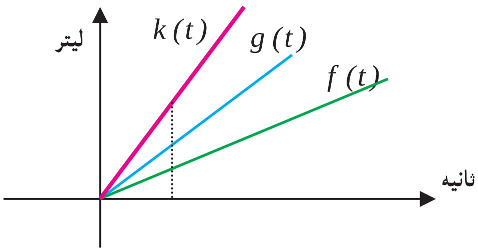
۲ــ توابعی را بنویسید که حجم آب خارج شده از شیر اول و شیر دوم و حجم آب حوض را در هر لحظه دلخواه t نشان دهد. این توابع را به ترتیب f و g و k بنامید.

۳ــ در هر لحظه t بین $f(t)$ و $g(t)$ و $k(t)$ چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۴ــ نمودار سه تابع f و g و k در زیر رسم شده‌اند. رابطه بین این توابع را از روی نمودار توضیح دهید.



در سال‌های قبل با جمع اعداد و جمع ماتریس‌ها و جمع چند جمله‌ای‌ها آشنا شدید. توابع را نیز می‌توان با هم جمع کرد و تابع جدیدی به دست آورد. در فعالیت قبل با جمع دو تابع روبرو شدیم و جمع دو تابع را به دست آوردیم.

اگر f و g دو تابع باشند که روی دامنه یکسانی مانند A تعریف شده‌اند، به ازای هر مقدار x در A مقدارهای $f(x)$ و $g(x)$ به دست می‌آیند و می‌توانیم مقدار $f(x)+g(x)$ را بسازیم. تابعی که به هر مقدار x در A مقدار $f(x)+g(x)$ را نظیر می‌سازد جمع f و g نامیده می‌شود. جمع f و g را با $f+g$ نشان می‌دهند.

تعریف :

برای دو تابع f و g که روی یک مجموعه A تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی A تعریف شده است و برای هر مقدار x در A داریم :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

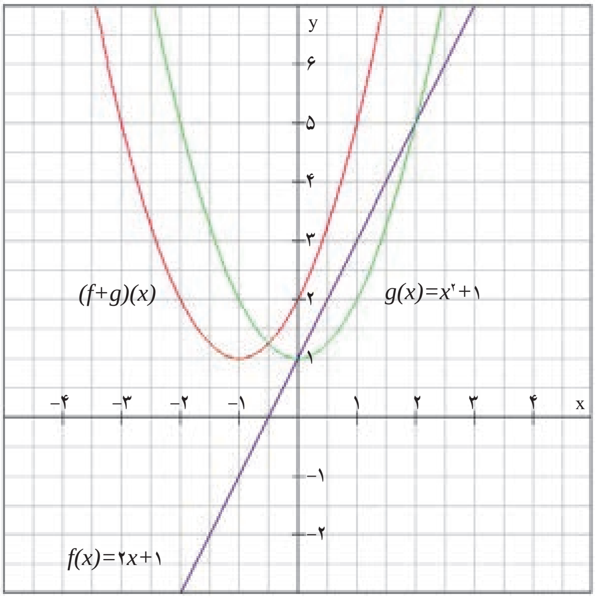
مثال

فرض کنید $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=x^۲+۱$. این دو تابع روی IR تعریف شده‌اند، بنابراین $f+g$ نیز روی IR تعریف شده است و برای مثال مقدار این تابع در $x=۳$ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۷+۱۰=۱۷$$

اما برای یک مقدار دلخواه x مقدار تابع $f+g$ به شکل زیر خواهد بود.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۲x+۱+x^۲+۱=x^۲+۲x+۲$$

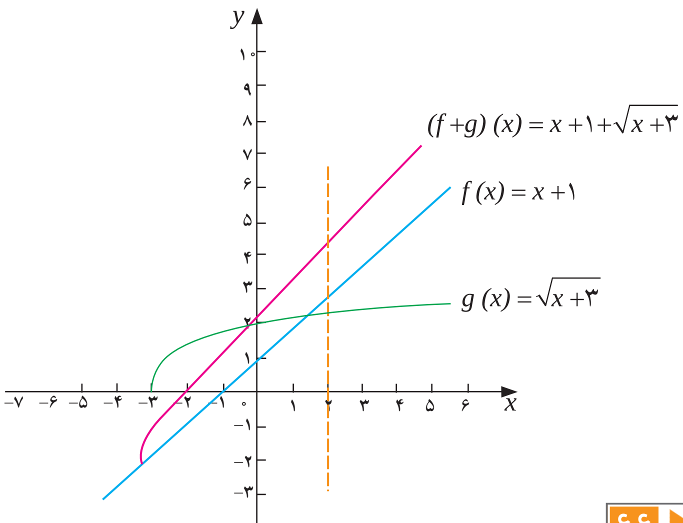


روشن است که چند جمله‌ای صفحهٔ قبل به ازای $x=۳$ برابر ۱۷ خواهد شد. نمودار این دو تابع و نمودار تابع مجموع آن‌ها در شکل رسم شده‌اند.

بحث در کلاس

چرا مجموع دو تابع خطی، یک تابع خطی است؟

آیا می‌توانیم دو تابع $f(x)=x+۱$ و $g(x)=\sqrt{x+۳}$ را با هم جمع کنیم؟ این دو تابع دامنه یکسانی ندارند ولی به ازای xهایی که در دامنه هر دو تابع باشند مقدارهای $f(x)$ و $g(x)$ قابل محاسبه‌اند و می‌توانیم مجموع $f(x)+g(x)$ را حساب کنیم.
بنابراین می‌توانیم تابع $f+g$ را روی $D_f \cap D_g$ مانند قبل تعریف کنیم.
در این مثال دامنه $D_f = IR$ و $D_g = [-۳,\infty)$ بنابراین $f+g$ روی $[-۳,\infty)$ تعریف شده است و برای هر x در این مجموعه داریم $(f+g)(x)=x+۱+\sqrt{x+۳}$. نمودار این دو تابع و نمودار تابع مجموع آن‌ها در شکل زیر رسم شده‌اند.



تعریف :

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

توجه داشته باشید که در اینجا، عملاً دامنه‌های دو تابع f و g به مجموعه $A=D_f \cap D_g$ محدود می‌شوند و سپس به عنوان دو تابع با دامنه یکسان جمع می‌شوند.

مثال

اگر $f=\{(۱,۲),(-۲,۵),(۰,۷),(۳,-۴)\}$ و $g=\{(۱,۴),(۲,۹),(-۲,۳)\}$ تابع $f+g$ فقط برای $x=-۲$ و $x=۱$ تعریف می‌شود و داریم :

$$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۲+۴=۶$$

$$(f+g)(-۲)=f(-۲)+g(-۲)=۵+۳=۸$$

بنابراین $f+g=\{(۱,۶),(-۲,۸)\}$.

اعمال تفاضل و ضرب و تقسیم توابع به شکل مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف :

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، تفاضل g از f تابعی است که با $f-g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هرمقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، حاصل‌ضرب f و g تابعی است که با $f\cdot g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f\cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، تقسیم f بر g تابعی است که با $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ برای xهایی تعریف شده است که $g(x)\neq ۰$، و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

در اینجا نیز، ابتدا دامنه‌های دو تابع f و g به یک مجموعه یکسان مناسب محدود می‌شوند و سپس به‌عنوان دو تابع با دامنه یکسان تفاضل، ضرب، یا تقسیم می‌شوند.

مثال

۱ : برای دو تابع $f(x)=x^۲+۲x-۱$ و $g(x)=۳x+۲$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها مشخص می‌کنیم :

دامنه‌های f و g تمام IR هستند، بنابراین دامنه توابع $f+g$ و $f-g$ نیز برابر IR هستند.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^۲+۲x-۱+۳x+۲=x^۲+۵x+۱$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^۲+۲x-۱-۳x-۲=x^۲-x-۳$$

$$(f\circ g)(x)=f(x).g(x)=(x^۲+۲x-۱)(۳x+۲)$$

$$=۳x^۳+۲x^۲+۶x^۲+۴x-۳x-۲=۳x^۳+۸x^۲+x-۲$$

تابع g فقط در $x=-\frac{۲}{۳}$ صفر است، بنابراین دامنه $\frac{f}{g}$ برابر $IR-\left\{-\frac{۲}{۳}\right\}$ است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲+۲x-۱}{۳x+۲} \qquad x\neq\frac{۲}{۳}$$

۲ : برای دو تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۳}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f\circ g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها مشخص می‌کنیم.

ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم.

$$D_f=\{x|x+۲\geq ۰\}=[-۲,+\infty) \qquad D_g=IR-\{۳\}$$

دامنه‌های توابع $f+g$ و $f-g$ و fg مجموعه $D_f\cap D_g$ است و داریم :

$$D_f\cap D_g=[-۲,\infty)\cap IR-\{۳\}=[-۲,۳)\cup(۳,\infty)$$

$$(f+g)(x)=\sqrt{x+۲}+\frac{۱}{x-۳}$$

$$(f-g)(x)=\sqrt{x+۲}-\frac{۱}{x-۳}$$

$$(f\circ g)(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{x-۳}$$

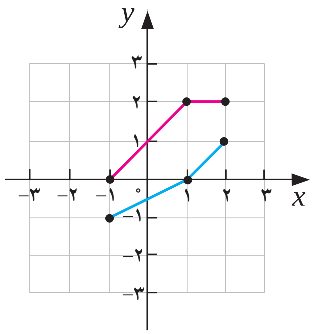
از آن‌جا که g در هیچ نقطه‌ای از دامنه خود صفر نمی‌شود، دامنه $\frac{f}{g}$ همان $D_f\cap D_g$ است.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{\frac{۱}{x-۳}}=(x-۳)\sqrt{x+۲}$$

تمرین در کلاس

۱ــ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x+۱$ ، دامنه‌های توابع $f+g$ و $f\circ g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و ضابطه این توابع را مشخص کنید.

۲ــ نمودار توابع g و f در شکل مقابل رسم شده است.



الف) $(f+g)(۱)$, $(f+g)(۲)$ را حساب کنید.

ب) با استفاده از نمودارهای g و f، نمودار $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

ج) معادله‌ای برای g و f و $f+g$ بیابید.

د) نمودار $f+g$ را به کمک معادلهٔ آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

ترکیب توابع

فعالیت ۷

سنگی به داخل آب یک دریاچه آرام پرتاب می‌شود و باعث ایجاد موج‌هایی به شکل دایره‌های هم مرکز می‌شود. شعاع بزرگ‌ترین دایره تابعی از زمان است و فرض کنید این تابع به صورت $r(t)=۲t$ باشد. t برحسب ثانیه است و زمان پس از برخورد سنگ با آب را نشان می‌دهد و r برحسب سانتی‌متر است. مساحت دایره تابعی از شعاع آن است و به صورت $A(r)=\pi r^۲$ می‌باشد.

سی‌و سه پل ــ اصفهان

۱ــ جدول زیر را کامل کنید.

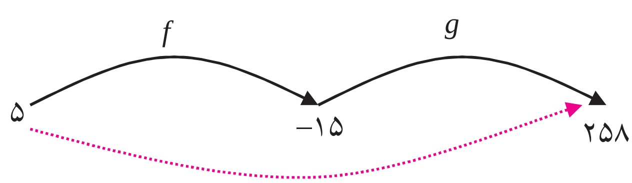
t (زمان)	۱	۲	۳	۴	۵	t
r (شعاع دایره در لحظهٔ t)			۶			$r(t)=2t$
A (مساحت دایره در لحظهٔ t)			36π			$A(r(t))=\pi(2t)^2=4\pi t^2$

۲ــ تابعی که مساحت دایره را در هر لحظهٔ t به دست می‌دهد، چگونه از طریق دو تابع $r(t)$ و $A(r)$ ساخته شده است؟

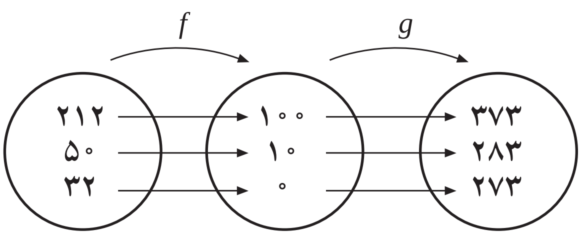
در فعالیت بالا با دو تابع $r(t)$ و $A(r)$ روبرو شدیم. مقدارهای تابع $r(t)$ به صورت ورودی تابع $A(r)$ قرار گرفتند و تابع جدید $A(r(t))$ را به وجود آوردند. این تابع جدید را ترکیب دو تابع می‌نامند.

مثال

۱ : تابع $f(x)=\frac{5}{9}(x-32)$ درجهٔ فارنهایت را به درجهٔ سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. مثلاً $f(32)=0$ یعنی ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتی‌گراد است. تابع $g(x)=x+273$ درجه سانتی‌گراد را به درجه کلوین تبدیل می‌کند. برای مثال $g(0)=273$ یعنی صفر درجه سانتی‌گراد معادل ۲۷۳ درجه کلوین است. اگر بخواهیم بدانیم ۵ درجه فارنهایت معادل چند درجه کلوین است، ابتدا به کمک تابع f داریم $f(5)=-15$ یعنی ۵ درجه فارنهایت معادل -15 درجه سانتی‌گراد است و سپس به کمک تابع g داریم $g(-15)=258$، بنابراین ۵ درجه فارنهایت معادل ۲۵۸ درجه کلوین است. به عبارت دیگر $g(f(5))=g(-15)=258$. نمودار روبه‌رو این فرآیند را نشان می‌دهد.



در نمودار روبه‌رو تبدیل برخی دیگر از درجات فارنهایت به درجات کلوین نمایش داده شده است.

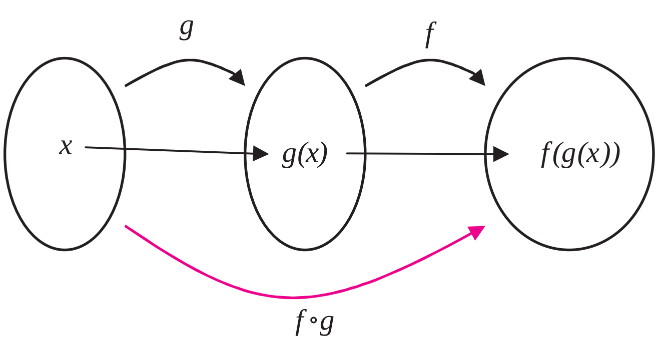


اگر $k(x)$ تابعی باشد که مستقیماً درجه‌های فارنهایت را به درجه‌های کلوین تبدیل می‌کند داریم :

$$k(x)=g(f(x))=g(\frac{۵}{۹}(x-۳۲))=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)+۲۷۳=\frac{۱}{۹}(۵x+۲۲۹۷)$$

برای مثال از طریق این تابع دیده می‌شود $k(۲۱۲)=۳۷۳, k(۳۲)=۲۷۳$.

در این مثال تابع k از ترکیب دو تابع f و g ساخته شده است. به خاطر شیوه محاسبه تابع k آن را با $g\circ f$ (بخوانید جی او اف) نشان می‌دهند. بنابراین $g\circ f$ تابعی است که در هر مقدار x به صورت $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ محاسبه می‌شود.



تعریف :

فرض کنید f و g دو تابع باشند که برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f باشد، در این صورت $f\circ g$ تابعی است که دامنه آن همان دامنه g است و برای هر مقدار x در این دامنه داریم :

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

مثال

۲ : برای دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۱+x^۲$ ، برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f است و می‌توانیم تابع مرکب $f\circ g$ را بسازیم. دامنه $f\circ g$ برابر دامنه g است که تمام IR است و ضابطه آن به شکل زیر است.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(۱+x^۲)=\sqrt{۱+x^۲}$$

تابع مرکب $g\circ f$ نیز قابل ساخت است زیرا برد f زیر مجموعه‌ای از دامنه g می‌باشد. دامنه $g\circ f$ همان دامنه f است که بازه $[۰,\infty)$ است. ضابطه $g\circ f$ به شکل زیر است.

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=۱+(\sqrt{x})^۲=۱+x$$

توجه داشته باشید که اگر چه ضابطه $g\circ f$ به گونه‌ای است که برای مقدارهای منفی x هم معنا دارد ولی به عنوان تابعی که از ترکیب دو تابع ساخته شده است دامنه آن فقط بازه $[۰,\infty)$ است.

این مثال هم‌چنین نشان می‌دهد که دو تابع $g\circ f$ و $f\circ g$ در حالت کلی مساوی نیستند.

تذکر :

برای دو تابع f و g ممکن است که برد g زیرمجموعه‌ای از دامنه f نباشد، در این صورت $f\circ g$ تابعی است که دامنه آن تمام دامنه g نخواهد بود. برای آن که $f(g(x))$ معنادار باشد لازم است که $x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$ ، بنابراین در حالت کلی دامنه $f\circ g$ به شکل زیر است.

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

در اینجا نیز، عملاً دامنهٔ تابع g به زیر مجموعه کوچکتری محدود می‌شود، تا شرط زیر مجموعه بودن برد تابع تحدید یافته در دامنهٔ تابع f برقرار گردد و سپس ترکیب دو تابع انجام می‌شود.

مثال

۳ : برای دو تابع $f=\{(۱۱,۷),(-۲,۴),(۳,-۵),(۲,-۵)\}$ و $g=\{(۲,۱۱),(۴,-۲),(۶,۳),(۳,۲)\}$ توابع $f\circ g$ و $g\circ f$ را می‌سازیم و با نمودار ون نمایش می‌دهیم.

برای محاسبه $f\circ g$ ابتدا مشاهده می‌کنیم برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f است، پس $D_{f\circ g}=D_g$. مقدار تابع $f\circ g$ را در نقاط دامنه g حساب می‌کنیم.

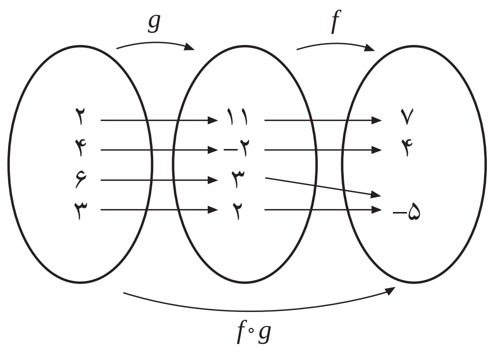
$$(f\circ g)(۲)=f(g(۲))=f(۱۱)=۷$$

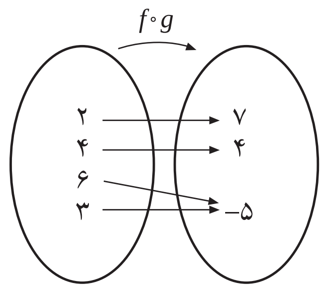
$$(f\circ g)(۴)=f(g(۴))=f(-۲)=۴$$

$$(f\circ g)(۶)=f(g(۶))=f(۳)=-۵$$

$$(f\circ g)(۳)=f(g(۳))=f(۲)=-۵$$

بنابراین $f\circ g=\{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵),(۳,-۵)\}$.





برای محاسبه $g\circ f$ ابتدا مشاهده می‌کنیم که برد f زیر مجموعه‌ای از دامنه g نیست، بنابراین دامنه $g\circ f$ تمام دامنه f نخواهد بود. یکی یکی اعضای دامنه f را بررسی می‌کنیم تا معلوم شود که آیا شرط قرار گرفتن در دامنه $g\circ f$ را دارند یا نه.

$$f(۱۱)=۷\notin D_g$$

$$f(-۲)=۴\in D_g$$

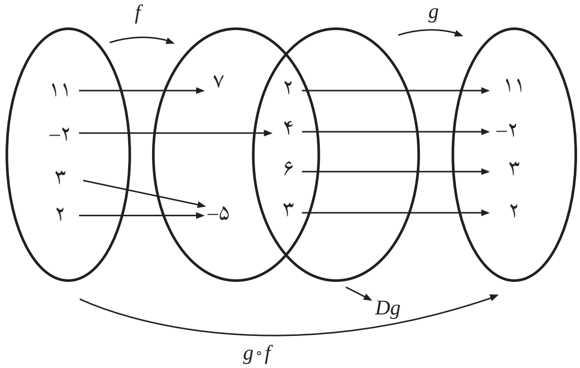
$$f(۳)=-۵\notin D_g$$

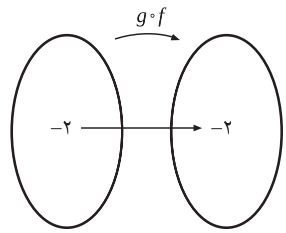
$$f(۲)=-۵\notin D_g$$

بنابراین فقط ۲− در دامنه $g\circ f$ قرار دارد و از آن‌جا که

$$(g\circ f)(-۲)=g(f(-۲))=g(۴)=-۲$$

داریم : $g\circ f=\{(-۲,-۲)\}$





۴ : برای دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ تابع $f\circ g$ و دامنه آن را محاسبه می‌کنیم.

برای محاسبه دامنه $f\circ g$ ابتدا دامنه g را بررسی می‌کنیم که $IR-\{۰\}$ دامنه f نیز $IR-\{۳\}$ است. مقدار $g(x)$ نباید ۳ شود. معادل $g(x)=۳$ دارای جواب $x=\frac{۴}{۳}$ است، یعنی $\frac{۴}{۳}$ نقطه‌ای است که $g(\frac{۴}{۳})$ در دامنه f قرار ندارد. در نتیجه

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g \middle| g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in IR \middle| x\neq ۰, x\neq \frac{۴}{۳}\right\}$$

$$=IR-\left\{۰,\frac{۴}{۳}\right\}$$

ضابطه $f\circ g$ را حساب می‌کنیم.
$$(f\circ g)(x)=f(\frac{۴}{x})=\frac{۱}{\frac{۴}{x}-۳}=\frac{۱}{\frac{۴-۳x}{x}}=\frac{x}{۴-۳x}$$

عبارت بالا اگر چه به ازای $x=۰$ با معنا است، ولی صفر در دامنه تابع ترکیب یافته نیست زیرا به هنگام محاسبه مشاهده می‌کنید که عبارت $\frac{۴}{x}$ در محاسبه وجود دارد که به ازای $x=۰$ تعریف نشده است.

تمرین در کلاس

۱ــ اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x+۵$ ، توابع $g\circ f$ و $f\circ g$ را حساب کنید و نشان دهید که $g\circ f \neq f\circ g$.

۲ــ اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{۷-x^۲}$ ، تابع $g\circ f$ و دامنهٔ آن را حساب کنید.

مسائل

۱ــ اگر $f(x)=\frac{۵x}{۳x-۷}$ و $g(x)=\frac{x^۵-۱}{۵x-۱۵}$ ، تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ و دامنه آن را بیابید.

۲ــ در هر یک از موارد زیر دامنه توابع زیر و ضابطه آن‌ها را به دست آورید.

$f-g$، ff ، $\frac{g}{f}$

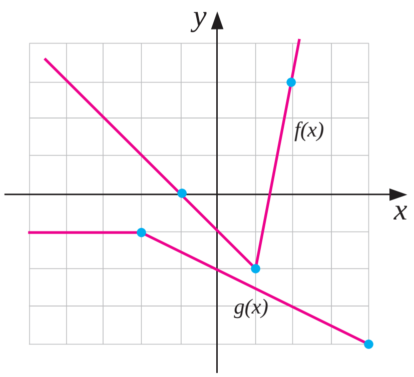
الف) $g(x)=۲-x$ ، $f(x)=۴x$

ب) $g(x)=\frac{۱}{۶-x}$, $f(x)=\frac{۴}{x-۲}$

ج) $g(x)=\sqrt{x+۲}$, $f(x)=\sqrt{x-۲}$

د) $g(x)=\frac{۲}{x}$, $f(x)=\sqrt{x+۳}$

۳ــ با استفاده از نمودارهای g و f که در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند، عبارات داده شده را (در صورت امکان) محاسبه کنید.



الف) $(f+g)(-۴)$ د) $(fg)\left(\frac{۱}{۳}\right)$

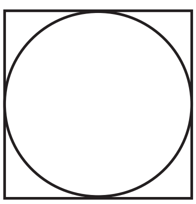
ب) $(f-g)(۳)$ هـ) $(f\circ g)(-\frac{۱}{۲})$

ج) $(\frac{f}{g})(۰)$ و) $(f\circ f)(۷)$

۴ــ فرض کنیم $g:\mathrm{IN}\longrightarrow \mathrm{IN}$ تابعی با ضابطه $g(n)=۲n$ باشد، اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و تابع $f:A\to IN$ به صورت $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ تعریف شود، توابع $۲f+g$ ، $g\circ f$ را محاسبه کنید.

۵ــ دو تابع $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x(۱-x)}$ مفروضند. دامنه تابع $f\circ g$ را بدون محاسبه $(f\circ g)(x)$ بدست آورید.

۶ــ یک پی (فونداسیون) بتنی مربع شکل به عنوان پایه‌ای برای یک مخزن گازوئیل استوانه‌ای استفاده می‌شود. (شکل مقابل)



الف) شعاع مخزن، r را به عنوان تابعی از x (ضلع مربع) بنویسید.

ب) مساحت A پایه دایره‌ای شکل را به عنوان تابعی از r بنویسید.

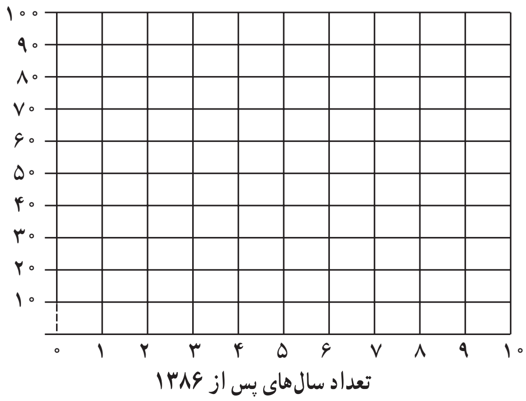
ج) $(A\circ r)(x)$ را بیابید و تعبیر کنید.

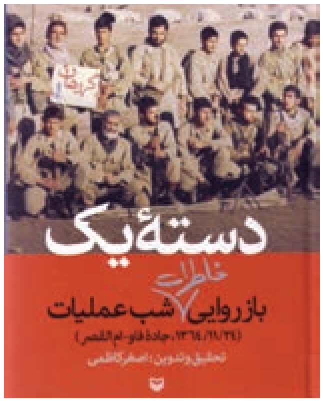
۷ــ فرض کنیم : $f=\left\{(-4,13),(-1,7),(0,5),(\frac{5}{2},0),(3,-5)\right\}$ و

$g=\{(-4,-7),(-2,-5),(0,-3),(3,0),(5,2),(9,6)\}$ ، توابع زیر را حساب کنید.

$f+g$ ، $f-g$ ، fg ، $\frac{f}{g}$

۸ــ یک رمان پرفروش درباره دفاع مقدس در سال ۱۳۸۶، ۲۷ میلیون تومان فروش کرد. رمان دیگری درباره دفاع مقدس در همین سال ۱۲ میلیون تومان فروش کرد.





دسته یک : یک رمان پرفروش دربارهٔ دفاع مقدس

اگر رمان اول در هر سال به میزان ۳ میلیون تومان نسبت به سال قبل افزایش فروش داشته باشد، تابعی بنویسید که میزان فروش در هر سال پس از سال ۱۳۸۶ را برحسب زمان نشان دهد. اگر افزایش فروش برای رمان دوم در هر سال ۲ میلیون تومان نسبت به سال قبل باشد، تابعی بنویسید که مجموع فروش این دو رمان را در هر سال پس از سال ۱۳۸۶ نشان دهد. این دو رمان در سال ۱۳۹۶ در مجموع چه میزان فروش خواهند کرد؟ هر سه تابع مرتبط را در نموداری رسم کنید.

۹ــ اگر $f(x)=x^2+2x+2$ تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که

$$(f\circ g)(x)=x^2-4x+5$$

۱۰ــ توابع f ،g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مفروضند. بدون تشکیل ضابطه، دامنه تعریف $(f+g)\circ f$ را به دست آورید.

۱۱ــ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ آن‌گاه

$$(f\circ g)(x)=-x^2,\quad (f\circ g)(5)=-25$$

ب) اگر $g(4)=7$ و $f(7)=5$ آن‌گاه $(f\circ g)(4)=35$

ج) اگر $g(x)=2x-1$ و $f(x)=\sqrt{x}$ آن‌گاه $(f\circ g)(5)=g(2)$

د) برای هر دو تابع f ، g داریم : $f\circ g=g\circ f$

۱۲ــ اگر $h(x)=۴x^۲+۴x+۷$ ، $g(x)=۲x+۱$ ، تابعی مانند f بیابید به قسمتی که $f\circ g=h$.

۱۳ــ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۵}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ ، توابع $g\circ f$ و $f\circ g$ و دامنه آن‌ها را به‌دست آورید.

۱۴ــ جدول زیر را در نظر بگیرید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۳	۱	۴	۲	۲	۵
$g(x)$	۶	۳	۲	۱	۲	۳

۱۵ــ مقدارهای زیر را حساب کنید.

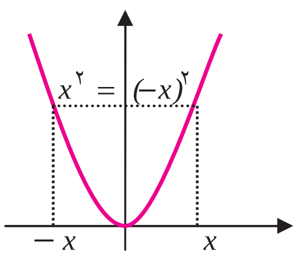
الف) $f(g(۱))$ ب) $g(f(۱))$ ج) $f(f(۱))$

د) $g(g(۱))$ هـ) $(g\circ f)(۳)$ و) $(f\circ g)(۶)$

۱۶ــ اگر $f=\{(۴,۵),(۶,۵),(۸,۱۲),(۱۰,۲)\}$ و $g=\{(۴,۶),(۲,۴),(۶,۸),(۸,۱۰)\}$ توابع $g\circ f$ ، $f\circ g$ را حساب کنید.

توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی

باغ دولت‌آباد ــ یزد



وجود تقارن در خلقت و آفرینش مناظر چشم‌نوازی را پدید آورده است. انسان در ساخته‌های خود از این نکته فراوان بهره برده است. نمودار برخی از توابع متقارن است و همین موضوع کار با آن‌ها را ساده‌تر می‌کند. تابع آشنای $f(x)=x^۲$ نمونه‌ای از این گونه توابع است. این تابع نسبت به محور yها متقارن است. علت این تقارن در آن است که برای هر x در دامنه آن، $-x$ نیز در دامنه آن است و علاوه بر آن $f(x)=x^۲=(-x)^۲=f(-x)$

تمام توابعی که این دو خاصیت را دارا هستند، به عنوان توابع زوج می‌شناسیم. به بیان دقیق‌تر :

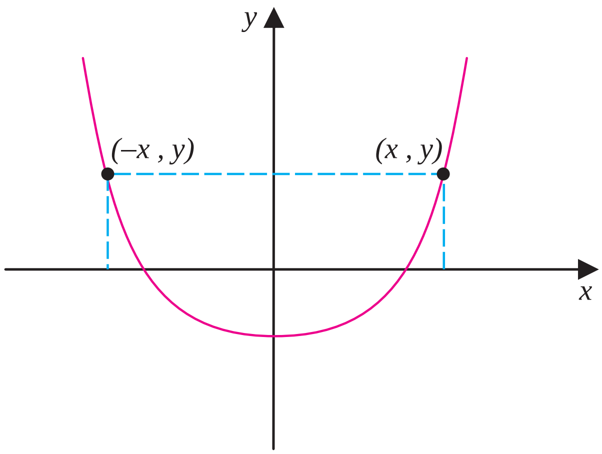
تعریف :

تابع f را زوج نامیم هرگاه :

الف) دامنه آن متقارن باشد، یعنی برای هر $x \in D_f$، $-x \in D_f$

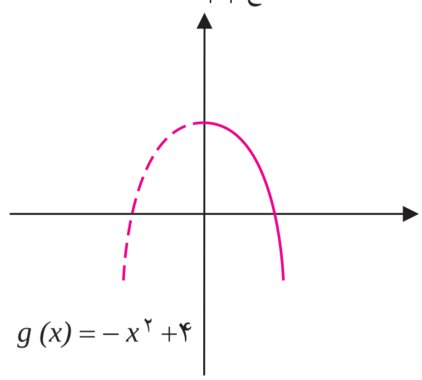
ب) برای هر x در دامنه آن، $f(-x) = f(x)$

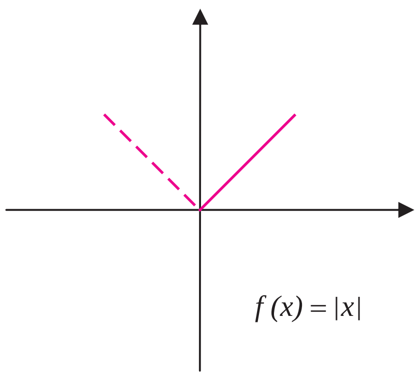
در رسم نمودار توابع زوج از این نکته که نمودار آن‌ها نسبت به محور yها متقارن است استفاده می‌شود.



مثال

۱ : توابع $f(x)-|x|$ ، $g(x)=-x^{۲}+۴$ زوج هستند :





شرط متقارن بودن دامنه برای هر دو تابع برقرار است، هم‌چنین داریم :

$$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$$

$$g(-x)=-(-x)^{۲}+۴=-x^{۲}+۴=g(x)$$

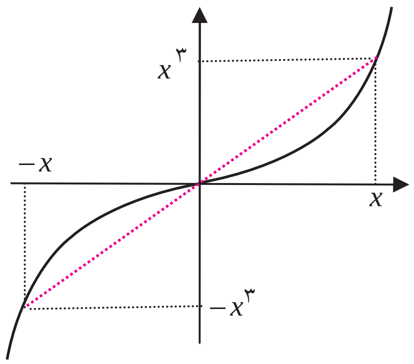
تقارن نسبت به محور yها نیز در نمودارهای این دو تابع دیده می‌شود.

تقارن نمودار توابع نسبت به مبدأ مختصات نیز در بسیاری از توابع دیده می‌شود. برای مثال نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ نسبت به مبدأ متقارن است.

علت این تقارن در آن است که برای هر x در دامنه f،
$-x$ نیز در دامنه f است و

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$$

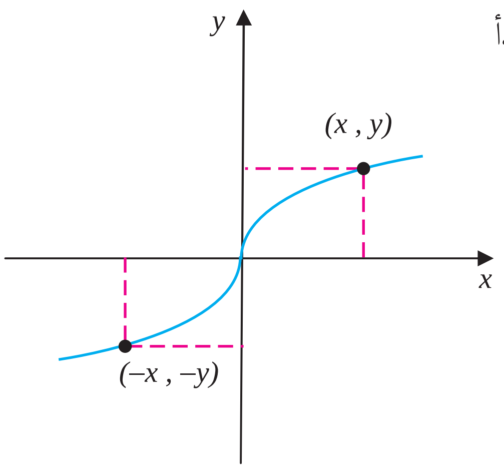
این خاصیت باعث می‌شود هر نقطه روی نمودار این تابع که به صورت (x,x^3) است قرینه آن نسبت به مبدأ یعنی $(-x,-x^3)$ نیز روی نمودار این تابع باشد. توابعی که چنین خاصیتی دارند، تابع فرد نامیده می‌شوند.



تعریف :

تابع f را فرد نامیم هرگاه دامنه آن متقارن باشد و برای هر x در دامنه آن، $f(-x)=-f(x)$

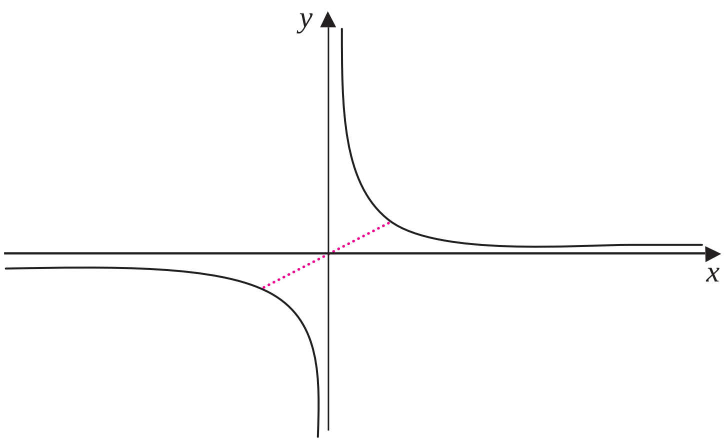
در رسم نمودار توابع فرد از این نکته که نمودار آن‌ها نسبت به مبدأ مختصات متقارن است استفاده می‌شود.



مثال

۲ : $f(x)=\frac{1}{x}$ تابعی فرد است.
زیرا دامنه آن متقارن است و داریم :

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$$



تمرین در کلاس

۱ــ توابع زیر را در نظر بگیرید.

الف) $y=\dfrac{1}{x-x^{2}}$ ‏ ب) $y=1-x^{2}$ ‏ ج) $y=\sqrt{x}$

د) $y=\sqrt[2]{x}$ ‏ هـ) $y=x-|x|$ ‏ و) $y=x\sqrt{|x|}$

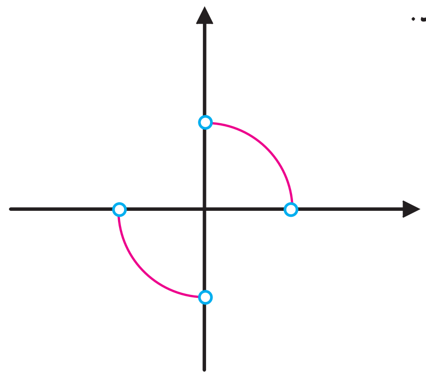
(۱) دامنه کدام‌یک از توابع داده شده متقارن است؟

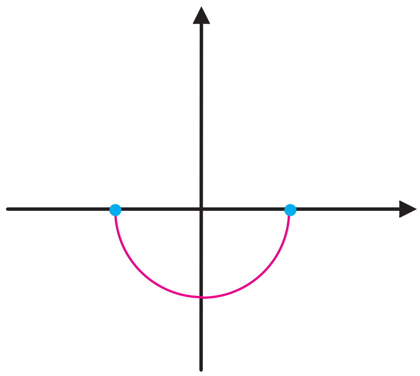
(۲) کدام‌یک از این توابع زوج هستند؟

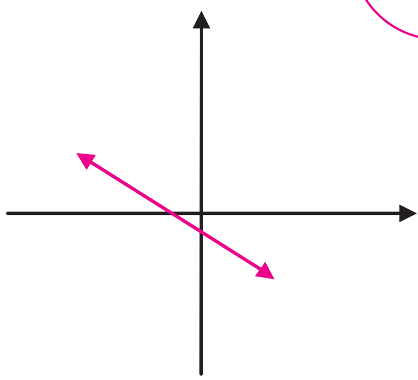
(۳) کدام‌یک از این توابع فرد هستند؟

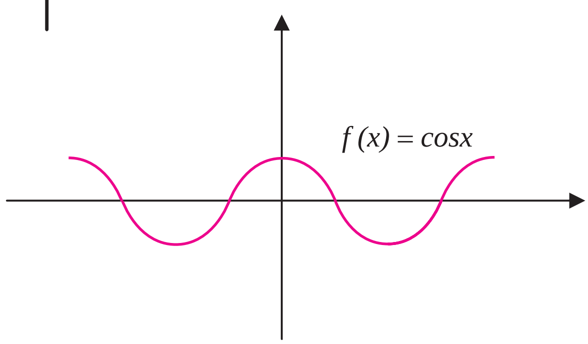
(۴) کدام‌یک از این توابع نه زوج هستند و نه فرد؟

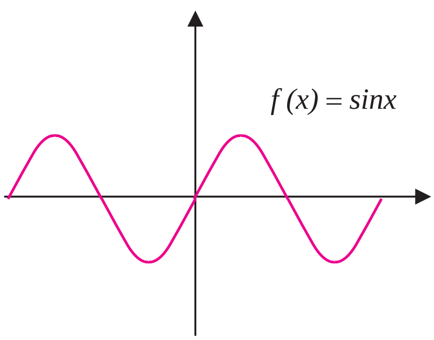
۲ــ تنها با استفاده از نمودارهای توابع داده شده زوج یا فرد بودن آن‌ها یا نه زوج بودن و نه فرد بودن آن‌ها را معلوم کنید.









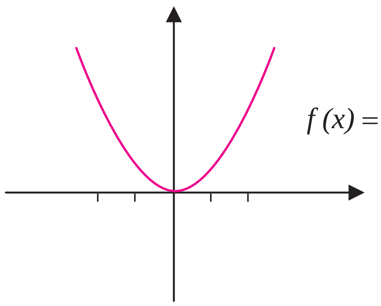


بحث در کلاس

آیا نمودار یک تابع می‌تواند نسبت به محور xها متقارن باشد؟

یکی از سؤالاتی که در مورد توابع مطرح است این است که با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع چه تغییری می‌کند؟ گاهی اوقات با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع افزایش می‌یابد. همچنین برخی مواقع با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع کاهش می‌یابد. این ویژگی‌ها را صعودی بودن یا نزولی بودن تابع می‌نامند.

برای مثال تابع $f(x)=x^۲$ را در بازه $[-۲،۲]$ در نظر بگیرید.



در بازه $[-۲،۰]$ همان گونه که از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کنیم، مقادیر متناظر تابع کمتر می‌شوند، یعنی با افزایش مقادیر x، مقادیر y کمتر می‌شوند. در این حالت گوییم تابع در بازه $[-۲،۰]$ نزولی است. اما در بازه $[۰،۲]$ با افزایش مقادیر x، مقادیر y نیز افزایش می‌یابند. در این بازه تابع $f(x)=x^۲$ را صعودی نامیم.

تعریف :

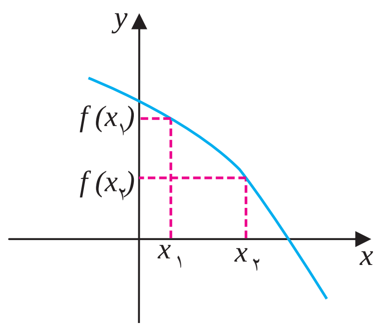
تابع $f(x)$ را صعودی نامیم هرگاه برای هر $x_۱, x_۲$ از دامنه f که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم : $f(x_۱) \le f(x_۲)$.

تابع $f(x)$ را نزولی نامیم هرگاه برای هر $x_۱, x_۲$ از دامنه f که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم : $f(x_۲) \le f(x_۱)$.

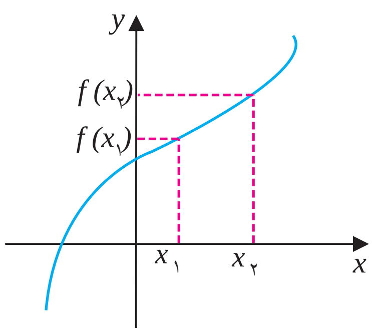
تابع $f(x)$ را صعودی اکید نامیم هرگاه برای هر $x_۱, x_۲$ از دامنه f که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم: $f(x_۱) < f(x_۲)$.

تابع $f(x)$ را نزولی اکید نامیم هرگاه برای هر $x_۱, x_۲$ از دامنه f که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم : $f(x_۲) < f(x_۱)$.

تابع $f(x)$ را ثابت نامیم هرگاه برای هر دو عضو $x_۱, x_۲$ از دامنه f ، داشته باشیم : $f(x_۱)=f(x_۲)$.



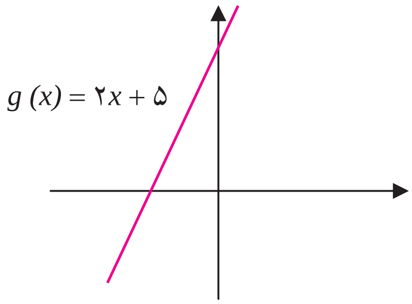
تابع نزولی



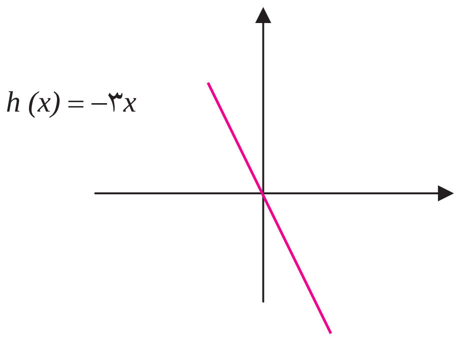
تابع صعودی

مثال

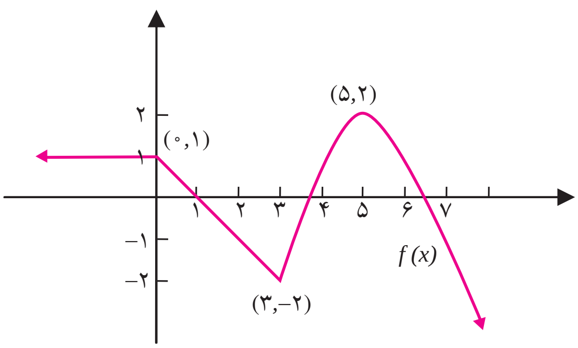
۱ : تابع $g(x)=۲x+۵$ صعودی اکید است. همان‌گونه که از نمودار $g(x)$ پیداست این تابع یک به یک است. این موضوع برای تمام توابع صعودی اکید برقرار است.



۲ : تابع $h(x)=-۳x$ نزولی اکید است. این تابع (با توجه به نمودار آن) یک به یک است. این ویژگی برای هر تابع نزولی اکید برقرار است.



ممکن است یک تابع در دامنه‌اش نه صعودی باشد نه نزولی، ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد.
برای مثال تابع $f(x)$ را با نمودار زیر در نظر بگیرید.



همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود، تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty,0]$ ثابت و در بازه $[0,3]$ نزولی (اکید) و در بازه $[3,5]$ صعودی(اکید) و در بازه $[5,\infty)$ نزولی اکید است.

تمرین در کلاس

توابع زیر را رسم کنید و با استفاده از نمودار آن‌ها تعیین کنید که در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی و در چه بازه‌هایی ثابت هستند.

الف) $f(x)=|x+2|-3$

ب) $g(x)=x^2-6x+10$

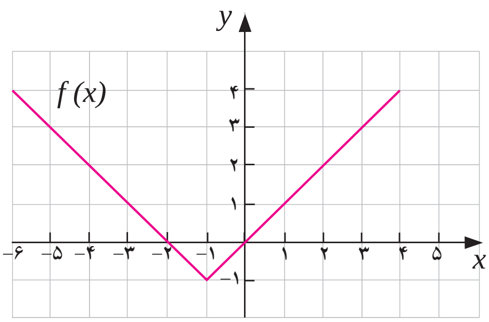
ج) $h(x)=\sqrt{1-x}$

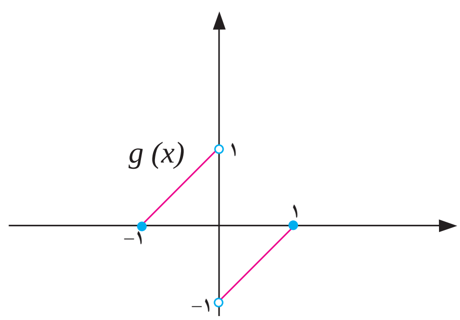
د) $t(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq -2 \\ 4 & -2\leq x\leq 1 \\ -x^2-2 & x>1 \end{cases}$

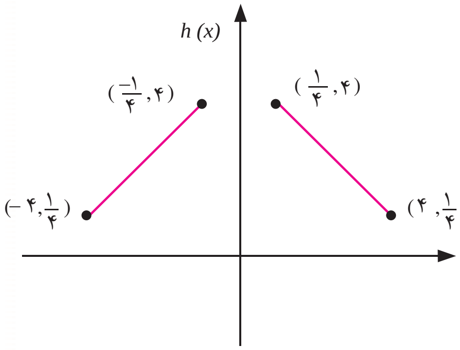
مسائل

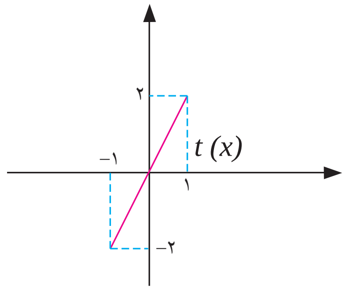
۱ــ نمودار توابع f، g، h، k و t در زیر داده شده‌اند.

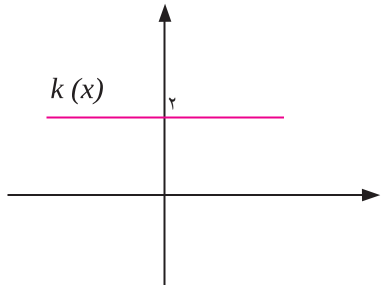
به کمک این نمودارها تعیین کنید که کدام یک از آن‌ها زوج، کدام‌یک فرد و کدام‌یک نه زوج و نه فرد هستند.











۲ــ زوج یا فرد بودن توابع زیر را معلوم کنید :

الف) $f(x)=x\sqrt{5-x^2}$ د) $f(x)=|x|$

ب) $f(x)=\frac{x^2-3}{x^3-1}$ هـ) $f(x)=2x+\sin x$

ج) $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\geq 0\\ -1\ , & x<0\end{cases}$ و) $f(x)=x^2+2x^8$

۳ــ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) مجموع دو تابع زوج، تابعی زوج است.

ب) حاصل ضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

ج) حاصل ضرب دو تابع فرد، تابعی فرد است.

د) حاصل ضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج ، تابعی زوج است.

۴ــ فرض کنید f تابعی با دامنه متقارن باشد، ثابت کنید :

الف) $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ تابعی زوج است.

ب) $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ تابعی فرد است.

ج) f را می‌توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

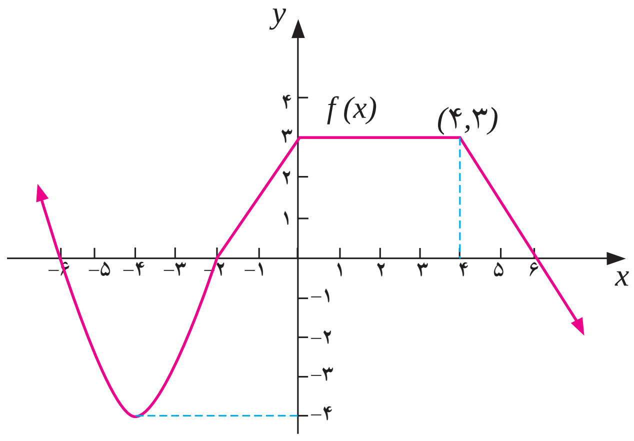
د) تابع $f(x)=2x^3-10x^2+2\sqrt{1+x^2}-5$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

۵ــ آیا تابعی یافت می‌شود که هم زوج باشد و هم فرد؟ چند تابع با این ویژگی داریم؟

۶ــ در هر یک از حالت‌های زیر نقطه‌ای از نمودار یک تابع داده شده است. نقطه دیگری از نمودار تابع را بیابید در صورتی که : (۱) تابع زوج باشد. (۲) تابع فرد باشد.

الف) $(-7,2)$ ب) (a,b) ج) $(\frac{-2}{7},-7)$ د) $(5,3)$

۷ــ با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ که در شکل زیر رسم شده است ، بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی، نزولی یا ثابت است را معلوم کنید.



۸ــ تعیین کنید توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی هستند.

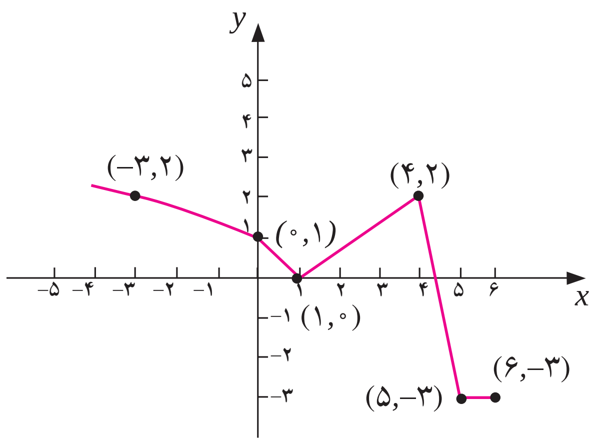
الف) $f(x)=\sqrt{x-2}$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

ج) $f(x)=-|x-2|+5$

د) $f(x)=\begin{cases}-3x-18 & x<-5\\ 1 & -5\le x<1\\ x+2 & x\ge 1\end{cases}$

۹ــ نمودار تابع $f(x)$ در زیر آمده است.



با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) دامنه و برد f را پیدا کنید.

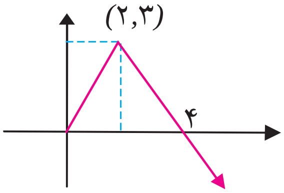
ب) بازه‌هایی که در آن‌ها $f(x) < ۰$ یا $f(x) > ۰$ را بیابید.

ج) بازه‌هایی که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است را بیابید.

د) معادله‌ای برای f بیابید (تابع برای مقادیر کمتر از ۱ یک تابع رادیکالی به شکل $\sqrt{ax+b}$ است).

هـ) $f(\frac{۷}{۲})$ ، $f(۵/۳)$ و $f(-۴)$ را بیابید.

۱۰ــ نمودار تابع h در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.

ب) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع فرد را نمایش دهد.

۱۱ــ مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=log(x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})$ یک تابع فرد باشد.

۱۲ــ زوج یا فرد بودن توابع f و g را که در زیر آمده است تعیین کنید.

$$f=\{(-۲,۵),(-۱,۴),(۰,۳),(۱,۴),(۲,۵)\}$$
$$g=\{(-۲,۱),(-۱,۲),(۰,۰),(۱,-۲),(۲,-۱)\}$$

توابع یک به یک و توابع وارون

فعالیت ۸

۱ــ محیط هر مربع تابعی از اندازه یک ضلع آن است. محیط را با P و طول ضلع را با l نشان دهید و P را به‌صورت تابعی از l بنویسید. آیا این تابع یک به یک است؟

۲ــ اندازه ضلع هر مربع تابعی از محیط آن است. با نمادهای بالا l را به صورت تابعی از P بنویسید.

۳ــ این دو تابع را بر حسب یک متغیر x به صورت $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بنویسید.

۴ــ با توجه به دامنه و برد این دو تابع، نمودار آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.

(توجه داشته باشید که قرینه نقطه $A(a,b)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم نقطه $B(b,a)$ است.)

توابع یک به یک

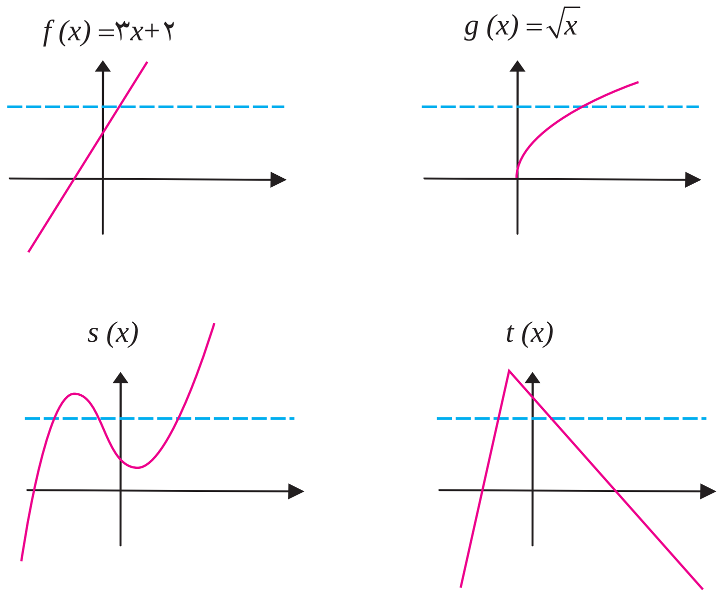
همان‌طور که در درس ریاضی ۲ دیده‌اید وارون هر تابع ، لزوماً یک تابع نمی‌باشد. تنها، توابعی وارون پذیر هستند که یک به یک باشند. این از جمله دلایلی است که باعث می‌شود توابع یک به یک را با دقت بیشتری مطالعه کنیم.

از قبل می‌دانید که تابع f یک به یک است هر گاه دو عضو متمایز x_1, x_2 در دامنه به دو عضو متمایز $f(x_1), f(x_2)$ در برد نظیر شوند به بیان ریاضی می‌توان نوشت :

تعریف :

تابع f یک به یک است هرگاه $x_1, x_2 \in D_f \ , x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

اگر نمودار تابع f داده شده باشد، f در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در شکل‌های داده شده توابع f و g یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می‌باشند. توابع t و s یک به یک نیستند و در نتیجه وارون پذیر هم نیستند.



یک به یک بودن تابع به این معنی است که هیچ دو نقطه متمایزی مانند x_1, x_2 یافت نمی‌شود که برای آن‌ها : $f(x_1) = f(x_2)$.

به بیان دیگر اگر برای دو نقطه x_1, x_2 داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2)$ آن گاه $x_1 = x_2$. تابع یک به یک را به روش زیر نیز می‌توان مشخص کرد.

تذکر :

تابع f یک به یک است، اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از دامنه f داشته باشیم :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال

۱ : نشان می‌دهیم تابع $f(x)=3x+2$ یک به یک است.

به کمک نمودار تابع دیده می‌شود که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

از طریق جبری نیز با فرض $f(x_1)=f(x_2)$ ثابت می‌کنیم $x_1=x_2$.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3x_1+2=3x_2+2$$
$$\Rightarrow 3x_1=3x_2$$
$$\Rightarrow x_1=x_2$$

روش جبری در جاهایی که نمودار تابع شناخته شده نیست یا رسم آن دشوار است مناسب است.

۲ : ثابت می‌کنیم تابع $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ یک به یک است.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1}=\frac{2x_2+1}{x_2-1}$$
$$\Rightarrow 2x_1x_2-2x_1+x_2-1=2x_1x_2-2x_2+x_1-1$$
$$\Rightarrow -2x_1-x_1=-2x_2-x_2$$
$$\Rightarrow -3x_1=-3x_2$$
$$\Rightarrow x_1=x_2$$

بنابراین f یک به یک است و در نتیجه وارون‌پذیر است.

۳ : تابع $g(x)=\sqrt{x}$ یک به یک است. این موضوع به سه روش قابل اثبات است.

الف) استفاده از آزمون خط افقی، یعنی هر خط به موازات محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

ب) در حقیقت $g(x)=\sqrt{x}$ یک تابع اکیداً صعودی است، در نتیجه اگر $x_1\neq x_2$ اطمینان داریم که $g(x_1)\neq g(x_2)$. این خاصیت برای تمام توابع اکیداً صعودی برقرار است یعنی، توابع اکیداً صعودی یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر هستند. توابع نزولی اکید نیز یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر هستند.

ج) روش محاسبه جبری : $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$

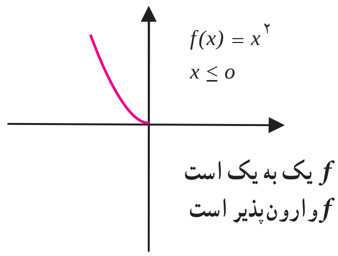
تمرین در کلاس

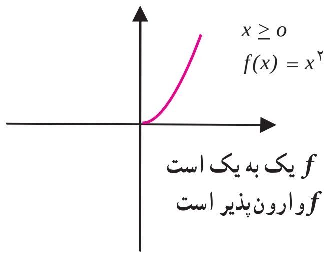
کدام‌یک از توابع زیر یک به یک است. در مورد (الف) و (ب) موضوع را با رسم نمودار توابع نیز بررسی کنید.

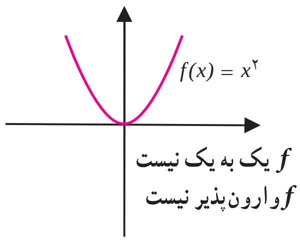
الف) $f(x)=1-x^2$ ب) $g(x)=\sqrt{2x-3}$ ج) $h(x)=\dfrac{x+6}{3x-4}$

اگر تابعی یک به یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست، اما با کوچکتر کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک به یک بسازیم.

مثلاً تابع $f(x) = x^۲$ یک به یک نیست اما می‌توانیم دامنه تابع را به بازه $(-\infty, ۰]$ محدود کنیم و در این صورت تابعی یک به یک به‌دست آوریم. همچنین می‌توانیم دامنه آن را به بازه $[۰,\infty)$ محدود کنیم و تابعی یک به یک به دست آوریم.







محدود کردن دامنه یک تابع را تحدید کردن تابع می‌نامند. این عمل، از روی تابع داده شده، تابع جدیدی می‌سازد و ممکن است تابع جدید خواصی داشته باشد که تابع قبلی نداشته باشد. در جمع و ضرب و تقسیم توابعی که دامنه یکسان ندارند، ابتدا این توابع روی دامنه یکسان تحدید می‌شوند و سپس این توابع تحدید یافته هستند که با هم جمع، ضرب، یا تقسیم می‌شوند.

تمرین در کلاس

۱. کدام‌یک از توابع زیر یک به یک هستند.

الف) $x \geq ۰$ $\qquad f(x) = x^۲ - ۲x$

ب) $x > ۰$ $\qquad f(x) = \dfrac{x^۲ - ۴}{۲x^۲}$

۲. با محدود کردن دامنه هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = |x - ۲|$ $\qquad$ ب) $y = (x + ۳)^۲$ $\qquad$ ج) $y = sinx$ $\qquad$ د) $y = cosx$

اگر f تابعی وارون پذیر باشد و وارون آن تابع g باشد، g تابعی است که برعکس f عمل می‌کند، یعنی اگر $f(a) = b$ آنگاه $g(b) = a$.
این ویژگی باعث می‌شود نمودار g قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم شود. به خاطر این ویژگی با در دست داشتن نمودار یک تابع وارون پذیر می‌توانیم نمودار تابع وارون آن را رسم کنیم.

بحث در کلاس

اگر f تابعی وارون‌پذیر و وارون آن تابع g باشد، آیا g نیز وارون‌پذیر خواهد بود؟ وارون g چه تابعی خواهد بود؟

محاسبه تابع وارون

در ریاضی ۲ یادگرفته‌اید که اگر تابعی یک به یک مانند f به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شده باشد، برای بدست آوردن $f^{-۱}$، جای مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب را عوض می‌کنیم به عبارت دیگر برای هر تابع یک به یک f تابع $f^{-۱}$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$f^{-۱}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$$

با توجه به تعریف $f^{-۱}$ ، هنگامی که نمودار یک تابع یک به یک f داده شده باشد برای به دست آوردن نمودار تابع $f^{-۱}$ کافی است قرینه نمودار f را نسبت به خط $y=x$ به دست آوریم.

تمرین در کلاس

ابتدا تعیین کنید که کدام‌یک از توابع زیر یک به یک هستند، سپس وارون هر کدام که یک به یک هستند را مانند نمونه در همان دستگاه مختصات رسم کنید. از خط $y=x$ برای سهولت استفاده کنید.