی نوسانگر است. حال اگر نوار کاغذی را با سرعت ثابت بکشیم و در همان حال نوسانگر را به نوسان واداریم نمودار حرکت هماهنگ ساده که یک نمودار سینوسی است رسم می‌شود، محور افقی، زمان حرکت و محور قائم، مکان متحرک را در هر لحظه نشان می‌دهد.

شما در درس ریاضی با چگونگی رسم نمودار تابع سینوسی آشنا شده‌اید. به همان ترتیب هم می‌توان نمودار حرکت هماهنگ ساده را، به کمک نقطه‌یابی، رسم کرد. برای این کار نقطه‌های بیشینه، کمینه و محل برخورد نمودار را با محور زمان معلوم نموده و با مشخص کردن آنها در صفحهٔ مختصات $x - t$ نمودار را رسم می‌کنیم. به مثال‌هایی در این باره توجه کنید :

مثال ۳ــ۳

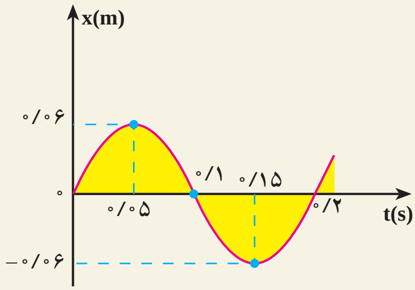
دوره و دامنهٔ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به ترتیب $0/2s$ و $6cm$ است. معادلهٔ حرکت این نوسانگر را بنویسید و نمودار مکان ــ زمان آن را رسم کنید.

پاسخ $T=0/2\,s\ ,\ \ A=0/06m\ ,\ \ \omega=10\pi\ rad/s$

معادلهٔ حرکت: $x=A\sin\omega t \rightarrow x=0/06\sin10\pi t$

برای رسم نمودار تغییرات x برحسب t به کمک نقطه‌یابی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

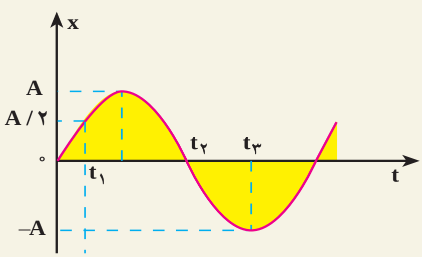
t (s)	x (m)
0	0
$\frac{T}{4}=0/05$	$0/06=+A$
$\frac{T}{2}=0/1$	0
$\frac{3T}{4}=0/15$	$-0/06=-A$
$T=0/2$	0



شکل ۳ــ۶

مثال ۳ــ۴

نمودار شکل ۳ــ۷ مربوط به حرکت هماهنگ ساده‌ای است که دورهٔ آن ۰/۲ ثانیه است. زمان‌های t_1 و t_2 و t_3 را به‌دست آورید.



شکل ۳ــ۷

پاسخ

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=10\pi\ rad/s \Rightarrow x=A\sin10\pi t$$

با توجه به شکل ۳ــ۷ در لحظهٔ t_1 مکان برابر $A/2$ است؛ بنابراین :

$$+A/2 = A\sin 10\pi t_1 \Rightarrow \sin 10\pi t_1 = \frac{1}{2}$$

$$10\pi t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{60}\,s$$

در لحظهٔ t_2 مکان صفر است، بنابراین :

$$0 = A\sin 10\pi t_2$$

$10\pi t_2 = 0$ یا $10\pi t_2 = \pi$

از تساوی $10\pi t_2 = 0$ زمان t_2، صفر به دست می‌آید در حالی‌که در شکل t_2 مثبت است. بنابراین :

$$10\pi t_2 = \pi \Rightarrow t_2 = \frac{1}{10}\,s$$

در لحظهٔ t_3 مکان $-A$ است بنابراین :

$$-A = A\sin 10\pi t_3 \Rightarrow \sin 10\pi t_3 = -1$$

$$10\pi t_3 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_3 = \frac{3}{20}\,s$$

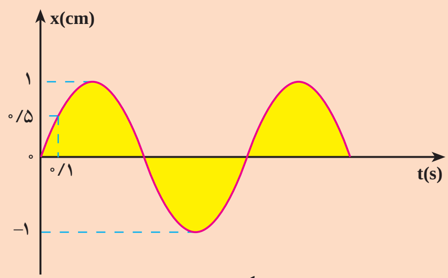
مقدار t_2 را می‌توانستیم از رابطهٔ $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$ نیز به‌دست آوریم.

تمرین ۳ــ۱

نمودار مکان ــ زمان نوسانگری در شکل ۳ــ۸ رسم شده است. مطلوب است :

الف) دورهٔ حرکت

ب) مکان نوسانگر در لحظهٔ $t = 0/5\,s$



شکل ۳ــ۸

۳ــ۳ــ معادله‌های سرعت و شتاب در حرکت هماهنگ ساده

الف) معادلهٔ سرعت : با توجه به اینکه سرعت، مشتق مکان نسبت به زمان است با مشتق‌گیری از رابطهٔ ۳ــ۴ خواهیم داشت :

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow v=A\omega\cos\omega t \qquad (۳ــ۱۰)$$

معادلهٔ ۳ــ۱۰ نشان می‌دهد که سرعت به ازای $\cos\omega t=\pm 1$ بیشینه می‌شود؛ پس داریم :

$$v_{max}=A\omega \qquad (۳ــ۱۱)$$

در لحظه‌ای که $\cos\omega t=\pm 1$ است، $\sin\omega t=0$ و در نتیجه $x=0$. یعنی سرعت بیشینه مربوط به لحظه‌ای است که نوسانگر درحال گذر از وضع تعادل است.

تمرین ۳ــ۲

الف) به کمک رابطه‌های ۳ــ۴ و ۳ــ۱۰ نشان دهید که $v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ است.

ب) به کمک رابطهٔ اخیر معلوم کنید که در چه مکانی سرعت نوسانگر صفر و یا بیشینه است؟

ب) معادلهٔ شتاب : می‌دانیم که شتاب، مشتق سرعت نسبت به زمان، یا مشتق دوم مکان نسبت به زمان است. در نتیجه، با استفاده از رابطهٔ ۳ــ۴ یا ۳ــ۱۰ داریم :

$$a=-A\omega^2\sin\omega t \qquad (۳ــ۱۲)$$

معادلهٔ ۳ــ۱۲ نشان می‌دهد که در حرکت هماهنگ ساده، شتاب نیز به‌طور دوره‌ای تغییر می‌کند و بیشینهٔ آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$a_{max}=A\omega^2 \qquad (۳ــ۱۳)$$

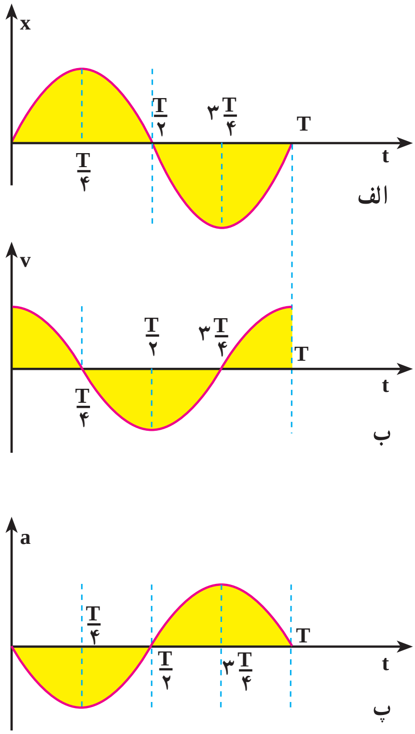
با استفاده از رابطهٔ ۳ــ۴ می‌توان رابطهٔ ۳ــ۱۲ را به‌صورت زیر نوشت :

$$a=-\omega^2 x \qquad (۳ــ۱۴)$$

که رابطهٔ شتاب را با مکان نوسانگر به‌دست می‌دهد. این رابطه همچنین نشان می‌دهد که بردار شتاب در خلاف جهت بردار مکان است.

در شکل‌های ۳ــ۹ــ الف ــ ب و پ، به‌ترتیب، نمودارهای مکان ــ زمان، سرعت ــ زمان و شتاب ــ زمان برای حرکت هماهنگ ساده‌ای که معادلهٔ آن به‌صورت $x=A\sin\omega t$ است نشان داده شده است.

همان‌طور که در این نمودارها دیده می‌شود در لحظهٔ $t=۰s$، $x=۰m$ است. در این لحظه سرعت بیشینه و مثبت و شتاب صفر است. در لحظهٔ $\frac{T}{۴}$، x بیشینه و مثبت، سرعت صفر و شتاب بیشینه و منفی است. در لحظهٔ $\frac{T}{۲}$، $x=۰$ سرعت بیشینه و منفی و شتاب صفر است. در لحظهٔ $\frac{۳T}{۴}$، x بیشینه و منفی، سرعت صفر و شتاب بیشینه و مثبت است. در لحظهٔ T، x صفر، سرعت بیشینه و مثبت و شتاب صفر است.



شکل ۳ــ۹

مثال ۳ــ۵

دامنهٔ یک نوسانگر وزنه ــ فنر، ۵cm است. اگر جرم وزنه ۲۰g و ثابت فنر ۲N/m باشد :

الف) بیشینهٔ سرعت و شتاب در SI چه اندازه است؟

ب) در لحظه‌ای که مکان نوسانگر +۴cm است سرعت و شتاب آن را به‌دست آورید.

پاسخ

الف)

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۲}{۰/۰۲}}=۱۰\,rad/s$$

$$v_{max}=A\omega=۰/۰۵\times۱۰=۰/۵\ m/s$$

$$a_{max}=A\omega^{۲}=۰/۰۵\times ۱۰۰=۵\ m/s^{۲}$$

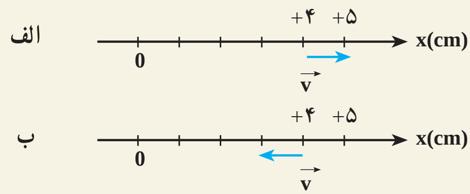
ب) در تمرین ۳ــ۲ دیدیم که $v=\pm\omega\sqrt{A^{۲}-x^{۲}}$ ، بنابراین

$$v=\pm ۱۰\sqrt{(۰/۰۵)^{۲}-(+۰/۰۴)^{۲}}=\pm ۰/۳\ m/s$$

علامت (±) نشان‌دهندهٔ این است که در مکان $x=+۴cm$ ممکن است سرعت در جهت محور x یا در خلاف جهت محور x باشد. یعنی در لحظه‌ای که $x=+۴cm$ است ممکن است متحرک در حال دور شدن از مبدأ باشد که در این صورت $v=+۰/۳m/s$ است و یا درحال نزدیک شدن به مبدأ باشد که در این صورت $v=-۰/۳m/s$. این وضعیت به ترتیب در شکل‌های ۳ــ۱۰ــ الف و ۳ــ۱۰ــ ب نشان داده شده است.

$$a=-\omega^{۲}x=-۱۰۰\times(+۰/۰۴)=-۴\ m/s^{۲}$$

پس معلوم می‌شود در مکان $x=+۴\ cm$ شتاب منفی و در خلاف جهت محور x است.



شکل ۳ــ۱۰

۳ــ۴ــ انرژی مکانیکی نوسانگر (دستگاه جرم ــ فنر)

در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم، هنگامی که فنری فشرده یا کشیده می‌شود در آن انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره می‌شود؛ می‌توان نشان داد مقدار این انرژی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$U_e=\frac{۱}{۲}kx^{۲}$$

با جایگذاری x از معادلهٔ ۳ــ۴ خواهیم داشت :

$$U_e=\frac{۱}{۲}kA^{۲}\sin^{۲}\omega t \qquad (۳\text{ــ}۱۵)$$

با استفاده از رابطهٔ ۳ــ۵ می‌توان نوشت :

$$U_e=\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}A^{۲}\sin^{۲}\omega t \qquad (۳\text{ــ}۱۶)$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ ۳ــ۱۰ انرژی جنبشی این نوسانگر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t \tag{۳ــ۱۷}$$

بنابراین، انرژی مکانیکی، یعنی مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی این نوسانگر به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید :

$$E = U_e + K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \left[\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t\right]$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \tag{۳ــ۱۸}$$

از رابطه‌های ۳ــ۱۵ و ۳ــ۱۷ می‌توان دریافت که انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر وزنه ــ فنر با زمان تغییر می‌کنند. یعنی در لحظه‌ای که نوسانگر در فاصلهٔ x از مبدأ قرار دارد بخشی از انرژی آن به صورت پتانسیل و بقیه به صورت جنبشی است. اما رابطهٔ ۳ــ۱۸ نشان می‌دهد که انرژی مکانیکی نوسانگر مستقل از زمان است.

اگر چه ما انرژی مکانیکی را برای نوسانگر وزنه ــ فنر محاسبه کردیم، ولی می‌توان نشان داد که برای هر نوع نوسانگر سادهٔ دیگری نیز انرژی مکانیکی با مربع دامنه و مربع بسامد متناسب است.

تمرین ۳ــ۳

الف) رابطهٔ انرژی جنبشی نوسانگر ساده را برحسب مکان نوسانگر (x) به‌دست آورید و با استفاده از آن و همچنین رابطهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر نشان دهید که انرژی مکانیکی آن به مکان بستگی ندارد.

ب) با استفاده از رابطه‌ای که به‌دست آوردید، مشخص کنید که در چه مکانی انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر صفر و یا بیشینه است.

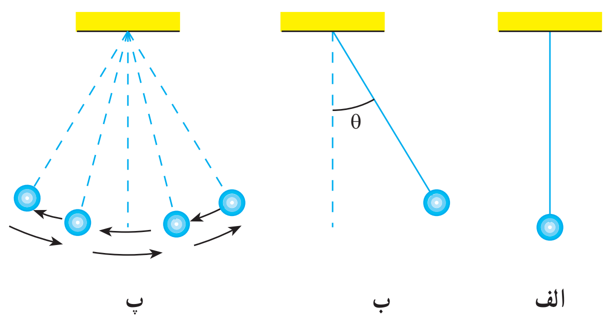
تمرین ۳ــ۴

نمودار تغییرات U_e، K و E را نسبت به مکان برای یک دورهٔ نوسانگر ساده رسم کنید.

۳ــ۵ــ آونگ ساده

آونگ ساده وزنهٔ کوچکی است به جرم m که با نخ سبکی به یک نقطه آویخته شده است. در حالت تعادل، آونگ در امتداد قائم قرار دارد (شکل ۳ــ۱۱ــ الف).

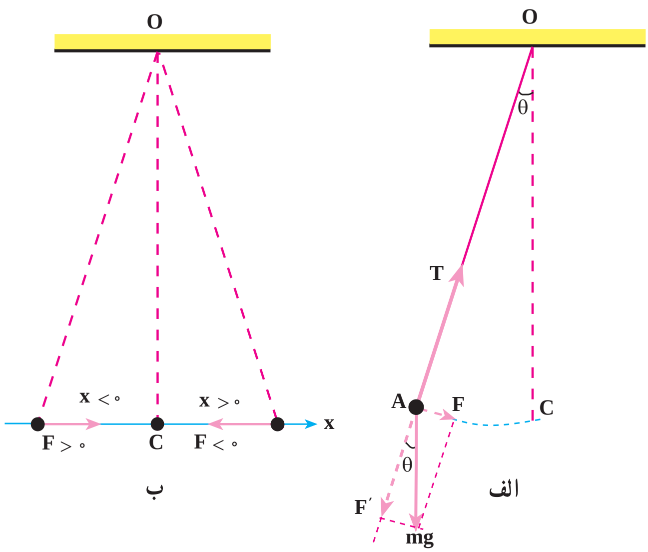
اگر وزنه را پس از خارج کردن آونگ از وضع تعادل رها کنیم (شکل ۳ــ۱۱ــ ب) حول وضع تعادلش نوسان می‌کند (شکل ۳ــ۱۱ــ پ). در نوسان آونگ، نیروی بازگرداننده مؤلفهٔ نیروی وزن جسم در راستای مماس بر مسیر است.



شکل ۳ــ۱۱

اگر زاویهٔ انحراف اولیه از وضع قائم (θ) به اندازهٔ کافی کوچک باشد مسیر حرکت وزنه تقریباً یک پاره‌خط افقی است (شکل ۳ــ۱۲ــ ب). در این صورت، وزنه مانند وزنهٔ متصل به فنر یک حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ کم (حرکت نوسانی کم‌دامنه) انجام می‌دهد.

محاسبهٔ دورهٔ آونگ سادهٔ کم‌دامنه : در آونگ ساده اگر اصطکاک قابل چشم‌پوشی و جرم نخ ناچیز باشد بر وزنهٔ آونگ نیروی وزن $(m\vec{g})$ و نیروی کشش نخ $(\vec{T})$ وارد می‌شود. همان‌طورکه شکل ۳ــ۱۲ــ الف نشان می‌دهد نیروی کشش نخ در امتداد نخ است و در هر لحظه بر مسیر حرکت وزنه عمود است. بنابراین در راستای مماس بر مسیر، مؤلفه ندارد. مؤلفهٔ نیروی وزن در امتداد مماس بر مسیر



شکل ۳ـ۱۲

$F=mg\sin\theta$ و در امتداد عمود بر مسیر $F'=mg\cos\theta$ است. مؤلفهٔ مماس بر مسیر که نیروی بازگرداننده است می‌خواهد آونگ را به وضع تعادل برگرداند.

دیدیم که اگر زاویهٔ انحراف آونگ از وضع تعادل (θ) کوچک باشد مسیر حرکت وزنه تقریباً یک خط راست افقی است؛ در این صورت، اگر طول آونگ را با l نمایش دهیم، $\sin\theta \simeq \theta=\frac{x}{l}$ است و می‌توان نوشت :

$$|F| = mg\theta = mg\frac{x}{l}$$

همان‌گونه که در شکل ۳ـ۱۲ـ ب دیده می‌شود مؤلفهٔ نیروی وزن جسم در راستای مماس بر مسیر و همواره در خلاف جهت بردار مکان است. بنابراین :

$$F = -mg\frac{x}{l}$$

همان‌طور که می‌بینید، نیروی بازگرداننده از قانون هوک (رابطهٔ ۳ ـ۲) پیروی می‌کند و حرکت آونگ سادهٔ کم دامنه یک حرکت هماهنگ ساده است.

اکنون با توجه به قانون دوم نیوتون داریم :

$$F = mg \Rightarrow -mg\frac{x}{l} = ma$$

$$a = -\frac{g}{l}x \qquad (۳ـ۱۹)$$

از رابطهٔ ۳ـ۱۴ و ۳ـ۱۹ نتیجه می‌گیریم که :

$$\omega^۲ = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

و

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (۳ـ۲۰)$$

مثال ۳ــ۶

دوره و بسامد حرکت نوسانی کم‌دامنهٔ یک آونگ ساده که طول آن $۴۰cm$ است چه اندازه است؟ ($g=۱۰ m/s^۲$).

پاسخ

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{۰/۴}{۱۰}} = ۲\pi\times\frac{۲}{۱۰} \approx ۱/۲۵s$$

$$f = \frac{۱}{T} = ۰/۸Hz$$

مثال ۳ــ۷

طول آونگ سادهٔ کم‌دامنه چند سانتی‌متر باشد تا بتواند در هر دقیقه ۳۰ نوسان انجام دهد؟ $g=۹/۸\ m/s^۲$ و $\pi^۲=۱۰$

پاسخ

$$T = \frac{t}{n} = \frac{۶۰}{۳۰} = ۲s$$

$$T^۲ = ۴\pi^۲\frac{l}{g}$$

$$۴ = ۴\times۱۰\times\frac{l}{۹/۸}$$

$$l = ۰/۹۸m = ۹۸cm$$

فعالیت ۳ــ۲

۱ــ به کمک یک گلوله و قطعه نخی به طول $۴۰cm$ آونگ ساده‌ای بسازید و دورهٔ آن را به ترتیب با زاویه‌های انحراف ۴، ۶ و ۲۰ درجه اندازه بگیرید.

۲ــ گلولهٔ آونگی را که ساخته‌اید به ترتیب با چند گلولهٔ دیگر تعویض کنید. سپس دورهٔ هریک را با زاویهٔ انحراف ۶ درجه اندازه بگیرید.

۳ــ طول آونگ‌هایی را که ساخته‌اید تغییر دهید و دورهٔ نوسان آنها را با زاویهٔ انحراف ۶ درجه اندازه بگیرید.

نتیجهٔ فعالیت گروه را در کلاس به بحث بگذارید.

فعالیت ۳ــ۳

به کمک یک آونگ ساده شتاب گرانش را در محل سکونت خود اندازه‌گیری کنید. روش کار و نتیجهٔ اندازه‌گیری را به کلاس گزارش کنید.

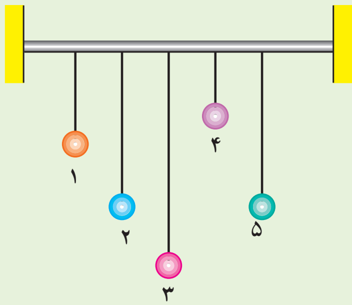
۳ــ۶ــ تشدید

در بخش‌های قبل دیدیم که وقتی یک نوسانگر ساده نظیر آونگ و یا دستگاه وزنه ــ فنر را از وضع تعادل منحرف می‌کنیم و آن را برای نوسان آزاد می‌گذاریم، دستگاه حول وضع تعادل خود شروع به نوسان می‌کند. این حرکت نوسانی، **نوسان طبیعی یا آزاد دستگاه** نامیده می‌شود. بسامد (یا دورهٔ) نوسان طبیعی از ویژگی‌های ساختاری نوسانگر است. مثلاً، بسامد آونگ سادهٔ کم دامنه به طول آونگ (l) بستگی دارد. یعنی، اگر با دادن انرژی به یک آونگ دامنهٔ نوسان آن را افزایش دهیم (به‌طوری که زاویهٔ انحراف آونگ کوچک باقی بماند) بسامد نوسان‌های آن تغییر نمی‌کند، در حالی که برای تغییر بسامد، لازم است طول آونگ را تغییر دهیم.

هنگامی که نوسانگر را از حالت تعادل خارج می‌کنیم و آن را به نوسان درمی‌آوریم، به علت نیروهای اتلافی از قبیل اصطکاک و مقاومت هوا، دامنهٔ نوسان آن به‌تدریج کاهش می‌یابد و دستگاه پس از چند نوسان می‌ایستد. این نوسان‌ها را **نوسان میرا** می‌نامیم. ساده‌ترین مثال برای نوسان میرا آونگ ساده و نیز تاب بازی در بوستان‌ها است. می‌دانید هنگامی که تاب را به نوسان درمی‌آوریم و آن را رها می‌کنیم پس از تعدادی نوسان می‌ایستد. ولی اگر بخواهیم تاب به نوسان خود ادامه دهد باید به آن نیرو وارد کنیم. مثلاً، می‌توانیم، پس از یک رفت و برگشت، هنگامی که تاب می‌خواهد نوسان بعدی را شروع کند به آن نیرو وارد کنیم. در این حالت دورهٔ وارد کردن نیرو با دورهٔ نوسان تاب برابر است. با اعمال این نیرو دامنهٔ نوسان افزایش می‌یابد و به یک مقدار بیشینه می‌رسد و از این پس حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد. در این حالت نیروی اعمال شده اثر نیروهای اتلافی را خنثی می‌کند.

فعالیت ۳ــ۴

مطابق شکل ۳ــ۱۳به یک میلهٔ افقی آونگ‌های ساده‌ای با طول‌های متفاوت ولی جرم یکسان بیاویزید، به‌طوری که طول آونگ‌های شمارهٔ ۲ و ۵ با یکدیگر برابر باشد. اکنون آونگ شمارهٔ ۵ را از وضع تعادل خارج و آن را رها کنید. حرکت چهار آونگ دیگر را به دقت مشاهده و تجزیه و تحلیل کنید و نتیجهٔ کار گروه را به کلاس گزارش دهید.



شکل ۳ــ۱۳

در این فعالیت با نوسان آونگ شمارهٔ ۵ آونگ‌های ۱ و ۳ و ۴ نیز به نوسان درمی‌آیند، اما پس از چند نوسان می‌ایستند. ولی آونگ شمارهٔ ۲ که دورهٔ آن با آونگ شمارهٔ ۵ یکسان است، در مدت طولانی‌تری می‌ایستد. نتیجه اینکه :

اگر به نوسانگری یک نیروی دوره‌ای اعمال شود، در صورتی که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر یکسان باشد، دامنهٔ نوسان تا مقدار بیشینه‌ای افزایش می‌یابد و از آن پس حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد. در این صورت می‌گوییم پدیدهٔ **تشدید** رخ داده است. در حالتی هم که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر برابر نیست، انرژی به نوسانگر منتقل می‌شود. مثلاً در فعالیت ۳ــ۴ به آونگ‌های ۱ و ۳ و ۴ انرژی منتقل می‌شود و آنها را به حرکت درمی‌آورد. ولی بیشترین انرژی در حالت تشدید به نوسانگر منتقل می‌شود (مانند آونگ ۲).

پرسش ۳ــ۱

اگر نیروی اتلافی به نوسانگر وارد نشود، پیش‌بینی می‌کنید، در اثر تشدید، نوسانگر چگونه رفتار کند؟

پدیدهٔ تشدید ممکن است مفید و یا برعکس مشکل‌زا باشد. مثلاً در ساعت کوکی این پدیده مفید است. فنر کوک شده یک نیروی دوره‌ای بر رقاصک ساعت اعمال می‌کند که بسامد آن با بسامد نوسان رقاصک برابر است و در نتیجه تشدید رخ می‌دهد و باعث می‌شود که حرکت نوسانی رقاصک ادامه یابد. پدیدهٔ تشدید ممکن است اثر مخرب نیز داشته باشد و باعث تخریب ساختمان‌ها و تأسیسات شود.

تمرین‌های فصل سوم

۱ـ توضیح دهید در حرکت هماهنگ سادهٔ وزنه ـ فنر اگر دامنهٔ نوسان دو برابر شود چه تغییری در دوره، بیشینهٔ سرعت و انرژی مکانیکی نوسانگر ایجاد می‌شود؟

۲ـ جهت سرعت و شتاب را در حرکت هماهنگ ساده، در دو حالت الف و ب ، با هم مقایسه کنید و دربارهٔ نتیجهٔ این مقایسه توضیح دهید.

الف) نوسانگر به مبدأ (وضع تعادل) نزدیک می‌شود.

ب) نوسانگر از مبدأ دور می‌شود.

۳ـ آیا در حرکت هماهنگ ساده اندازه و جهت نیروی بازگرداننده ثابت است؟ آیا امکان دارد این نیرو با بردار مکان جسم از مبدأ هم‌جهت باشد؟ توضیح دهید.

۴ـ اگر بیشینهٔ سرعت نوسانگر وزنه ـ فنری دو برابر شود، انرژی کل آن چند برابر می‌شود؟

۵ـ در لحظه‌ای که انرژی جنبشی یک نوسانگر وزنه ـ فنر ۳ برابر انرژی پتانسیل آن است مکان نوسانگر چند برابر دامنهٔ نوسان آن است؟ سرعت و شتاب نوسانگر در این لحظه به‌ترتیب چند برابر بیشینهٔ سرعت و بیشینهٔ شتاب نوسانگر است؟

۶ـ دامنهٔ نوسان یک حرکت هماهنگ ساده $۳ \times ۱۰^{-۲}m$ و بسامد آن ۵ هرتز است. معادلهٔ حرکت این نوسانگر را بنویسید و نمودار مکان ـ زمان آن را در یک دوره رسم کنید.

۷ـ معادلهٔ حرکت، سرعت و شتاب هماهنگ ساده‌ای را بنویسید که دامنهٔ آن $۴cm$ و دورهٔ آن $۰/۴s$ است. نمودار مکان ـ زمان، سرعت ـ زمان و شتاب ـ زمان را در یک دوره رسم کنید.

۸ـ معادلهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ یک نوسانگر در SI به‌صورت $x = ۰/۰۵ \sin ۲۰\pi t$ است.

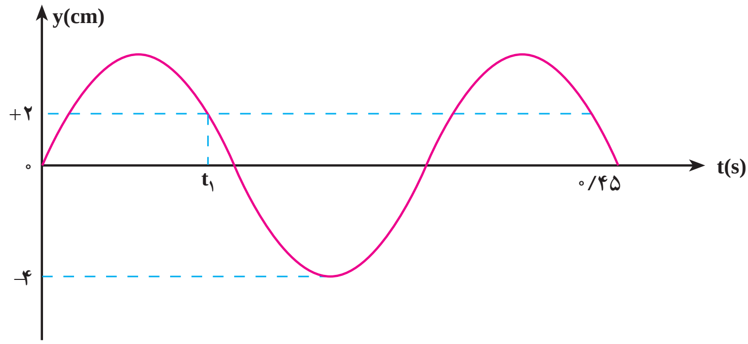
الف) در چه زمانی، پس از لحظهٔ صفر، برای اولین بار سرعت نوسانگر به بیشترین مقدار خود می‌رسد؟

ب) در چه فاصله‌ای از مبدأ انرژی جنبشی نوسانگر برابر با انرژی پتانسیل آن خواهد شد؟

۹ــ نمودار مکان ــ زمان نوسانگری مطابق شکل ۳ــ۱۴ است :

الف) معادله‌های حرکت و سرعت و شتاب این نوسانگر را بنویسید.

ب) اندازهٔ سرعت و شتاب نوسانگر را در لحظهٔ t_1 به‌دست آورید.



شکل ۳ــ۱۴

۱۰ــ پیستون‌های یک اتومبیل ۴ سیلندر در حالت خلاص تقریباً حرکت نوسانی ساده دارند. اگر دامنهٔ نوسان آنها ۵۰ میلی‌متر و بسامد آن ۱۱۰ هرتز باشد، کمیت‌های زیر را به دست آورید.

الف) بیشینهٔ سرعت پیستون‌ها

ب) بیشینهٔ شتاب نوسان آنها