تابع

برق تولید شده توسط توربین‌های بادی تابعی از سرعت باد است.

$$P(v)=\frac{۸v^{۳}}{۱۲۵}$$

۱. تابع: یادآوری وتکمیل
۲. رسم نمودار توابع
۳. اعمال جبری روی توابع
۴. ترکیب توابع
۵. توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی
۶. توابع یک به یک و توابع وارون
۷. توابع چند جمله‌ای و توابع متناوب
۸. توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

تابع : یادآوری و تکمیل

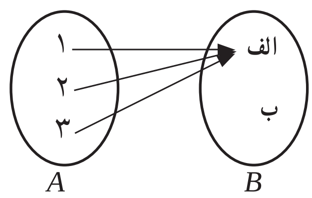
در سال گذشته با مفهوم تابع و برخی از انواع آن و نیز کاربردهایی از تابع آشنا شدید. همان گونه که دیدید یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. در اینجا تعریف تابع را با دقت بیشتری توضیح می‌دهیم.

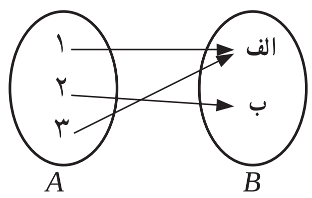
تمرین در کلاس

فرض کنید محصولات یک کارخانه از نظر کیفیت در دو نوع «الف» و «ب» دسته بندی شوند.

الف) چرا رابطه‌ای که به هر محصول، کیفیت آن را نسبت می‌دهد یک تابع است؟

ب) فرض کنید سه محصول ۱، ۲ و ۳ از تولیدات این کارخانه را اختیار کرده‌ایم. در زیر دو تا از توابعی که از A به B می‌تواند برقرار شود را نشان داده‌ایم.





بردهای این دو تابع با هم چه تفاوتی دارند؟

ج) همه توابع ممکن از A به B را با نمودار ون نشان دهید. در کدام‌یک از این توابع برد تابع همان مجموعه B می‌شود؟

تذکر :

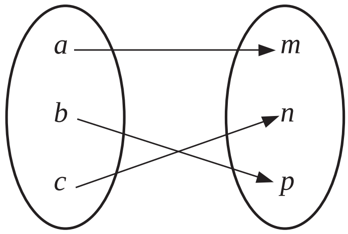
از تعریف تابع نتیجه می‌شود که اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد،

الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

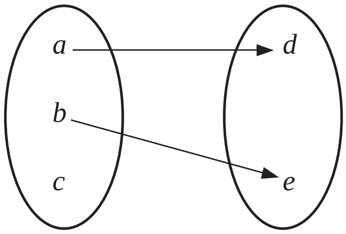
ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان، یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن که اصلاً پیکانی وارد نشود.

تمرین در کلاس

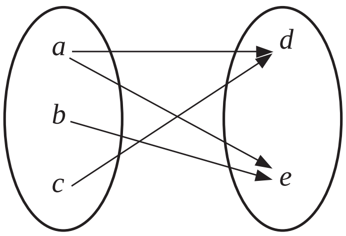
کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می‌کنند؟



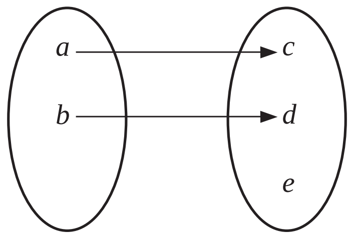
(الف)



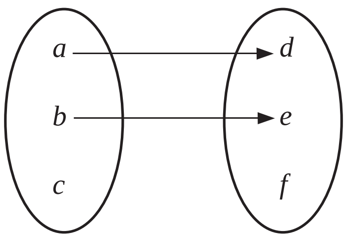
(ب)



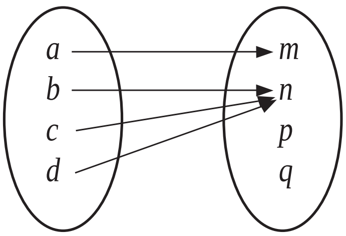
(ج)



(د)



(هـ)



(و)

تذکر :

اگر f تابعی از A به B باشد، دامنه آن A است ولی لزومی ندارد که برد آن همان مجموعه B باشد. مجموعه B را هم دامنه یا مقصد تابع f می نامند. برد یک تابع زیر مجموعه‌ای از هم دامنه آن است و ممکن است مساوی هم دامنه نیز بشود.

فعالیت ۱

۱ــ جدول زیر را کامل کنید و نمودار توابع داده شده را رسم کنید.

تابع	$s(x)=x-۲$	$t(x)=x-۲$	$h(x)=۴x+۱$	$g(x)=x^{۲}$	$f(x)=x^{۲}$
دامنه	[۲,۳]	IR	IR	اعداد حقیقی منفی	اعداد حقیقی مثبت
برد					

۲ــ شباهت‌ها و تفاوت‌های این توابع را مشخص کنید.

به طور کلی اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می‌نویسیم : $f: A \longrightarrow B$

این نمادگذاری نشان می‌دهد که f تابعی با دامنه A و مقادیر در B است، ولی ضابطه f در این نمادگذاری مشخص نمی‌شود و جداگانه باید ارائه شود. به طورمثال تابع g داده شده در فعالیت صفحهٔ قبل را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نمایش داد :

الف) $\begin{array}{l} g: IR^- \longrightarrow IR^+ \\ g(x)=x^2 \end{array}$ یا ب) $\begin{array}{l} g: IR^- \longrightarrow IR \\ g(x)=x^2 \end{array}$

در هر دو نمایش دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی منفی(IR^-) است و در طرف چپ پیکان آمده است. اما در نمایش (الف) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی مثبت (IR^+) است که در طرف راست پیکان آمده است و در نمایش (ب) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی است که در طرف راست پیکان آمده است. در نمایش دوم به جای مجموعه اعداد حقیقی هر مجموعه دیگری را که شامل برد تابع باشد را نیز می‌توان نوشت.

در هر تابع سه ویژگی زیر اهمیت دارند :

۱ــ دامنه ۲ــ هم دامنه ۳ــ دستور یا قانونی که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد.

هنگامی که دستور یا قانون تابع در قالب یک عبارت جبری قابل بیان باشد، آن را یک ضابطه جبری می‌نامیم.

مثال

۱ : همه توابع داده شده در فعالیت قبل دارای ضابطه جبری هستند. توجه داشته باشید که ضابطه یک تابع مشخص نمی‌کند که دامنه آن تابع چه باید باشد و دامنه تابع مستقلاً باید ارائه شود.

۲ : تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{۲-x}$ را اگر با دامنه $[۰,۱]$ در نظر بگیریم، مقدارهای آن نیز در اعداد مثبت می‌باشند، در این صورت می‌توانیم بنویسیم :

$$f:[۰,۱] \longrightarrow (۰,\infty)$$
$$f(x)=\sqrt{۲-x}$$

برد این تابع مجموعه $\left[۱,\sqrt{۲}\right]$ است.

موارد زیادی پیش می‌آید که توابع را صرفاً با ارائه ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه نمی‌شود در این موارد طبق قرارداد دامنه تابع، بزرگترین مجموعه‌ای است که ضابطه ارائه شده، روی آن مجموعه تعریف شده است.

۳ : اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ به عنوان تابع ارائه شده باشد و مستقیماً دامنه ارائه نشده باشد، طبق قرارداد دامنه آن بازه $[-۲,۲]$ است. زیرا این بازه بزرگترین مجموعه‌ای است که ضابطه $\sqrt{۴-x^۲}$ روی آن تعریف شده است.

همچنین دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{۲-x}$ بازه $(-\infty,۲]$ است.

مسائل

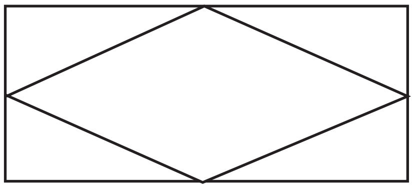
۱ــ اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{p,q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟

۲ــ اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، چند تابع از A به B وجود دارد؟

۳ــ تابعی مثال بزنید که دامنه آن $[-۲\,,+\infty)$ باشد.

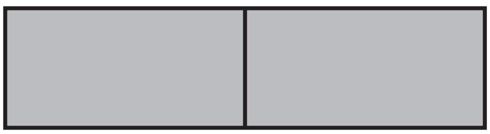
۴ــ دو تابع مانند f و g بسازید که دامنه هر دو برابر $[۲,۵]$ و برد هر دو $[۰,۴]$ و f یک به یک باشد ولی g یک به یک نباشد.

۵ــ در مستطیلی به عرض w و محیط ۴۰ متر یک لوزی محاط شده است. هر رأس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.



۶ــ اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچکتر بیان کنید.

۷ــ با ۱۵۰ متر نرده یک زمین مستطیل شکل را محصور و از وسط با نرده مانند شکل آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. مساحت ناحیه محصور شده را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیابید.



۸ــ توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f:[۱,۲]\to IR$ ، $f(x)=۳x-۱$

ب) $g:[-۵,۵]\to IR$ ، $g(x)=|x|$

۹ــ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲۵ سانتی‌متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن به دست آورید.

۱۰ــ اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=|x|$ درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(۲x)=۲f(x)$

ب) $g(۲x)=۲g(x)$

ج) $f(x+۲)=f(x)+۲$

د) $g(x+۲)=g(x)+۲$

تساوی دو تابع

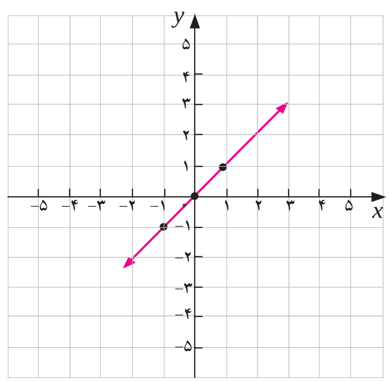
چه وقت دو تابع را مساوی می‌دانیم؟ برای مثال آیا دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{x^2}{x}$ با هم مساویند؟ اگر نمودار این دو تابع را رسم کنیم متوجه می‌شویم از هر نظر بر هم منطبقند غیر از آن که تابع g در صفر تعریف نشده است. همین تفاوت نشان‌دهنده آن است که این دو تابع دامنه یکسانی ندارند، پس نمی‌توانند مساوی باشند.

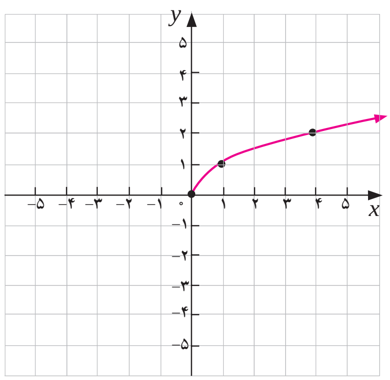
با توجه به ویژگی‌های مشخص کننده یک تابع، دو تابع وقتی با هم برابرند که نمودارهای آن‌ها دقیقاً بر هم منطبق باشند. به عبارت دیگر هیچ نقطه‌ای یافت نشود که به یکی از نمودارها تعلق داشته باشد ولی روی دیگری واقع نباشد.

با توجه به این تعریف، اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشند هنگامی با هم برابرند که مجموعه‌های زوج‌های مرتب داده شده با هم مساوی باشند.

مثال

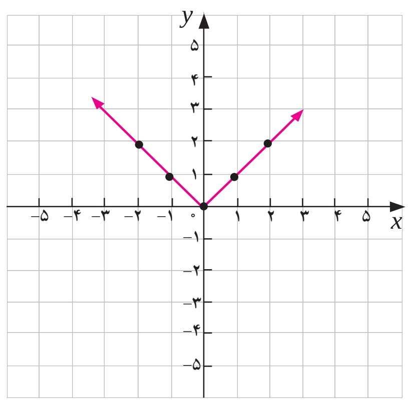
۱ : دو تابع که نمودار آن‌ها در زیر داده شده است مساوی نیستند.

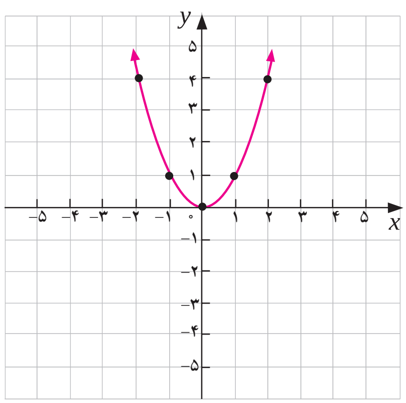




به روشنی دیده می‌شود که این نمودارها یکی نیستند و حتی دامنه و برد این دو تابع با هم فرق می‌کنند.

۲ : دو تابع که نمودار آن‌ها در زیر داده شده است مساوی نیستند.





اگر چه دامنه و برد این دو تابع مساوی هستند، ولی نمودارهای این دو تابع با هم تفاوت دارند که نشان می‌دهد ضابطه آن‌ها با هم فرق می‌کنند. توجه داشته باشید که اگر دو تابع دارای دامنه‌ها و بردهای یکسان باشند، لزوماً با هم برابر نیستند.

تعریف:

دو تابع f و g را مساوی نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه f (یا g) $\quad f(x)=g(x)$

تمرین در کلاس

در کدام سطر دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف)	$f=\{(۱,۲),(۵,۹)\}$	$g=\{(۱,۵),(۲,۹)\}$
ب)	$f:IR\longrightarrow IR$ $f(x)=x$	$g:IR\longrightarrow IR$ $g(x)=x^۲$
ج)	$f:[۱,۲]\longrightarrow[۱,۴]$ $f(x)=x^۲$	$g:IR\longrightarrow IR$ $g(x)=x^۲$
د)	$f=\{(a,b),(c,d),(e,f)\}$	$g=\{(e,f),(a,b),(c,d)\}$
هـ)	$f(x)=x+۱$	$g(x)=\dfrac{۲x+۲}{۲}$
و)	$f(x)=\tan x$	$g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$
ز)	$f(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$	$g(x)=x+۲$

توابع چند ضابطه‌ای

فعالیت ۲

یک شرکت حمل و نقل کالا برای محاسبه هزینه حمل کالا، به شکل زیر عمل می‌کند. این شرکت در صورتی که وزن کل از ۲ تن کمتر باشد، به ازای هر کیلوگرم دو تومان کرایه دریافت می‌کند، اگر وزن کالا حداقل ۲ تن ولی از ۳ تن کمتر باشد، شرکت به ازای هر کیلوگرم ۳ تومان و در صورتی که وزن کالا لااقل ۳ تن و حداکثر ۵ تن باشد، شرکت برای هر کیلوگرم ۴ تومان دریافت می‌کند.

الف)کرایه حمل کالایی که ۲/۵ تن وزن دارد چقدر است؟

ب) جدول زیر را کامل کنید :

کرایه حمل	وزن کالا x
$۲x$	$۰ \le x < ۲۰۰۰$
...	...
...	...

ج) این جدول تابعی را مشخص می‌کند. نمودار این تابع را با انتخاب مقیاس مناسب رسم کنید.

د) اگر این تابع را f بنامیم با استفاده از (ب) ضابطه تابع را به طور کامل بنویسید.

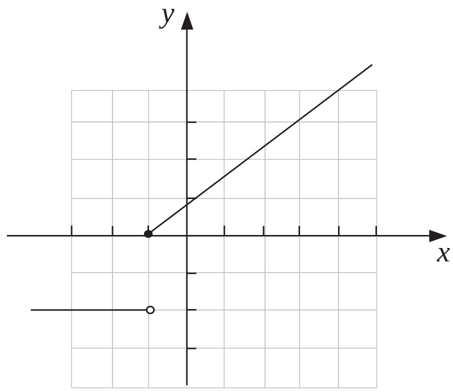
$$f(x)=\begin{cases} ۲x & ۰ \le x < ۲۰۰۰ \\ ..... & ۲۰۰۰ \le x < ۳۰۰۰ \\ ..... & ۳۰۰۰ \le x \le ۵۰۰۰ \end{cases}$$

توابعی که در بخش‌های مختلف از دامنه آن، با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند توابع چند ضابطه‌ای می‌نامند. قبلاً با نمونه‌هایی از این توابع برخورد داشته‌اید. برای مثال تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$ یک تابع چند ضابطه‌ای است که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت.

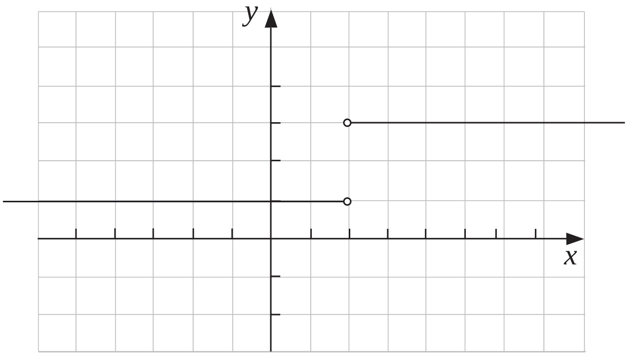
$$f(x)=\begin{cases} -x & x<۰ \\ x & ۰ \le x \end{cases}$$

تمرین در کلاس

۱ــ در زیر نمودارهای دو تابع داده شده است. ضابطه‌های آن‌ها را بیابید و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

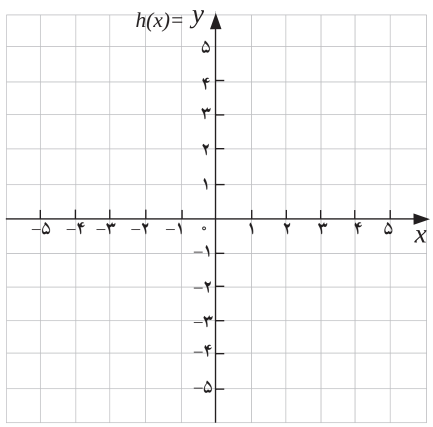


(الف)



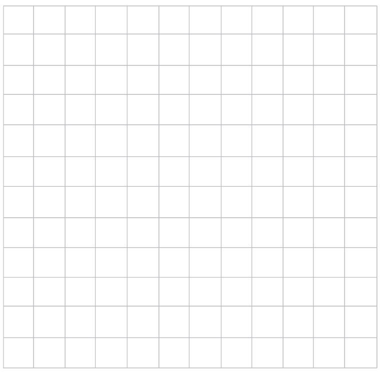
(ب)

۲ــ نمودار توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را بیابید.



$$h(x)=\begin{cases} -2x-3 & x<1 \\ x-4 & 1\leq x\leq 2 \\ x+2 & 2<x \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 2+x^2 & x\leq 0 \\ x^2 & 0<x \end{cases}$$



معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x,y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. برخی از این روابط، ضابطه تابعی را معلوم می‌کنند. بسیاری از توابع از طریق یک معادله ارائه می‌شوند اما توجه داشته باشید این‌طور نیست که یک معادله دو متغیره بر حسب x,y حتماً ضابطه یک تابع را نشان بدهد.

مثال

۱ : معادله $x^{2}+y=1$ یک تابع y بر حسب x را نشان می‌دهد. در این‌گونه موارد مناسب است که y را برحسب x به‌دست آوریم :

$$x^{2}+y=1 \Rightarrow y=1-x^{2}$$

می‌بینیم که برای مقدار دلخواه x دقیقاً یک مقدار برای y وجود دارد و در نتیجه y به صورت تابعی از x به دست می‌آید.

۲ : معادله $-x+y^{2}=1$ یک تابع y برحسب x را نشان نمی‌دهد. زیرا با حل این معادله و با یافتن y بر حسب x مقدار یکتایی برای y به دست نمی‌آید.

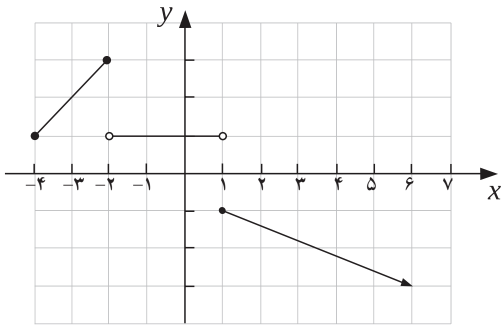
$$-x+y^{2}=1 \Rightarrow y^{2}=1+x \Rightarrow y=\pm\sqrt{1+x}$$

برای مثال به ازای $x=8$ داریم $y=\pm 3$ یعنی زوج‌های مرتب $(8,3)$ و $(8,-3)$ روی نمودار این معادله قرار دارند. بنابراین این معادله نمی‌تواند ضابطه یک تابع را نشان دهد (چرا؟).

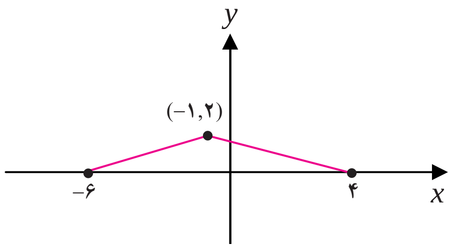
مسائل

۱ــ تابع $f(x)=|x+1|+|x-1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

۲ــ دامنه و برد هر یک از توابع چند ضابطه‌ای زیر را بیابید و ضابطه هر کدام را بنویسید.

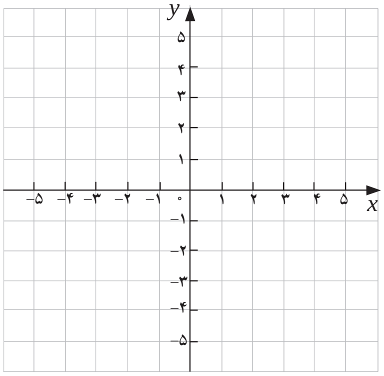


(الف)



(ب)

۳ـ اگر



$$f(x)=\begin{cases} -۵x-۸ & x<-۲ \\ \frac{۱}{۲}x+۵ & -۲\leq x\leq ۴ \\ ۱۰-۲x & ۴<x \end{cases}$$

مقدارهای $f(۶)$، $f(۴)$، $f(-۴)$، $f(۰)$ را حساب کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

۴ـ تابعی چند ضابطه‌ای مانند f بنویسید که در تمام شرایط زیر صدق کند، سپس نمودار f را رسم کنید.

الف) دامنه $f=[-۳,۵]$ و برد $f=[-۲,۷]$

ب) $f(۰)=۳$

ج) f یک به یک نباشد.

۵ـ کدام‌یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند.

الف) $x^۲+y^۲=۲۵$

ب) $y=\begin{cases} x+۳ & x\leq ۰ \\ x-۱ & x>۰ \end{cases}$

ج) $y=|x|+۱$

د) $x=|y|+۱$

هـ) $y^۲=x^۲$

و) $x=۱$

۶ـ تابع f با مشخصات زیر داده شده است.

الف) $f(۲)=۳$ و $f(-۵)=-۲$

ب) دامنه f برابر همه اعداد حقیقی است.

ج) تابع f در بازه $[۰,۲]$ ثابت است.

د) تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

هـ) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور xها را در نقطه ۳- قطع می‌کند.

تابع f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

۷ـ کدام‌یک از زوج توابع داده شده با هم مساویند؟

الف) $f(x)=\sqrt{x^۲}$ ، $g(x)=|x|$

ب) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳ \\ ۵ & x=۳ \end{cases}$ ، $g(x)=x+۳$

ج) $f(x)=\begin{cases} x & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$ ، $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{۲}-۲x}{x-۲} & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$

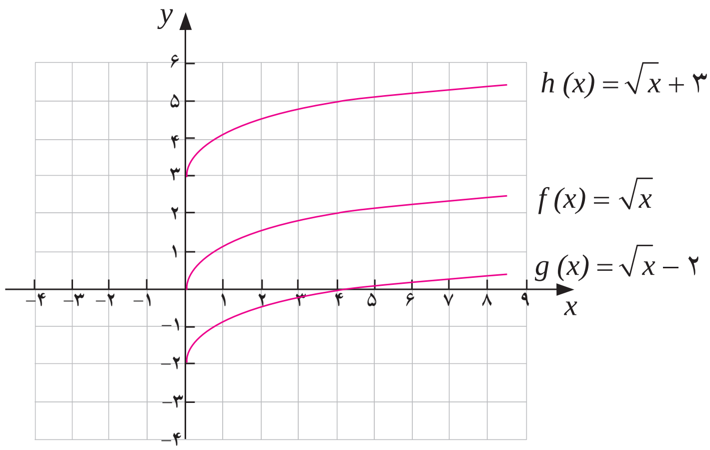
د) $f(x)=\dfrac{x^{۲}}{۱+\sqrt{۱+x^{۲}}}$ ، $g(x)=\sqrt{۱+x^{۲}}-۱$

رسم نمودار توابع

سال قبل دیدیم که با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می‌توانیم نمودار تابع $f(x)+a$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه a واحد در امتداد محور yها به دست آورد. اگر $a>۰$، انتقال در جهت مثبت و اگر $a<۰$، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

مثال

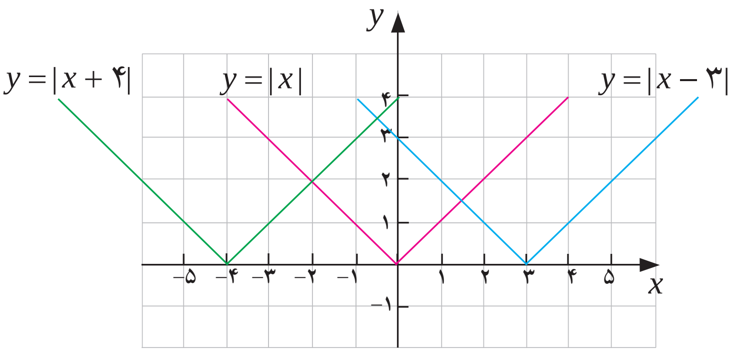
۱ : در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $h(x)=\sqrt{x}+۳$ و $g(x)=\sqrt{x}-۲$ رسم شده است.



همچنین به کمک مثال‌هایی مشاهده کردید که برای رسم نمودار تابع $y=f(x-a)$ کافی است که نمودار $y=f(x)$ را a واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $a>۰$ ، انتقال در جهت مثبت و اگر $a<۰$ انتقال در جهت منفی خواهد بود.

مثال

۲ : نمودار توابع $y=|x|$ و $y=|x+۴|$ و $y=|x-۳|$ در شکل زیر رسم شده‌اند.



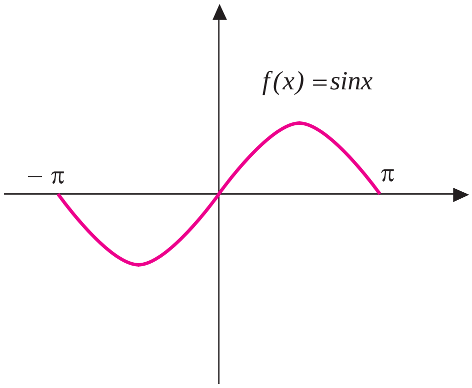
در این‌جا می‌خواهیم با رسم نمودار توابع دیگری که از یک تابع داده شده مانند $f(x)$ ساخته شده‌اند آشنا شویم.

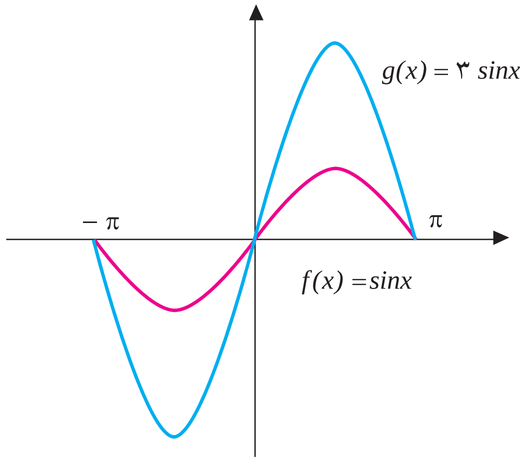
رسم نمودار $af(x)$

فعالیت ۳

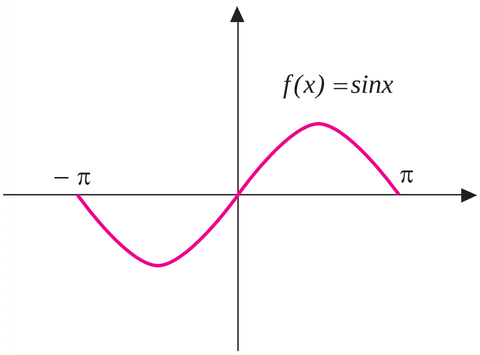
۱ــ تابع $f(x)=\sin x$ داده شده است. تابع $g(x)$ را به صورت $g(x)=۳f(x)$ تعریف می کنیم. نمودارهای این دو تابع در شکل‌های زیر در بازه $[-\pi , \pi]$ رسم شده‌اند. با تکمیل جدول توضیح دهید که نمودارها چگونه رسم شده‌اند. دامنه‌ها و بردهای دو تابع را با هم مقایسه کنید.

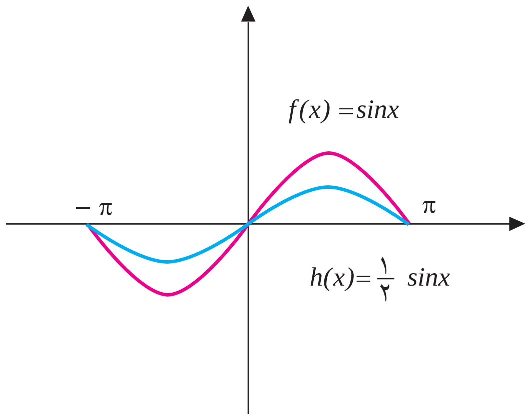
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π
$\sin x$			۰	۱	
$۳\sin x$			۰	۳	



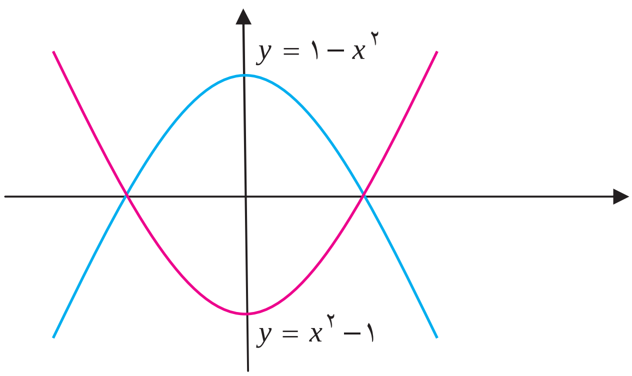


۲ــ نمودار تابع $h(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$ نیز در بازه $[-\pi , \pi]$ رسم شده است. نمودار $h(x)$ چگونه از نمودار $f(x)$ به دست می‌آید؟





نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=-f(x)$ نسبت به محور xها قرینه یکدیگرند. برای مثال نمودار دو تابع زیر قرینه یکدیگرند.



عمارت ایل گلی ــ تبریز

تذکر :

نمودار تابع $y=af(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به روش زیر به دست می‌آید :

الف) اگر $a>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a کشیده می‌شود (انبساط عمودی).

ب) اگر $0<a<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a جمع می‌شود (انقباض عمودی).

ج) اگر $a<0$، ابتدا نمودار f نسبت به محور xها آینه‌وار منعکس می‌شود، سپس با ضریب $|a|$ به‌طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.

تمرین در کلاس

۱ــ دامنه‌های دو تابع $y=f(x)$ و $y=af(x)$ یکی است. در مورد بردهای این دو تابع چه می‌توانید بگویید؟

۲ــ نمودار تابع $f(x)=|x+2|$ را در بازه $[-4,3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $f(x)=-|x+2|$ و $f(x)=\frac{1}{4}|x+2|$ و $f(x)=-2|x+2|$ را رسم کنید.

رسم نمودار $f(ax)$

فعالیت ۴

۱ــ تابع $f(x)=1-|x|$ را با دامنه $[-1,1]$ در نظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) دامنهٔ تابع $f(2x)$ را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

ب) دامنهٔ توابع $f(3x)$ و $f(\frac{1}{3}x)$ را به دست آورید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

۲ــ اگر $a>0$ در مورد رابطهٔ بین دامنه و نمودار تابع $f(ax)$ با دامنه و نمودار تابع $f(x)$ چه حدس می‌زنید؟

مثال

تابع $f(x)=x+4$ را با دامنه $[-4,0]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی توابع $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ را بررسی می‌کنیم.

روشن است که $f(2x)=2x+4$. برای تشخیص دامنه تابع جدید $f(2x)=2x+4$ مقدار x باید به گونه‌ای باشد که $-4\le 2x\le 0$ ، یعنی $-2\le x\le 0$. در نتیجه دامنه تابع $f(2x)$ بازه $[-2,0]$ می‌باشد.

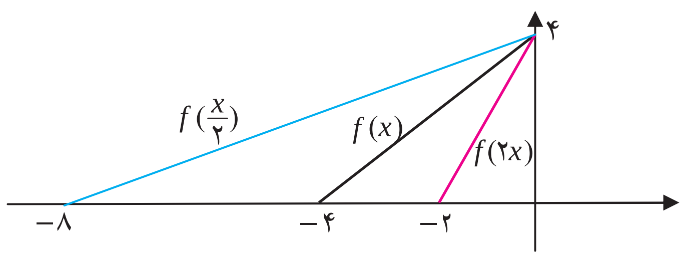
برای تابع $f(\frac{x}{۲})$ داریم $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۴$ و دامنه این تابع آن مقدارهایی برای x است که داشته باشیم $۰\leq\frac{x}{۲}\leq-۴$ ، یعنی $-۸\leq x\leq۰$. در نتیجه دامنه تابع $f(\frac{x}{۲})$ بازه $[-۸, ۰]$ می‌باشد.

جدول این سه تابع (برای برخی از نقاط) و نمودارهای آن‌ها به شکل زیر است :

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
$f(x)=x+۴$	۰	۱	۲	۳	۴

x	-۲	$-۱/۵$	-۱	$-۰/۵$	۰
$f(۲x)=۲x+۴$	۰	۱	۲	۳	۴

x	-۸	-۶	-۴	-۲	۰
$f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۴$	۰	۱	۲	۳	۴



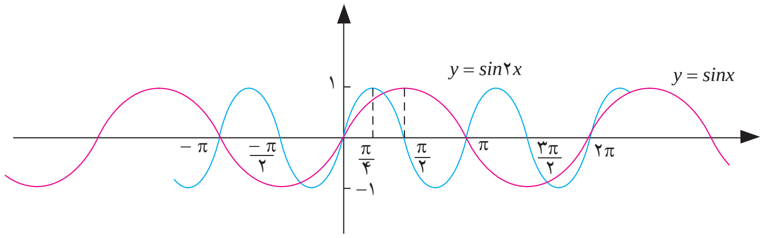
همان‌طور که در شکل دیده می‌شود نمودار $f(۲x)$ با انقباض نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها (با ضریب ۱/۲) و نمودار $f(\frac{x}{۲})$ با انبساط نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها (با ضریب ۲) به دست آمده است.

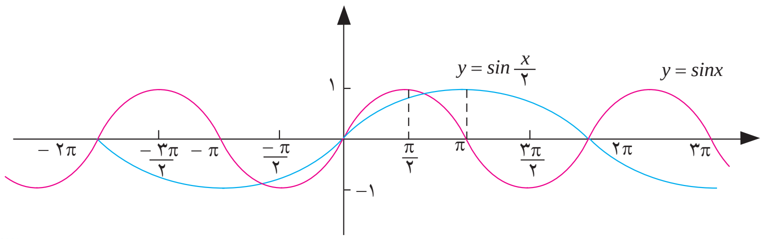
تذکر :

اگر $a>۰$ ، نمودار $y=f(ax)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به دست آورد. در حالتی که $a>۱$ نمودار $y=f(x)$ منقبض با ضریب $\frac{۱}{a}$ ، و در حالتی که $۰<a<۱$ نمودار $y=f(x)$ منبسط با ضریب $\frac{۱}{a}$ خواهد شد.

مثال

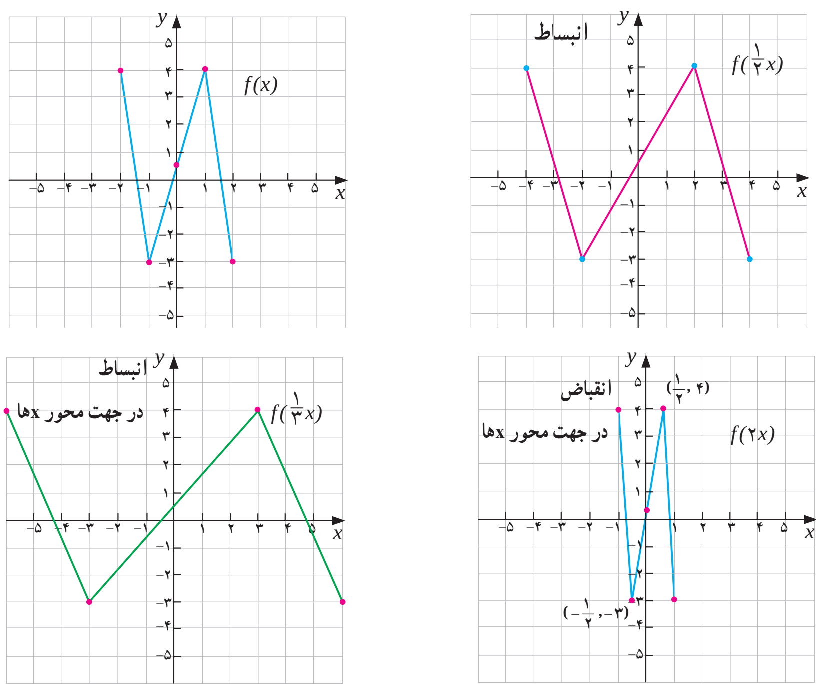
درشکل‌های زیر نمودارهای تابع $y=\sin ۲x$ و $y=\sin\frac{x}{۲}$ به کمک نمودار $y=\sin x$ رسم شده‌اند.
همان‌طور که دیده می‌شود نمودار $y=\sin ۲x$ با فشرده‌شدن (انقباض) نمودار $y=\sin x$ در امتداد محور xها و نمودار $y=\sin\frac{x}{۲}$ با کشیده‌شدن (انبساط) نمودار $y=\sin x$ در امتداد محورxها به دست آمده است.





مثال

نمودار تابع $f(x)$ و توابع $f(۲x)$ ، $f(\frac{۱}{۲}x)$ ، $f(\frac{۱}{۳}x)$ در زیر رسم شده‌اند.



همان‌طور که در نمودارها دیده می‌شود برد توابع $f(۲x)$ ، $f(\frac{۱}{۲}x)$ ، $f(\frac{۱}{۳}x)$ همان برد تابع $f(x)$ است، اما دامنه‌ها کشیده‌تر (منبسط) یا جمع تر (منقبض) شده است.

فعالیت ۵

۱ــ با در نظرگیری $f(x)=x+۱$ ، ضابطهٔ تابع $f(-x)$ را به دست آورید و نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۲ــ نمودار این دو تابع چه وضعیتی با هم دارند.

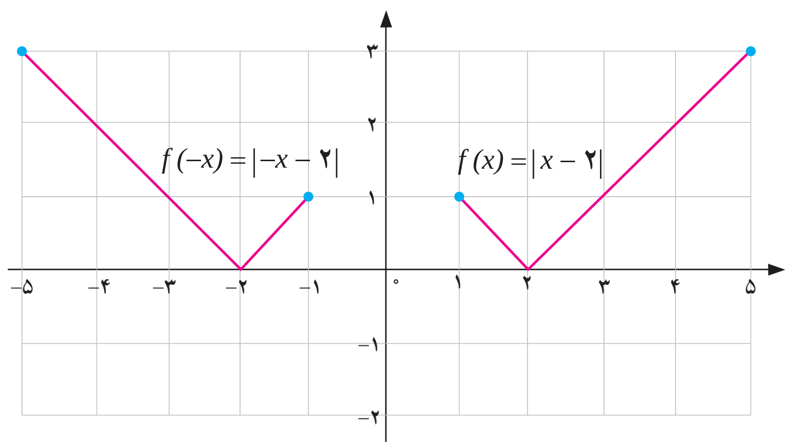
۳ــ برای تابع $g(x)=x^۲-x$ نیز تابع $g(-x)$ را بسازید و نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت این دو نمودار را نسبت به هم بسنجید.

قضیه :

نمودار تابع $f(-x)$ قرینه نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور yها است.

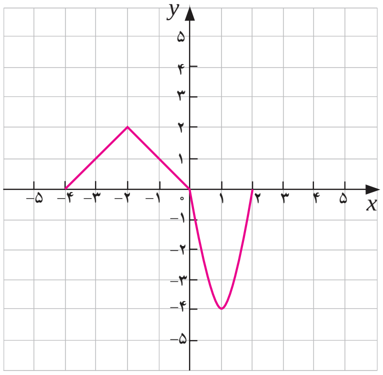
مثال

نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ در بازه $[۱,۵]$ در سمت راست و نمودار $f(-x)=|-x-۲|$ در سمت چپ شکل زیر رسم شده است. (توجه داریم که $|-x-۲|=|x+۲|$)



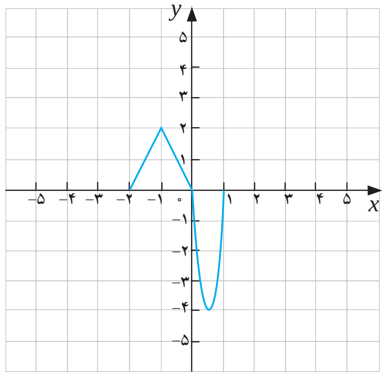
همان‌طور که دیده می‌شود نمودار $f(x)$ و $f(-x)$ نسبت به محور yها قرینه یکدیگرند.

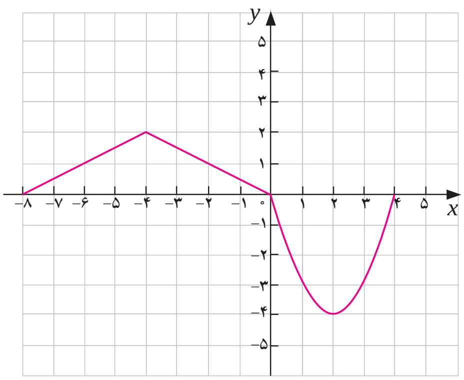
تمرین در کلاس

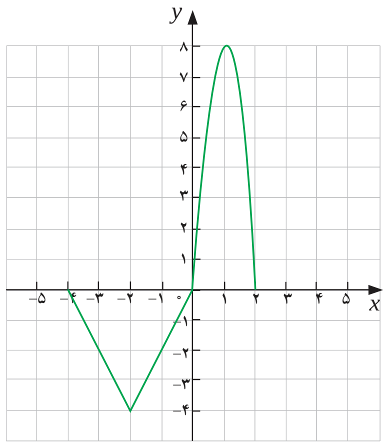


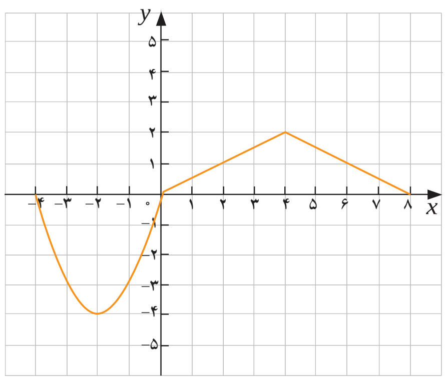
۱ــ نمودار تابع $g(x)$ به شکل مقابل داده شده است.

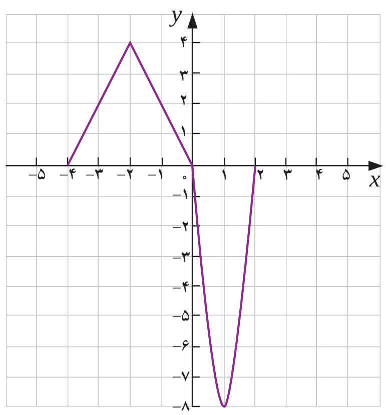
به کمک این نمودار، نمودار توابع $2g(x)$، $g(2x)$ و $g(\frac{1}{2}x)$، $g(-\frac{1}{2}x)$ و $-2g(x)$ رسم شده‌اند. تعیین کنید که هر یک از نمودارهای زیر نمودار کدام‌یک از این توابع هستند؟



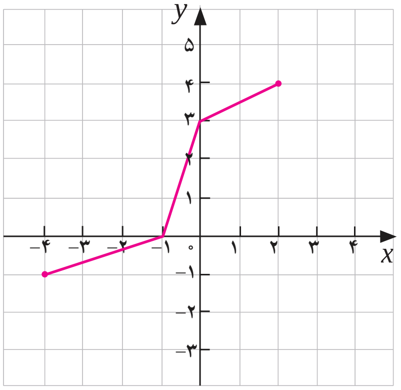




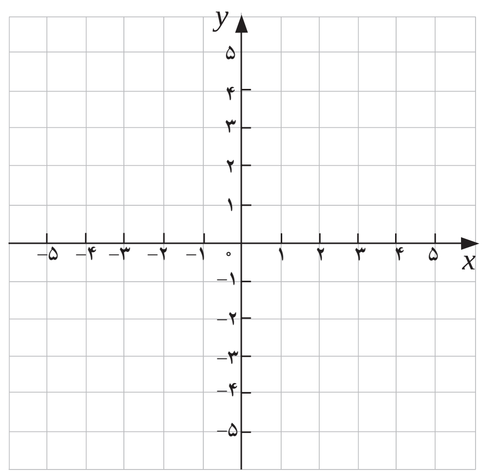




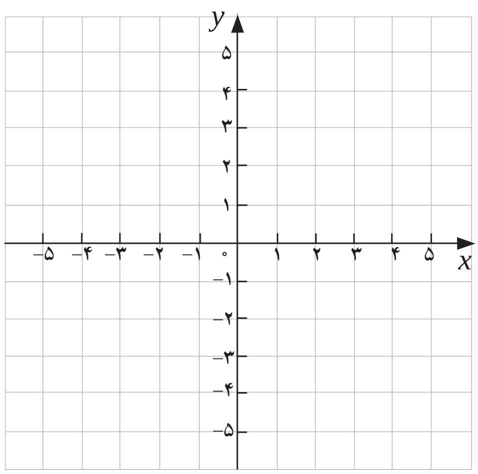
۲ــ نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل داده شده است.



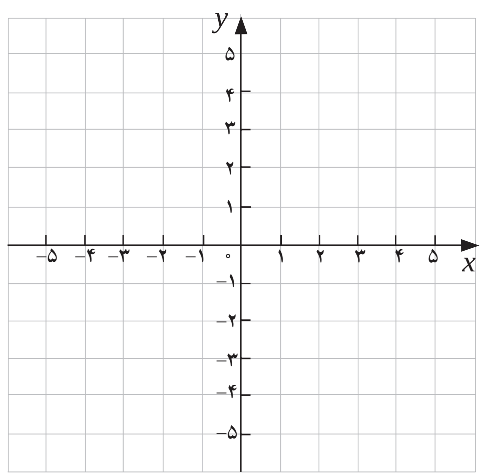
نمودار توابع داده شده زیر را رسم کنید.



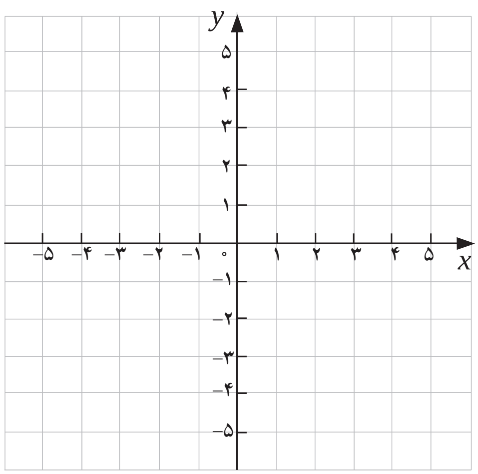
$y = f(\frac{۱}{۲}x)$



$y = -f(x-۱)$



$y = f(-\frac{۱}{۲}x)$

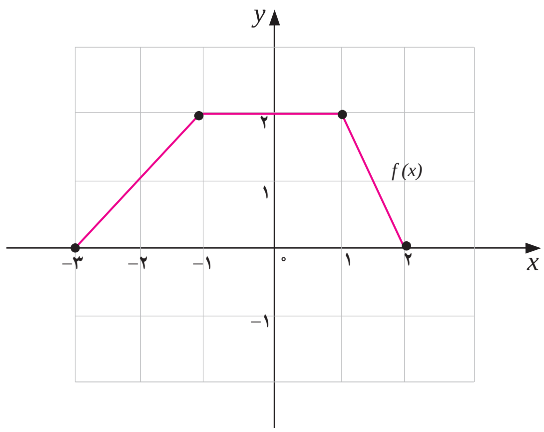


$y = f(۲x)$

مسائل

۱ــ ابتدا نمودار $f(x)=|x|$ را رسم کنید و به کمک آن نمودار $y=-۳|x-۱|+۲$ را رسم کنید.

۲ــ نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر داده شده است. به کمک این نمودار، نمودار تابع داده شده را رسم کنید.



الف) $g(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$

ب) $g(x)=f(-x)$

ج) $g(x)=f(۳x)$

د) $g(x)=f(-\frac{۱}{۲}x)$

هـ) $g(x)=-۲f(x)$

و) $g(x)=f(x+۲)$

۳ــ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}|x| & -۱\leq x\leq ۱\\ \sqrt{x-۱} & x>۱\end{cases}$$

به کمک نمودار $f(x)$ نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(-۲x)$ و $y=-f(۲x)$ را رسم کنید.

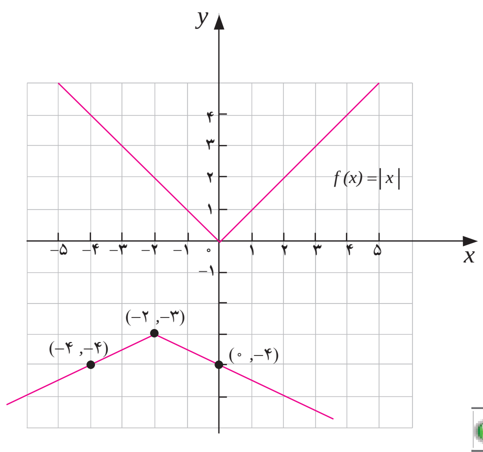
۴ــ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=|x+۳|-۳$ ، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست و سپس انتقال سه واحد به پایین به دست آورد.

ب) $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{-x}$ دارای نمودارهای یکسانی هستند.

ج) اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=-(x-۲)^۲+۴$ آن‌گاه نمودار g را می‌توان از نمودار f با یک تغییر مکان به میزان دو واحد به راست، سپس انعکاس نسبت به محور xها و ۴ واحد تغییر مکان به سمت بالا به دست آورد.

۵ــ در شکل روبه‌رو نمودار توابع g و f در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. اگر g از طریق تعدادی عملیات (انبساط و انقباض و انتقال و قرینه) روی f به دست آمده باشد معادله‌ای برای g بیابید.



۶ــ نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها، انعکاس داده‌ایم، سپس آن را سه واحد در جهت راست و بعد ۵ واحد به پایین حرکت داده‌ایم. ضابطه تابع به دست آمده را بنویسید.

۷ــ نقطه $(-۸,۶)$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. این نقطه با چه نقطه‌ای از نمودار توابع زیر متناظر می‌شود؟

الف) $g(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$ ب) $g(x)=f(-x)$

ج) $g(x)=f(x)-۳$ د) $g(x)=۳f(x)$

۸ــ در هر مورد توضیح دهید که نمودار g چگونه از نمودار f به دست می‌آید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}\quad , \quad g(x)=-\frac{۱}{۲}\sqrt{x-۱}+۳$

ب) $f(x)=x^{۲}\quad , \quad g(x)=-۲(x+۴)^{۲}-۳$

ج) $f(x)=|x|\quad , \quad g(x)=-۲\left|x-\frac{۱}{۳}\right|+۱$

۹ــ اگر $f(x)=\cos x$ مطلوب‌است نمودار $f(-x), -f(x), f(\frac{۱}{۲}x), f(۲x)$.

۱۰ــ نمودار دو تابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دامنه این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ برد این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ جواب به این سؤالات در مورد دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ چه خواهد بود؟

۱۱ــ اگر $a<۰$ ، نمودار تابع $f(ax)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه ساخته می‌شود؟

اعمال جبری روی توابع

فعالیت ۶

یک حوض آب با دو شیر آب متفاوت پر می‌شود. از شیر اول در هر ثانیه $\frac{۱}{۲}$ لیتر و از شیر دوم در هر ثانیه ۱ لیتر آب خارج می‌شود. در لحظه $t=۰$ حوض خالی است و دو شیر را با هم باز می‌کنیم.

۱ــ جدول زیر را که حجم آب موجود در حوض و آب‌های خارج شده از دو شیر را در برخی لحظات نشان می‌دهد تکمیل کنید. زمان بر حسب ثانیه و حجم بر حسب لیتر است.

t	$\frac{۱}{۲}$	۲	۳	$\frac{۷}{۲}$	۴	۵
حجم آب خارج شده از شیر اول						
حجم آب خارج شده از شیر دوم						
حجم آب موجود در حوض						