درنتیجه $$10^n \left|U - r_n\right| = /U_{n+1} \cdots U_{n+k} \cdots < 1$$

و یا $$0 < \left|U - r_n\right| < \frac{1}{10^n}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ ، به‌ازای عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ ، Nای هست که برای هر $n \geq N$، $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$

درنتیجه برای هر n که $n \geq N$، $\left|U - r_n\right| < \frac{1}{10^n} < \varepsilon$ یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = U$

یکی از کاربردهای این قضیه، استفاده از آن برای تعریف توان اعداد به نمای گنگ است. فرض کنیم a عددی مثبت و x عددی گنگ باشد. بنابر قضیه فوق دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از اعداد گویا هست که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ، اینک توان a^x را چنین تعریف می‌کنیم : $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$

قواعد آشنای توان که برای اعداد گویا برقرار است به توان‌های گنگ نیز منتقل می‌شود.

۱ـ ۸ـ یک دنبالهٔ مهم

دنباله زیر را درنظر می‌گیریم $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty} : 2, (\frac{3}{2})^2, (\frac{4}{3})^3, (\frac{5}{4})^4, (\frac{6}{5})^5, \ldots$

این دنباله هم به لحاظ کاربردی و همچنین از جنبه نظری اهمیت فوق‌العاده دارد. چرا؟ ثابت می‌شود این دنباله همگراست و هرگاه حد آن را e بنامیم، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

عدد حقیقی e به‌صورتی طبیعی، در بیشتر پدیده‌های خلقت ظاهر می‌شود. دو دسته از مهم‌ترین پدیده‌ها فرایندهای رشد و زوال هستند. در اولی کمیت مورد مطالعه (نسبت به زمان) رشد می‌کند و در پدیده دوم کمیت مورد بحث رو به زوال دارد. برای مثال : وقتی تعداد اندکی باکتری را در محیطی مناسب قرار می‌دهیم، به شدت رشد کرده و پس از زمان اندکی تعداد آنها ۲، ۳ و یا صد برابر می‌شود. در حالی‌که هرگاه مقداری ماده رادیواکتیویته مانند فلزهای اورانیوم، پلوتونیوم، و یا انشتانیوم را داشته باشیم، پس از مدتی مقدار آن کاهش یافته، یعنی بخشی از ماده زوال یافته و به عناصر دیگری مبدل می‌گردد. عدد e در چنین پدیده‌هایی نقشی اساسی دارد، به‌گونه‌ای که در محاسبات مربوط به رشد و زوال به‌صورتی طبیعی بروز می‌کند. e در اقتصاد نیز مطرح می‌شود. از این بابت لگاریتمی که پایه آن عدد e باشد **لگاریتم طبیعی** نامیده می‌شود.

اثبات همگرایی دنباله $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ براساس اصل موضوع تمامیت امکان‌پذیر است ابتدا ثابت می‌کنیم که این دنباله صعودی است، سپس ثابت می‌کنیم که این دنباله از بالا کراندار است. مثلاً برای هر عدد طبیعی n، $(1+\frac{1}{n})^n \leq 4$

ابتدا یک قضیه کمکی ثابت می‌کنیم

قضیهٔ ۱ : دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n=(1-\frac{1}{n})^n$ صعودی است.

برهان* : ثابت می‌کنیم برای هر n، $\frac{b_{n+1}}{b_n}>1$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1-\frac{1}{n})^n}=\frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1-\frac{1}{n})^{n+1}}\times(1-\frac{1}{n})$$

داریم

$$=\left(\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1}(1-\frac{1}{n})=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}(1-\frac{1}{n})$$

$$=(1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}(1-\frac{1}{n})$$

بنابرنامساوی برنولی : $(1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}>1+\frac{n+1}{n^2-1}$

بنابراین

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=(1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}(1-\frac{1}{n})>(1+\frac{n+1}{n^2-1})(1-\frac{1}{n})$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}>(1+\frac{1}{n-1})(1-\frac{1}{n})=1$$

قضیه ۲: دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه : $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ صعودی است

برهان* : کافی است ثابت کنیم برای هر n، $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ، داریم

---

* برهان‌های ستاره‌دار (مربوط به قضایای ۱ و ۲ و۳) برای مطالعه آزاد و اختیاری دانش‌آموزان است.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}=\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\times(1+\frac{1}{n})$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2})^{n+1}\times(1+\frac{1}{n})=(1-\frac{1}{(n+1)^2})^{n+1}(1+\frac{1}{n})$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>(1-\frac{n+1}{(n+1)^2})(1+\frac{1}{n})=1$$ (بنابر نامساوی برنولی)

چون $a_1=2$ و دنباله $\{a_n\}$ صعودی است پس برای هر $n\geq 2$، $a_n>2$.

❖ **قضیه ۳:** دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ از بالا کراندار است.

❖ **برهان*:** بنابر قضیه (۲) دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n=(1-\frac{1}{n})^n$ صعودی است. چون $b_2=\frac{1}{4}$ پس برای هر n، $b_n>\frac{1}{4}$، از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای هر n، $a_nb_n>a_n\times\frac{1}{4}$

امّا $a_nb_n=(1+\frac{1}{n})^n(1-\frac{1}{n})^n=(1-\frac{1}{n^2})^n<1$

در نتیجه $a_n\times\frac{1}{4}<1$ و یا $a_n<4$

❖ **نتیجه:** دنباله $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ صعودی و از بالا کراندار است پس طبق قضیه ۱ همگراست.
و ثابت می‌شود که عدد ۳ نیز یک کران بالای دنباله $\{a_n\}$ است و $2<e<3$.

تمرین در کلاس

۱ــ حد دنباله‌های زیر را حدس بزنید.

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^{2n} \qquad b_n=(1+\frac{1}{n})^{3n} \qquad c_n=(1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$$

راهنمایی: از قاعده توان‌های مکرر استفاده کنید: $[(a)^\alpha]^\beta=(a)^{\alpha\beta}$

۲ــ از ماشین حساب و یا رایانه خود استفاده کرده و عدد e را تا ۱۰ رقم اعشار به‌دست آورید.

۳ــ حاصل $(1+0/01)^{100}$ را به‌دست آورید و با عدد e مقایسه کنید.

خواندنی

لئونارد اویلر (Leonard Euler) : ریاضیدان مشهور سوئیسی که کارهای زیادی در زمینه‌های مختلف ریاضیات از جمله جبر، آنالیز، توپولوژی و هندسه انجام داده است. اویلر ریاضیدانی بسیار پرکار بوده است با بیش از ۵۷۰ کتاب و مقاله در عالَم ریاضیات در زمان حیات خود به رشته تحریر درآورده است. برخی هم او را سودمندترین ریاضیدان همه قرون و اعصار دانسته‌اند.

انتخاب حرف e برای عدد $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ ، که آن را عدد نِپِر می‌نامند به افتخار اویلر از حرف اوّل اویلر (Euler) اقتباس شده است.

۱ـ۹ـ جبر دنباله‌ها

دنباله‌های عددی، را می‌توان همانند اعداد با هم جمع یا تفریق کرد و دنباله جدیدی به نام مجموع یا تفاضل (دو دنباله) به‌دست آورد. همچنین دو دنباله عددی را می‌توان درهم ضرب کرد و دنباله جدیدی به نام دنباله حاصلضرب به‌دست آورد. در مورد تقسیم نیز تحت شرایطی می‌توان دو دنباله را برهم تقسیم کرد.

تعریف : فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند، در این‌صورت دنباله‌های $\{a_n+b_n\}$ و $\{a_n-b_n\}$ و $\{a_nb_n\}$ را خواهیم داشت، جمله nام دنباله $\{a_n+b_n\}$ همان حاصل جمع عددی a_n و b_n است.

همگرایی دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به‌آسانی به همگرایی دنباله‌های به‌دست آمده منتقل می‌شود.

قضیه ۱: فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله همگرا باشند. در این صورت

الف) دنباله‌های $\{a_n\pm b_n\}$ ، $\{a_n.b_n\}$ ، $\{c.a_n\}$ (c عددی ثابت) همگرا هستند، به‌علاوه

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n.\lim_{n\to\infty}b_n \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n$$

ب) هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$ ، دنباله $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ نیز همگراست و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$$

قضیه ۲ (قضیه فشردگی): فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$ ، همچنین فرض کنیم $\{c_n\}$ دنباله‌ای باشد به قسمی که برای هر n، $a_n\leq c_n\leq b_n$ در این صورت دنباله $\{c_n\}$

نیز همگراست و $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

برهان: فرض کنیم $\varepsilon>0$ عدد مفروض دلخواهی باشد. چون $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ از شماره‌ای مانند N_1 به بعد $|b_n-L|<\varepsilon$ (۱)

همچنین چون $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ از شماره‌ای مانند N_2 به بعد $|a_n-L|<\varepsilon$ (۲)

حال فرض کنیم $N=Max\{N_1, N_2\}$، و n عدد طبیعی دلخواهی باشد که $n\geq N$، پس برای هر $n\geq N_1$ و $n\geq N_2$، روابط (۱)، (۲) با هم برقرارند و داریم. $b_n<L+\varepsilon$

$L-\varepsilon < a_n$ (چرا؟)

امّا برای هر n، $a_n\leq c_n\leq b_n$، لذا برای هر n که $n\geq N$،

$L-\varepsilon < c_n < L+\varepsilon$

یعنی $|c_n-L|<\varepsilon$، در نتیجه $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

مثال: می‌دانیم $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ که در آن k عددی طبیعی است در همگرایی دنباله‌های زیر بحث کنید.

الف) $\left\{\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}\right\}$ ب) $\left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$

حل: (الف) داریم

$$\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3} = \frac{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{5+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}$$

امّا

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$=2-0-0=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$=5+0-0=5$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3} = \frac{2}{5}$$

(ب) می‌دانیم همواره $-1\leq \cos x\leq 1$ در نتیجه برای هر عدد طبیعی n،

$$\frac{-1}{n}\leq\frac{\cos n}{n}\leq\frac{1}{n}$$

چون $\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ پس $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0$

مسائل

در هر یک از تمرین‌های زیر مشخص کنید که آیا دنباله موردنظر

الف) (از بالا یا پایین) کراندار است.

ب) جملات دنباله مثبت یا منفی‌اند.

ج) صعودی یا نزولی است.

د) همگرا یا واگراست؛ و اگر واگراست به $+\infty$ و یا واگرا به $-\infty$ و یا هیچ‌یک.

۱ــ $\left\{\frac{5n^2}{n^2+1}\right\}$ ۲ــ $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$ ۳ــ $\left\{4+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

۴ــ $\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$ ۵ــ $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$ ۶ــ $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$

۷ــ $\left\{n\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ ۸ــ $\left\{n\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ ۹ــ $\left\{n\cos\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

۱۰ــ ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$. آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}=+\infty$ ؟

۱۱ــ همگرایی، واگرایی و واگرایی به $+\infty$ یا $-\infty$ دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$ ب) $\left\{(-1)^n\frac{n+1}{n}\right\}$ ج) $\left\{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right\}$

۱۲ــ اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به‌ترتیب به اعداد a و b همگرا باشند و همواره $a_n \le b_n$، ثابت کنید : $a \le b$

۱۳ــ فرض کنیم دنباله $\{p_n\}$ همگرا و a و b دو عدد ثابت باشند به قسمی که $p_{n+1}=\frac{bp_n}{a+p_n}$، حد دنباله $\{p_n\}$ را حساب کنید. $(0<a<b)$

۱۴ــ دنباله $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است :

$$a_1=1 \text{ و } a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}\quad (n=1,2,3,\dots)$$

الف) ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ همگراست.

ب) حد دنباله $\{a_n\}$ را به‌دست آورید.

فصل ۲

حد و پیوستگی

۲ـ۱ـ مقدمه

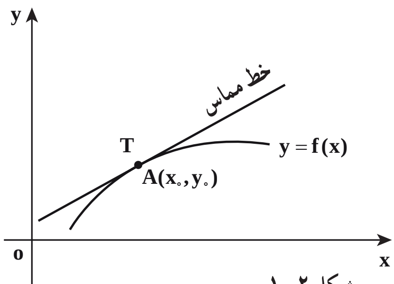
فرایند گذر از ریاضیات مقدماتی به حسابان

رشد و توسعهٔ بخش وسیعی از حسابان ریشه در دو مسألهٔ هندسی دارد :

پیدا کردن مساحت‌هایی از ناحیه‌های یک سطح (صفحه) و پیدا کردن خط‌های مماس بر منحنی‌ها. در این بخش نشان می‌دهیم هر دو مسأله به‌طور تنگاتنگی براساس یک مفهوم بنیادی از حسابان که به عنوان «حد» شناخته شده قابل بیان می‌باشند.

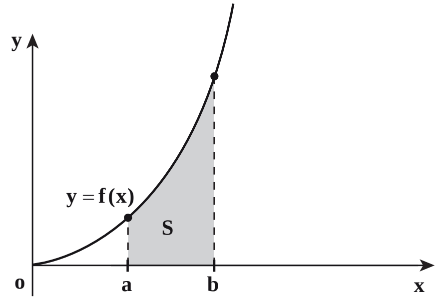
مسألهٔ خط مماس و مساحت : حسابان حول دو مسألهٔ بنیادی زیر متمرکز است :

۱ــ مسألهٔ مماس : تابع f و نقطه $A(x_\circ\ و\ y_\circ)$ روی نمودار آن داده شده است، معادله خط مماس بر نمودار f در نقطه A را پیدا کنید.(شکل ۲ــ۱)



شکل ۲ــ۱

۲ــ مسألهٔ مساحت : تابع f داده شده است. مساحت ناحیهٔ بین نمودار f و بازهٔ [a , b] و محور xها را پیدا کنید. (شکل ۲ــ۲)



شکل ۲ــ۲

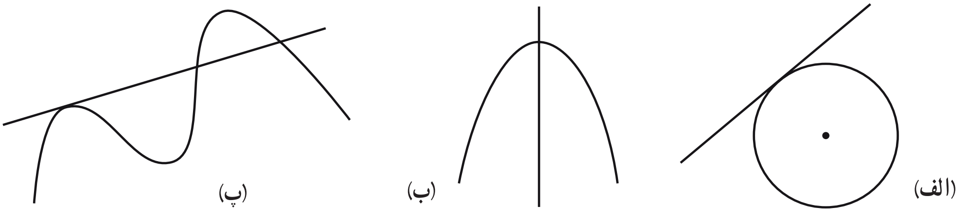
از منظر سنتی و تاریخی آن بخش از حساب که از مسألهٔ مماس برآمده است «حساب دیفرانسیل» نامیده می‌شود و آن بخش از حسابان که از مسأله مساحت برآمده است «حساب انتگرال» نامیده می‌شود. کشف رابطه بین این دو حساب که تحت عنوان قضیه اساسی عرضه می‌گردد باعث شده است که تفکیک میان این دو، دشوار بوده و مطالعه هر دو مسأله تحت عنوان حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام گیرد.

برای حل کردن مسأله‌های مماس و مساحت لازم است درک و فهم دقیق‌تری از مفاهیم «خط مماس» و «مساحت» داشته باشیم.

در این فصل به توضیح و تبیین خط مماس و مفهوم حد پرداخته، بررسی و مطالعه مسألهٔ مساحت را به فصل ۴ واگذار می‌کنیم.

۲ـ۲ـ خط‌های مماس و حد

در هندسه مسطحه، یک خط بر دایره مماس است، هرگاه آن خط دایره را دقیقاً در یک نقطه قطع کند (شکل ۲ــ۳ قسمت الف). این تعریف برای انواع دیگر منحنی‌ها صادق نیست (شکل ۲ــ۳ قسمت ب). خطی که دقیقاً در یک نقطه منحنی را قطع می‌کند، مماس نیست. در شکل ۲ــ۳ قسمت(پ) این خط بر منحنی مماس است در حالی‌که منحنی را بیش از یک بار قطع کرده است.

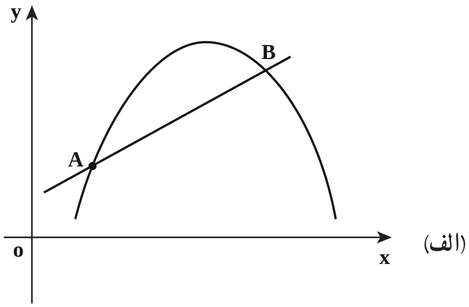


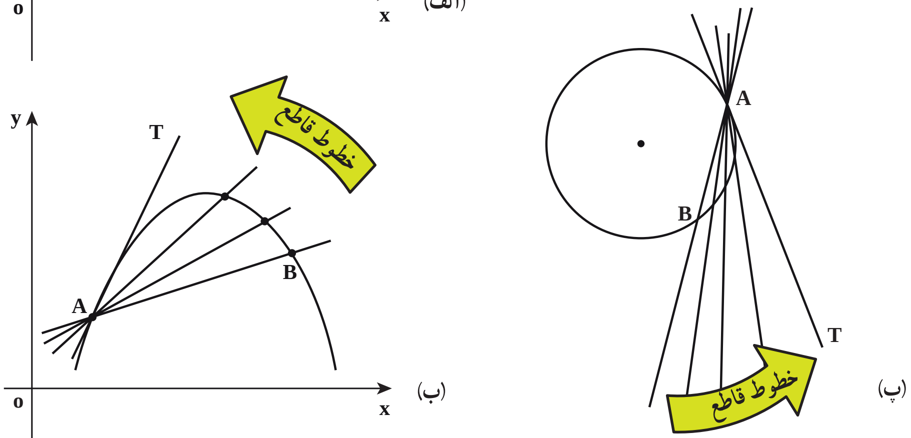
شکل ۲ــ۳

برای اینکه تعریف مفهوم خط مماس را برای منحنی‌هایی غیر از دایره بیان کنیم، باید با روشی دیگر خط‌های مماس را درنظر بگیریم.

نقطهٔ A را روی یک منحنی در صفحه $x-y$ درنظر می‌گیریم. اگر B نقطهٔ دلخواه و متمایز با A روی منحنی باشد، به خطی که از نقطهٔ A و B می‌گذرد، خط قاطع می‌گوییم (شکل صفحهٔ بعد قسمت الف). شهود ما پیشنهاد می‌کند که اگر نقطهٔ B را روی منحنی به سوی A حرکت دهیم، خط قاطع به سوی یک حالت «حدی» دوران می‌کند (شکل ۲ــ۴ قسمت ب). خط T که این حالت (مکان) حدی را اشغال می‌کند، را به‌عنوان خط مماس در نقطه A درنظر می‌گیریم.

همان‌گونه که از شکل ۲ــ۴ قسمت (پ) معلوم است، این مفهوم جدید از یک خط مماس با مفهوم معمولی که برای دایره به کار می‌رود منطبق و سازگار است.





شکل ۲ــ۴

۲ـ۳ـ مفهوم حد ـ فرایند حد

مطالعه و بررسی مسألهٔ خط مماس و مسألهٔ مساحت یک ناحیه در صفحه، موجب پیدایش شهودی و تقریبی مفهوم ریاضی جدیدی به‌نام «حد» شد. تلاش‌های بعدی بر روی دقیق‌کردن مفهوم حد و رسمیت یافتن آن در ریاضیات متمرکز گردید. سپس مطالعه و بررسی نتایج حاصل از آن و کاربردهای آن در ریاضیات و در علوم دیگر در دستور کار قرار گرفت. خیلی زود مشخص گردید که مفهوم حد فراتر از حل مسأله خط مماس و مسأله مساحت باعث حل مسائل بسیار، پیدایش اندیشه‌های ریاضی بسیار و به‌طور کلی رشد و توسعه وسیع ریاضیات گردید.

یکی از نقش‌آفرینی‌های اساسی مفهوم حد که موجب کاربردهای وسیع و حل مسائل بسیاری در حوزه‌های علمی دیگر شد، بررسی رفتار تابع است. بسیاری از پدیده‌های طبیعی و فیزیکی، بسیاری از مسأله‌های واقعی پس از صورت‌بندی ریاضی به صورت یک تابع درمی‌آید.

بنابراین بررسی رفتار تابع، دربرگیرنده بسیاری از پدیده‌های طبیعی، فیزیکی، اقتصادی، زیستی و ... و حل مسائل واقعی مربوطه می‌باشد. در این بخش به بررسی و مطالعه مفهوم حد به‌صورت شهودی و تقریبی می‌پردازیم.

برای شروع تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ و دو دنباله $\{(۰/۱)^n\}$ و $\{-(۰/۱)^n\}$ را درنظر می‌گیریم، (مقادیر x برحسب رادیان است).

فعالیت

الف) سه جملهٔ اوّل هر کدام از دنباله‌های بالا را بنویسید و حدس بزنید هر کدام از دو دنباله به چه عددی همگرا هستند؟

ب) جدول زیر را تکمیل کنید.

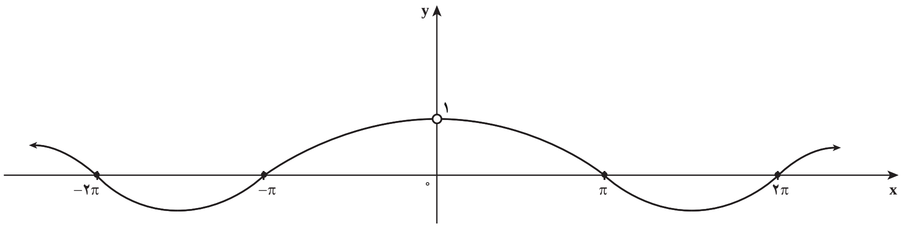
x از چپ به عدد ... نزدیک می‌شود ← → x از راست به عدد ... نزدیک می‌شود

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	۰			۰/۱
f(x)	۰/۹۹۸۳	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹	?			۰/۹۹۸۳

f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود ← → f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود

در این فعالیت نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ که در $x=۰$ تعریف نشده است به صورت شکل ۲ــ۵ است :

نتایج به دست آمده از جدول بالا را از روی نمودار تابع f بررسی نمایید.



شکل ۲ــ۵

تمرین در کلاس

تابع $f(x)=\dfrac{x^۳-۱}{x-۱}$ را درنظر می‌گیریم.

۱ــ پنج جملهٔ اوّل هر کدام از دنباله‌های $\{۱-(۰/۱)^{n-۱}\}$ و $\{۱+(۰/۱)^{n-۱}\}$ را بنویسید و حدس بزنید هر کدام از دو دنباله به چه عددی همگرا هستند؟

۲ــ جدول زیر را تکمیل کنید.

x از راست به عدد ... نزدیک می‌شود　　　x از چپ به عدد ... نزدیک می‌شود

x	۰	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۲
f(x)	۱	۲/۷۱	۲/۹۷۰۱	۲/۹۹۷۰۰۱		?		۳/۰۰۳۰۰۱	۳/۰۳۰۱	۳/۳۱	۷

f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود　　　f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود

۳ــ نمودار تابع f را در صفحهٔ مختصات رسم کنید و سپس به کمک نمودار تابع حدس بزنید که اگر **x** با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به ۱ نزدیک شود و همچنین x را با مقادیر کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک کنیم، f(x) به چه عددی نزدیک خواهد شد؟

در تمرین و فعالیت بالا با تابعی روبه‌رو بودیم که متغیر x (در دامنه تابع) به عددی مانند α نزدیک می‌شد و این سؤال مطرح بود که آیا مقدارهای تابع به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ این مفهوم را حدگیری از تابع در نقطه a می‌نامند (فرایند حد)

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم، وقتی متغیر x (در دامنه f) بسیار بسیار به صفر نزدیک باشد (با مقادیر بزرگ‌تر از صفر و یا کوچک‌تر از صفر)، مقدارهای f(x) به ۱ نزدیک هستند. میزان نزدیک بودن آنها به ۱، بستگی به میزان نزدیک بودن x به صفر دارد. در حقیقت، به نظر می‌رسد که می‌توانیم مقدارهای f(x) را هر چقدر که بخواهیم به ۱ نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به صفر نزدیک کرده باشیم و این را چنین می‌گوییم «حد تابع f وقتی که x به صفر میل می‌کند برابر ۱ است» و می‌نویسیم :

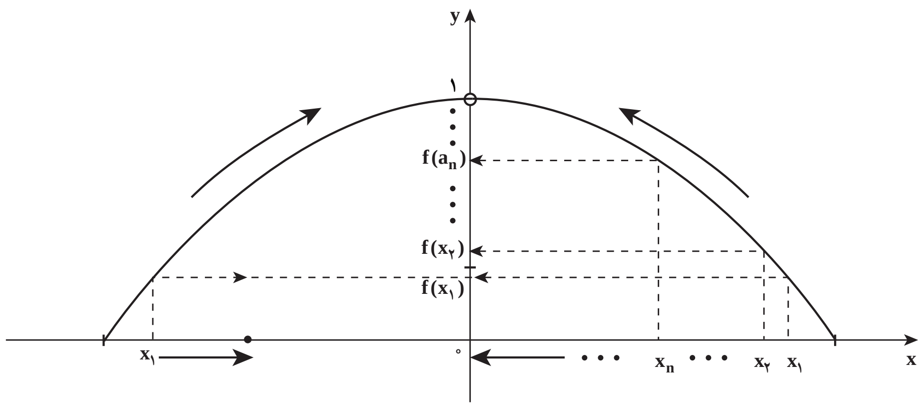
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

همچنین از تمرین در کلاس نتیجه می‌گیریم، وقتی متغیر x (در دامنه f) بسیار بسیار نزدیک به ۱ باشد (با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ و یا کوچک‌تر از ۱)، مقدارهای f(x) به ۳ نزدیک هستند. میزان نزدیک بودن آنها به ۳، بستگی به میزان نزدیک بودن x به ۱ دارد. در حقیقت، به نظر می‌رسد که می‌توانیم مقدارهای f(x) را هر چقدر که بخواهیم به ۳ نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کرده باشیم و این را چنین می‌گوییم «حد تابع f وقتی که x به ۱ میل می‌کند برابر ۳ است» و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

در تمرین و فعالیت صفحات قبل مفهومی بررسی شد که می‌توان برای یک تابع دلخواه f به صورت زیر تشریح کرد.

فرض کنید نمودار تابع دلخواه f در حوالی $x=۰$ به شکل ۲ــ۶ باشد.



نمودار f

شکل ۲ــ۶

با مشاهده نمودار f اگر مقدارهای x که همان مقدارهای دنباله دلخواه $\{x_n\}$ هستند، همگرا به صفر باشند، دنباله $\{f(x_n)\}$ به ۱ همگراست و نیز اگر متغیر x (x عضو دامنه f) با مقدارهای بزرگ‌تر و کوچک‌تر از صفر به صفر میل کند $f(x)$ به ۱ میل می‌کند.

در حالت کلی از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم :

فرض می‌کنیم مجموعهٔ D که زیر مجموعه‌ای است از مجموعه اعداد حقیقی، دامنه تابع f باشد. اگر مقدار $f(x)$ میل کند به عدد L، وقتی که x (عضو D) به a میل کند.

می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

و می‌خوانیم «حد $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند برابر L است».

تذکر : وقتی می‌گوییم که «x به a میل می‌کند» $x \neq a$ می‌باشد و اختلاف x و a کوچک و کوچک‌تر می‌شود، فرض بر این است که تابع f در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه a تعریف شده باشد.

تمرین در کلاس

ویژگی‌ها و وضعیت مقادیر تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}$ به ازای چهار جملهٔ اوّل دنباله‌های $\{(۰/۱)^n\}$ و $\{-(۰/۱)^n\}$ را در نزدیکی $x=۰$ با تنظیم جدول و رسم نمودار تابع توصیف کنید و سپس $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را تخمین بزنید.

حدودی که وجود ندارند.

فعالیت

تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ و دنباله‌های $\{(۰/۱)^{n-۱}\}$ و $\{-(۰/۱)^{n-۱}\}$ را درنظر می‌گیریم.

الف) پنج جملهٔ اوّل دنباله‌های داده شده را بنویسید.

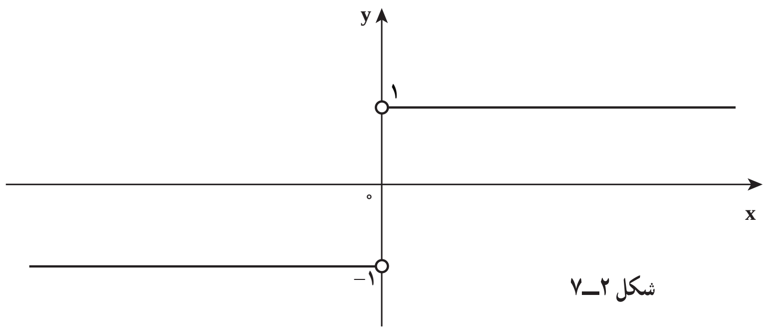
ب) جدول زیر را برای تابع f تکمیل کنید.

x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود — x با مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود

x	-۱	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$-۰/۰۰۰۱$	۰	$۰/۰۰۰۱$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$	۱
$f(x)=\frac{\vert x\vert}{x}$											

f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود — f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود

پ) نتایج به‌دست آمده خود را روی نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ که در (شکل ۲ـ۷) آمده است توضیح دهید.



شکل ۲ـ۷

ت) آیا $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{|x|}{x}$ وجود دارد؟

در حالت کلی :

الف) در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقادیر بزرگ‌تر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقادیر f(x) به عددی مانند L_1 میل کند گفته می‌شود تابع f در نقطهٔ a حد راست دارد و مقدار این حد L_1 است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$$

L_1 را حد راست تابع f در a می‌نامیم.

بنابراین از این فعالیت نتیجه می‌گیریم :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

ب) در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقادیر کوچک‌تر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقادیر f(x) به عددی مانند L_2 نزدیک شود گوییم تابع f در نقطهٔ a حد چپ دارد و مقدار این حد L_2 است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$$

بنابراین از فعالیت نتیجه می‌گیریم : $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

تمرین در کلاس

ابتدا نمودار تابع f(x)=x+[x] را در بازه [0,2) رسم کنید و سپس مقادیر $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ را تخمین بزنید. آیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ وجود دارد؟

طرح یک مسأله

وجود حدهای $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{\pi}{x}$ و $\lim_{x\to 0^-} \sin\frac{\pi}{x}$ را بررسی کنید. اصطلاحاً گوییم رفتار تابع $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ را در مجاورت x=0 بررسی می‌کنیم.

در مورد حد اوّل دنباله‌هایی در نظر می‌گیریم که با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر میل می‌کنند.

۱ــ می‌دانیم دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ همگرا به صفر است. مقادیر تابع را در ازای مقادیر این دنباله محاسبه می‌کنیم. (جدول ۱)

(جدول ۱)

a_n	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	...
$f(a_n)$	$\sin\pi$	$\sin ۲\pi$	$\sin ۳\pi$	$\sin ۴\pi$	...

سپس جملات دنباله $\{f(a_n)\}$ همگی برابر صفر بوده و این دنباله به صفر همگرا است.

۲ــ دنباله $\{b_n\}$ را با جمله عمومی $b_n = \frac{۲}{۴n+۱}$ درنظر می‌گیریم، جملات اوّلیه دنباله $\left\{\frac{۲}{۵},\frac{۲}{۹},\frac{۲}{۱۳},\frac{۲}{۱۷},...\right\}$ بوده و می‌دانیم که این دنباله همگرا به صفر است. به ازای این مقادیر جدول(۲) را تشکیل می‌دهیم :

(جدول ۲)

b_n	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۲}{۱۳}$	$\frac{۲}{۱۷}$	...
$f(b_n)$	۱	۱	۱	۱	...

پس دنباله $\{f(b_n)\}$ دنباله ثابت ۱ بوده و همگرا به عدد ۱ می‌باشد.

۳ــ دنباله $\{c_n\}$ را با مقادیر $\left\{\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۷},\frac{۲}{۱۱},\frac{۲}{۱۵},...\right\}$ که به صفر همگراست در نظر می‌گیریم.
مشابهاً جدول (۳) را برای مقادیر تابع به ازای این xها محاسبه می‌کنیم :

(جدول ۳)

c_n	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۲}{۱۱}$	$\frac{۲}{۱۵}$	...
$f(c_n)$	-۱	-۱	-۱	-۱	...

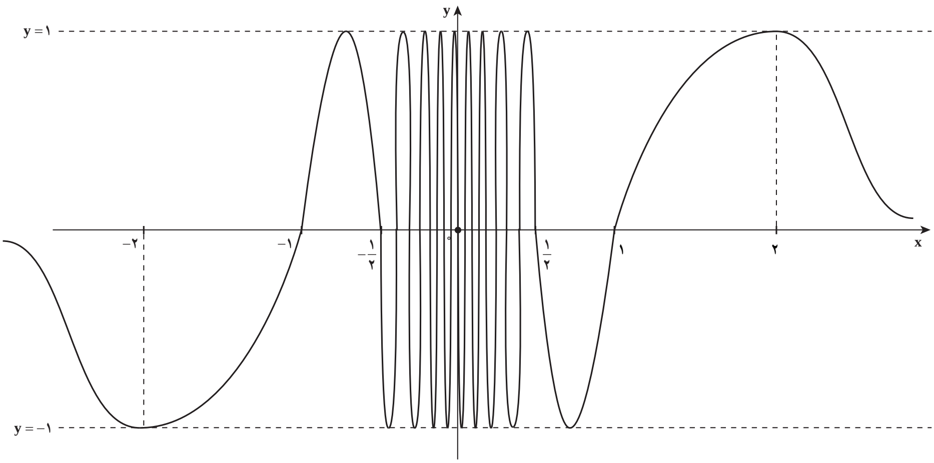
پس دنباله $\{f(c_n)\}$ به عدد -۱ همگراست.

ملاحظه می‌کنیم که $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=۱$ و $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n)=-۱$ در حالی‌که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = ۰$ یعنی دنباله‌های به‌دست آمده برای مقادیر تابع به یک عدد ثابت و مشخص همگرا نیستند در حالی‌که همه دنباله‌های عدد انتخاب شده به صفر همگرا بودند.

مشابه وضعیت فوق با انتخاب دنباله‌هایی که با مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر همگرایند، وجود یا عدم وجود $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ را بررسی کنید.

برای نمونه می‌توانید دنباله‌های $a_n=\frac{1}{n}$ و $b_n=-\frac{2}{4n+1}$ را به‌کار گیرید.

با استفاده از ماشین حساب‌های علمی و یا رایانه ملاحظه می‌کنیم که نمودار تابع f به شکل ۲ــ۸ می‌باشد.



شکل ۲ــ۸ ــ نمودار $y=\sin\frac{\pi}{x}$

ملاحظه می‌کنیم که مقادیر تابع در مجاورت $x=0$ بین دو عدد ثابت ۱ و ۱− کم و زیاد می‌شوند، در این‌صورت گفته می‌شود تابع در مجاورت $x=0$ رفتاری **نوسانی** دارد و نیز نمودار تابع به‌صورت موج‌های فشرده‌تری به محور y گرایش دارند.

چون تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$، تابعی فرد است نمودار f بر بازه $(-\infty,0)$ قرینه نمودار f بر بازه $(0,+\infty)$ نسبت به مبدأ مختصات است.

پرسش : براساس اطلاعات به‌دست آمده در جدول‌های (۱) و (۲) و (۳) آیا $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود دارد؟

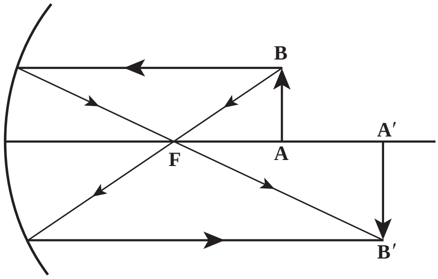
۲ـ۴ـ حد بی‌نهایت

مسأله : تصویری از یک شیء که در مقابل آینه مقعر قرار گرفته روی پرده افتاده است، با این فرض که فاصله شیء از آینه بزرگ‌تر از فاصله کانونی $(p>f)$

۱ــ رابطهٔ بزرگ‌نمایی آینه مقعر (m) را بر حسب p و f به‌دست آورید.

۲ــ وضعیت m را وقتی که p به f نزدیک می‌شود بررسی کنید.

در این فعالیت اگر f فاصله کانونی و p فاصله جسم تا آینه و q فاصله تصویر تا آینه فرض شود (شکل ۲ــ۹)، بزرگ‌نمایی در آینه مقعر برابر است با :



شکل ۲ــ۹

$$m = \frac{q}{p} \quad \text{یا} \quad m = \frac{A'B'}{AB} \; \frac{\text{طول تصویر}}{\text{طول شیء}}$$

۱ــ همان‌طور که در فیزیک یاد گرفته‌اید، داریم :

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = \frac{۱}{f} \qquad (۱)$$

در رابطهٔ (۱) به جای q، mp را قرار می‌دهیم تا رابطهٔ (۲) به‌دست آید.

$$m = \frac{f}{p-f} \qquad (۲)$$

۲ــ در رابطهٔ (۲) فاصله کانونی (f) ثابت است و فاصله شیء تا آینه متغیر است و مقدار بزرگ‌نمایی (m) مقدار تابعی است برحسب متغیر p.

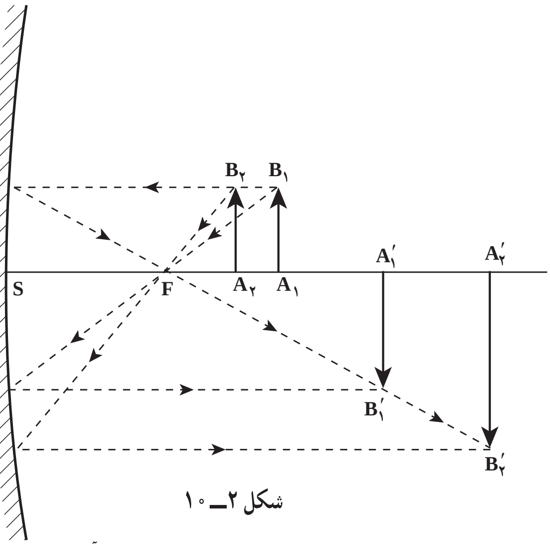
اکنون اگر p با مقدارهای بزرگ‌تر از f به f نزدیک و نزدیک‌تر شود، آنگاه m (بزرگ‌نمایی) بزرگ و بزرگ‌تر خواهد شد.

در حقیقت از نزدیک‌کردن p به مقادیر بزرگ‌تر از f به f، می‌توان هرچقدر که بخواهیم m را بزرگ انتخاب کنیم (مقدارهای m بی‌کران افزایش می‌یابند) و از نمادگذاری

$$\lim_{p \to f^+} \frac{f}{p-f} = +\infty$$

استفاده می‌کنیم.

پرسش : نمادگذاری بالا را به کمک شکل ۲ــ۱۰ توصیف کنید.



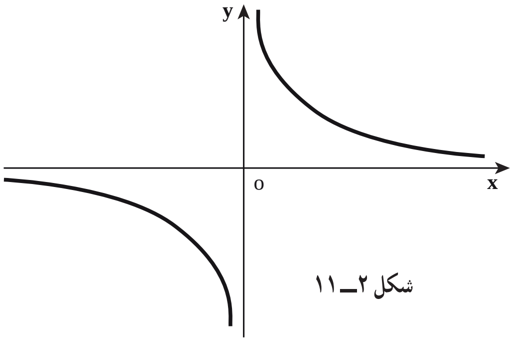
شکل ۲ــ۱۰

آینه مقعر

$A_۱B_۱ = A_۲B_۲ = \ldots = A_nB_n = \ldots$ طول شیء

فعالیت

فعالیت



شکل ۲ــ۱۱

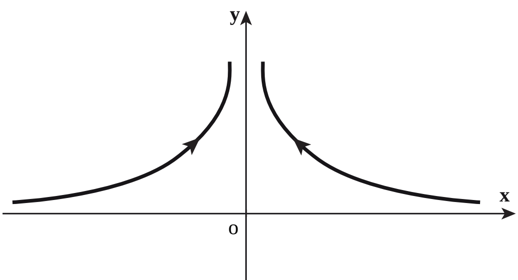
تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را که دامنه آن $R-\{۰\}$ است، درنظر می‌گیریم. نمودار این تابع را در حسابان دیده‌اید (شکل ۲ــ۱۱).

ملاحظه می‌کنیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر (از سمت راست صفر) به صفر نزدیک می‌شود مقادیر تابع به دلخواه بزرگ می‌شوند. به زبان دنباله‌ها هرگاه دنباله‌ای را درنظر بگیریم که به صفر میل کند مانند دنباله $a_n=\frac{۱}{n}$ دنباله $f(a_n)=f(\frac{۱}{n})=n$ به دست می‌آید و می‌دانیم که $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\infty$ پس $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=+\infty$

مشابهاً از روی نمودار می‌بینیم که وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از صفر (از سمت چپ صفر) به صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع که همگی منفی‌اند، از هر عددی کوچک‌تر می‌شوند. به زبان دنباله‌ها، هرگاه بخواهیم x از سمت چپ به صفر میل کند، باید دنباله‌هایی را درنظر بگیریم که با مقادیر منفی به صفر میل کنند، مانند دنباله $a_n=-\frac{۱}{n}$ و یا $b_n=\frac{-۱}{n^۲}$، در این‌صورت مثلاً $f(a_n)=-n$ به‌دست آمده و $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=-\infty$، بنابراین : $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}=-\infty$

از این بررسی نتیجه می‌گیریم که تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در صفر حد ندارد.

اکنون تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ را درنظر می‌گیریم. نمودار این تابع یک منحنی است بالای محور x که در مجاورت صفرشاخه‌های آن به گونه‌ای مماس‌وار به محور y نزدیک می‌شوند (شکل ۲ــ۱۲).



شکل ۲ــ۱۲

برای آنکه رفتار تابع را در مجاورت صفر بررسی کنیم، به عبارت دیگر در خصوص وجود یا عدم وجود حد تابع در صفر مطالعه کنیم، دنباله‌هایی را درنظر می‌گیریم که به صفر میل کنند (مقادیر دنباله عضو دامنه f)، مانند $a_n=\frac{۱}{n}$ و $b_n=-\frac{۱}{n}$، در این صورت :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} n^{۲}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{n\to\infty} n^{۲}=+\infty$$

توجه داریم که مقادیر دنباله $\{a_n\}$ از راست و مقادیر دنباله $\{b_n\}$ از چپ به صفر میل می‌کنند.

بنابراین :

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x^{۲}}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x^{۲}}=+\infty$$

در نتیجه اصطلاحاً می‌گوییم تابع f در نقطه $a=۰$ دارای حد نامتناهی و یا حد بی‌کران است.

وقتی $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$، باز هم‌چنین توصیف می‌کنیم که تابع f در نقطه a دارای حد نامتناهی است.

حالت کلی : وقتی از نماد $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ استفاده می‌کنیم، گوییم f در a دارای حد $+\infty$ است و این بدان معنی است که مقادیر f(x) به دلخواه بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند، به شرط آن‌که متغیر x (عضو دامنه f) به قدر کافی به a نزدیک شود. به زبان دنباله‌ها این وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر دنباله $\{a_n\}$ با مقادیر عضو دامنه f که $a_n\to a$، $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=+\infty$.

تمرین در کلاس

نشان دهید که $\lim_{x\to ۰}(-\frac{۱}{x^{۲}})=-\infty$

فعالیت

تابع $f(x)=\frac{-۱}{(x-۱)^{۲}}$ و دنباله‌های $\{۱+(۰/۱)^{n-۱}\}$ و $\{۱-(۰/۱)^{n-۱}\}$ را درنظر می‌گیریم :

۱ــ پنج جملهٔ اوّل دنباله‌های بالا را بنویسید.

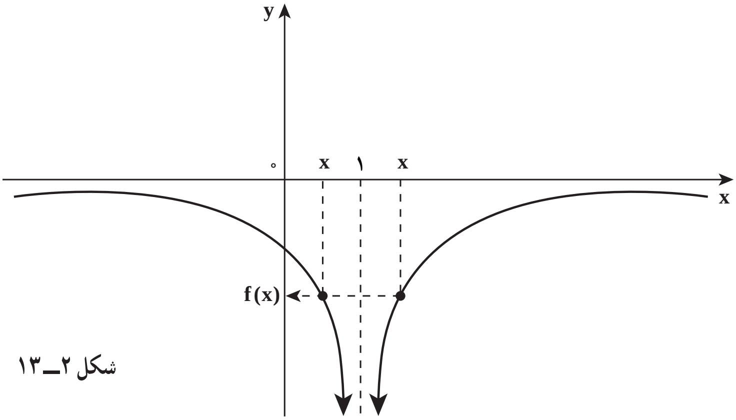
۲ــ جدول زیر را برای تابع f تکمیل کنید.

x	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$-۱/۰۰۰۱\to ۱ \leftarrow ۱/۰۰۰۱$	$۱/۰۰۱$	$۱/۰۱$	$۱/۱$
f(x)				$\to ؟ \leftarrow$			

۳ــ آیا مقدارهای f(x) وقتی x به ۱ نزدیک می‌شود، به عدد خاصی نزدیک

فعالیت

می‌شوند؟ جواب خود را از روی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ در شکل ۲ــ۱۳ توضیح دهید.



شکل ۲ــ۱۳

این فعالیت به ما نشان می‌دهد، وقتی x به ۱ نزدیک می‌شود، $(x-1)^2$ به صفر نزدیک خواهد شد و $\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ بسیار کوچک منفی می‌شود. در حقیقت به نظر می‌رسد که می‌توان با نزدیک کردن x به اندازه کافی به ۱، مقدارهای f(x) را به دلخواه با مقادیر منفی کوچک و کوچک‌تر کرد (مقدارهای f(x) بی‌کران کاهش می‌یابند).

در نتیجه مقدارهای f(x) به هیچ عدد میل نمی‌کند. بنابراین $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ وجود ندارد.

برای نشان دادن وضعیتی که در این فعالیت پیش آمده از نمادگذاری $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$ استفاده می‌کنیم.

حالت کلی : وقتی از نماد $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ استفاده می‌کنیم، گوییم f در a دارای حد $-\infty$ است. و این بدان معنی است که مقادیر f(x) با مقدارهای منفی کوچک و کوچک‌تر می‌شوند (مقادیر f(x) بی‌کران با مقادیر منفی کاهش می‌یابند) به شرط آن‌که متغیر x (عضو دامنه f) به قدر کافی به a نزدیک شود. به زبان دنباله‌ها، این وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر دنباله $\{a_n\}$ با مقادیر عضو دامنه f که $a_n\to a$، $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=-\infty$.

تمرین در کلاس

نشان دهید که $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$

۲ـ۵ـ حد در بی‌نهایت

تا اینجا رفتار تابع را در حول و حوش عددی حقیقی مانند a مورد مطالعه قرار داده‌ایم، به عبارت دقیق‌تر وجود یا عدم وجود حد تابع را در نقطه مشخص a بررسی کرده‌ایم. در این بخش علاقه‌مندیم تا رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و یا برای مقادیر بسیار کوچک ولی از حیث قدرمطلق بزرگ، مورد مطالعه قرار دهیم. رفتار تابع را برای xهای بزرگ و بی‌کران مثبت، حد در $+\infty$ و رفتار تابع را برای xهای بزرگ و با علامت منفی (بی‌کران منفی) حد در $-\infty$ نامیده می‌شود. به مثال تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ که نمودار آن نیز در ۲ــ۱۱ کتاب ملاحظه گردید برمی‌گردیم. وقتی x مقادیر بزرگ و بزرگ‌تر را اختیار می‌کند، یعنی در جهت xهای مثبت روی خط حقیقی به اصطلاح تغییر می‌کند، مقادیر تابع کوچک و کوچک‌تر شده و از هر عدد مشخصی کوچک‌تر می‌شوند. به لحاظ شهودی، همچنان‌که در شکل نمایان است نمودار این تابع در سمت راست و برای xهای بزرگ رفته رفته به محور x نزدیک‌تر می‌شود یعنی فاصله نقاط این شاخهٔ نمودار از محور x، کوچک و کوچک‌تر می‌شود.

با ابزار دنباله نیز می‌توانیم مسأله را بهتر بررسی کنیم، منتهی چون مرادمان حد در $+\infty$ است، باید دنباله‌ها را چنان اختیار کنیم که به $+\infty$ واگرا باشند. برای نمونه فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=n$ یک چنین دنباله‌ای باشد پس $f(a_n)=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n}$ و می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ پس می‌گوییم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

مشابهاً وقتی xها به $-\infty$ میل می‌کنند، یعنی xها علامت منفی دارند ولی از لحاظ قدرمطلق بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند. بنابراین دنباله‌ها را طوری باید اختیار کنیم که به $-\infty$ واگرا باشند. برای نمونه هرگاه با دنباله $a_n=1-n^2$ کار کنیم، $f(a_n)=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1-n^2}$ و می‌دانیم که $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=0$ پس $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$، و این واقعیتی است که از نمودار نیز به خوبی مشهود است.

حالت کلی : وقتی می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$، منظورمان آن است که مقادیر f(x) را هرچقدر که بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آنکه xهای عضو دامنه f به قدر کافی بزرگ باشند.

تمرین در کلاس

دبیر : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}$ را حدس بزنید.

محسن این‌گونه مسأله را بررسی کرده است :

در رابطه با حدسیه‌سازی $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}$ با مقادیر بزرگ و بزرگ‌تر x سرو کار داریم. پس عدد ۱ و یا هر عدد ثابت دیگری، در مقابل x ناچیز است. پس اگر x+۱ مخرج کسر را با x تقریب کنیم، مقادیر تابع با $\frac{x}{x}=1$ تقریب می‌گردند، بنابراین مقادیر این تابع برای xهای بزرگ، عددهایی نزدیک ۱ هستند. در نتیجه حدس می‌زنیم که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

آیا استدلال و تفکر شهودی محسن درست است؟

می‌توانید دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با ضابطه‌های $a_n=n$ و $b_n=n^2+1$ را که هر دو به $+\infty$ واگرا هستند، محک بزنید.

در مورد مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}$ چگونه فکر می‌کنید؟

حالت کلی : هرگاه x با مقادیر منفی کوچک و کوچک‌تر شود، آنگاه f(x) به L نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ و گوییم حد تابع f در $-\infty$ برابر L است.

توجه داشته باشید که وقتی x مقادیر منفی را اختیار کند، برای آن‌که مرتب کوچک‌تر شود باید قدرمطلق آن بزرگ‌تر گردد.

تمرین در کلاس

۱ــ مقدارهای $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ را در صورت وجود، حدس بزنید.

۲ــ نمودار تابع f در شکل ۲ــ۱۴ نشان داده شده است :

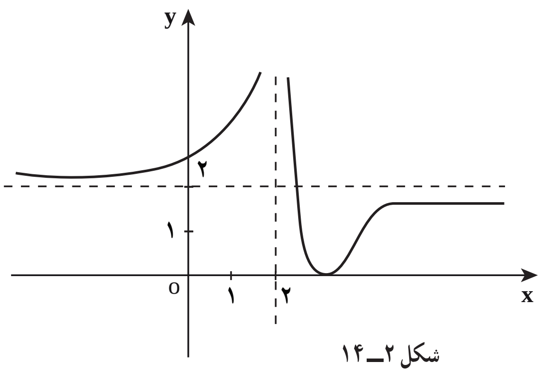
حدهای زیر را حدس بزنید.

الف) $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$



شکل ۲ــ۱۴

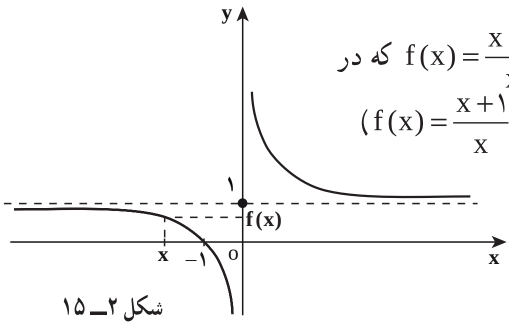
۳ــ تابع $f(x)=\frac{x+1}{x}$ و دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=-10^n$ را درنظر بگیرید.

الف) وقتی x مقادیر این دنباله را طبق جدول زیر اختیار کند f(x) را محاسبه کنید.

a_n	-10	-100	-1000	-10000
$f(a_n)$				

ب) آیا $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وجود دارد؟

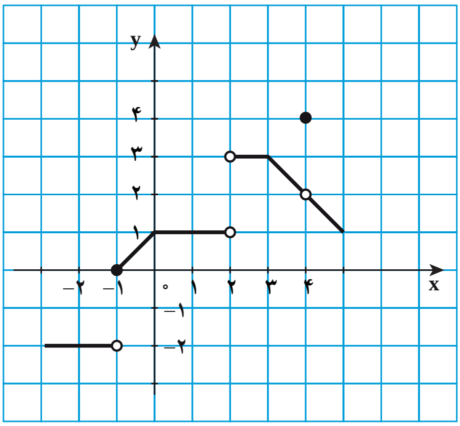
جواب خود را با توجه به نمودار $f(x)=\frac{x+1}{x}$ که در شکل ۲ــ ۱۵ آمده نیز توجیه کنید. $(f(x)=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x})$



شکل ۲ــ ۱۵

مسائل

۱ــ با استفاده از نمودار f که در زیر داده شده است، مقدار هریک از عبارت‌های زیر را، در صورت وجود، مشخص کنید. اگر این مقدار وجود ندارد توضیح دهید که چرا وجود ندارد.



الف) $\lim_{x\to-1} f(x)$

ب) $\lim_{x\to 0} f(x)$

پ) $\lim_{x\to 2} f(x)$

ت) $\lim_{x\to 4} f(x)$

۲ــ تابع هِوی‌ساید (Heaviside) به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$H(t)=\begin{cases}۱\ , & t\geq ۰\\ ۰\ , & t<۰\end{cases}$$

از این تابع در مدارهای الکتریکی برای نشان دادن هجوم ناگهانی جریان الکتریکی، یا ولتاژ، در لحظه زدن کلید استفاده می‌شود.

الف) نمودار تابع هوی‌ساید را رسم کنید.

ب) مقدار عبارت‌های $\lim\limits_{t\to ۰^-} H(t)$ و $\lim\limits_{t\to ۰^+} H(t)$ را مشخص کنید.

۳ــ تابع علامت (یا تابع signum) به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$sgn(x)=\begin{cases}۱ & , \quad x>۰\\ ۰ & , \quad x=۰\\ -۱ & , \quad x<۰\end{cases}$$

الف) نمودار تابع علامت را رسم کنید.

ب) مقدار عبارت‌های $\lim\limits_{x\to ۰^-} sgn(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+} sgn(x)$ را مشخص کنید.

۴ــ نمودار تابع $f(x)=[x]+[-x]$ را رسم نموده و حدهای زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

آیا می‌توان نوشت : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-۱$ ، (به ازای هر a عضو $\mathbb{R}$)؟

۵ــ با رسم نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]}$ در بازه $[-۱,۱]$، مقدار هریک از عبارت‌های زیر را، **در صورت وجود**، مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{x}{[x]}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{x}{[x]}$

([ ] علامت جزء صحیح است.)

۶ــ مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]$ را پیدا کنید.