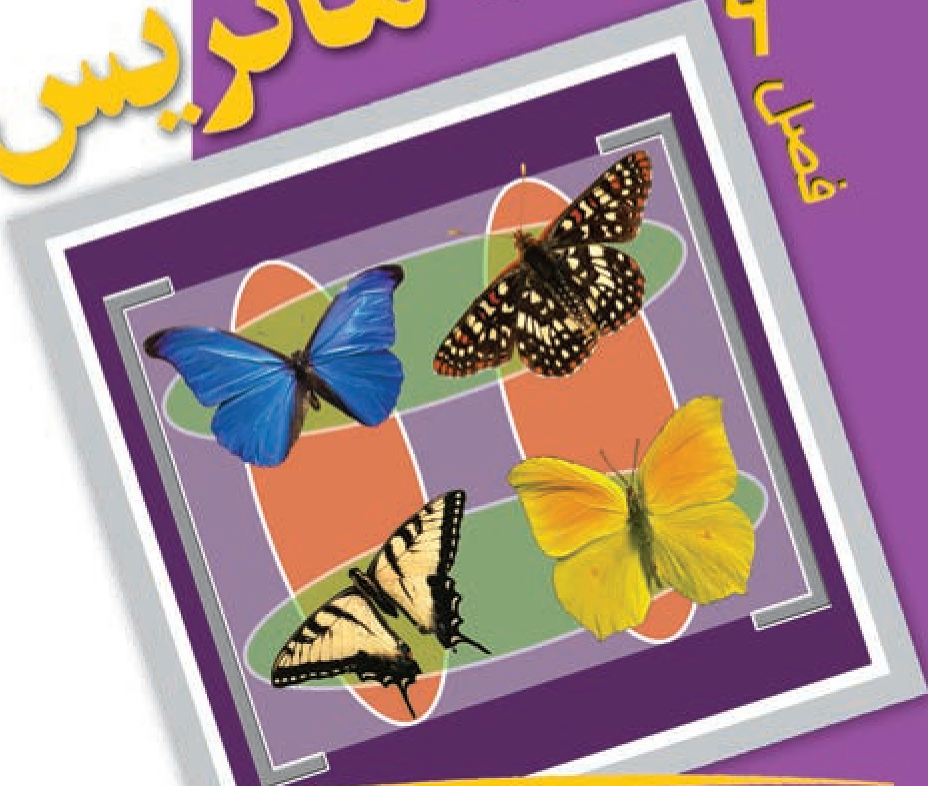
فصل ۶

ماتریس



میوه‌فروشی وزن (برحسب کیلوگرم) میوه‌هایی را که در روزهای مختلف هفته جهت فروش عرضه کرده، به صورت زیر دسته‌بندی کرده است.

	سیب	پرتقال
یک‌شنبه	۸۰	۲۲۵
سه‌شنبه	۱۱۰	۲۵۰
پنجشنبه	۱۰۵	۲۲۵

	سیب	پرتقال
شنبه	۲۴۰	۴۸۰
دوشنبه	۱۸۰	۳۲۰
چهارشنبه	۳۰۰	۵۶۰
جمعه	۱۷۰	۲۰۰

اطلاعات فوق را می‌توان به صورت آرایشی از اعداد نشان داد.

$$\begin{bmatrix} ۲۲۵ & ۸۰ \\ ۲۵۰ & ۱۱۰ \\ ۲۲۵ & ۱۰۵ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۴۸۰ & ۲۴۰ \\ ۳۲۰ & ۱۸۰ \\ ۵۶۰ & ۳۰۰ \\ ۲۰۰ & ۱۷۰ \end{bmatrix}$$

آرایش فوق از اعداد را یک ماتریس و هریک از اعداد را درایه‌ی ماتریس می‌نامند.

معمولاً ماتریس را با حروف بزرگ A ، B ، C و .... نشان می‌دهند.

مثال

ماتریس مقابل ماتریسی با سه سطر و سه ستون است.

درایه‌ی ۴ در سطر سوم و ستون دوم واقع است.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{r} \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \\ \text{سطر سوم} \end{array} & \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۷ \\ ۱۱ & -۱ & ۶ \\ ۰ & ۴ & ۱ \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \end{array} \end{array}$$

یک ماتریس با m سطر و n ستون یک ماتریس از مرتبه‌ی $m \times n$ (بخوانید ماتریس m سطر در n ستون و یا به‌طور خلاصه ماتریس m در n) است. ماتریس مثال قبل یک ماتریس از مرتبه‌ی ۳×۳ (سه در سه) است.

در صورتی که تعداد سطرها و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، یعنی $m = n$ باشد، ماتریس را مربعی می‌نامند.

مثال

مثالی از یک ماتریس با مرتبه‌ی ۳×۲ به صورت زیر است که در آن عدد ۷ درایه‌ای است که در سطر دوم و ستون اول واقع شده است.

$$\begin{array}{cc} \text{دو سطر} & \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & -۲ \\ ۷ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} \\ & \text{سه ستون} \end{array}$$

تمرین در کلاس

جای هریک از درایه‌های ماتریس بالا را مشخص کنید.

مثال

در جدول‌های زیر موجودی حساب جاری پس‌انداز حسن و احمد در بانک ملی و بانک کشاورزی داده شده است.

موجودی احمد

	جاری	پس‌انداز
ملی	۶۰۰۰۰	۵۰۰۰۰
کشاورزی	۴۰۰۰۰	۹۰۰۰۰

موجودی حسن

	جاری	پس‌انداز
ملی	۷۰۰۰۰	۸۰۰۰۰
کشاورزی	۱۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰

موجودی حسن و احمد را در ماتریس‌هایی به صورت زیر می‌توان نشان داد :

$$\begin{bmatrix} ۶۰۰۰۰ & ۵۰۰۰۰ \\ ۴۰۰۰۰ & ۹۰۰۰۰ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۷۰۰۰۰ & ۸۰۰۰۰ \\ ۱۰۰۰۰۰ & ۹۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

ماتریسی که فقط یک سطر دارد را ماتریس سطری و ماتریسی که فقط یک ستون دارد را ماتریس ستونی می‌نامیم.

مثال

$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$ یک ماتریس سطری و $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی است.

در هریک از ماتریس‌های داده شده، سطرها در ستون‌ها را مانند نمونه‌ی زیر مشخص کنید و مرتبه‌ی ماتریس را بنویسید.

$$A_{۲\times۳} = \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \end{array}$$
$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۷ \\ ۲ & ۶ & ۳ \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{سطراول} \\ \text{سطردوم} \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -۵ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۱ & ۰ \\ -۵ & ۶ \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۵ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \\ ۳ \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

در هر یک از ماتریس‌های فوق درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون اول را مشخص کنید.

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ درایه‌ی $a_{۱۱}$ درایه‌ای است که در سطر اول و ستون اول جای دارد و $a_{۲۱}$ درایه‌ای است که سطر دوم و ستون اول را مشخص می‌کند.

مثال

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۷ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ هریک از درایه‌ها را مشخص کنید.

$a_{۱۱} = ۲ \qquad a_{۱۲} = ۷ \qquad a_{۲۱} = ۵ \qquad a_{۲۲} = ۱$

در ماتریس $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ هریک از درایه‌های a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , a_{31} , a_{32} را مشخص کنید.

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس مساوی‌اند اگر هم‌مرتبه باشند و علاوه بر آن درایه‌های دو ماتریس نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۱– مانند مثال‌های بالا شما هم سه مثال از تساوی و عدم تساوی دو ماتریس بنویسید.

۲– x و y را طوری بیابید که دو ماتریس زیر برابر باشند.

$$\begin{bmatrix} x+5 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 2+y \end{bmatrix}$$

۳– مقادیر x و y و z را در عبارات زیر به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2x+7 & y-2 \\ 0 & 4z+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[2 \quad x-1 \quad y+4 \quad 5] = [2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]$$

جمع دو ماتریس

به مثال میوه‌فروش باز می‌گردیم. مصرف میوه برحسب کیلوگرم در دو هفته‌ی متوالی و در روزهای شنبه و سه‌شنبه خانواده‌ای به صورت جدول‌های زیر است.

سیب	پرتقال	
۴	۵	شنبه
۶	۳	سه‌شنبه

هفته‌ی دوم

سیب	پرتقال	
۵	۸	شنبه
۴	۷	سه‌شنبه

هفته‌ی اول

که می‌توان آن‌ها را به شکل ماتریس نوشت.

$B_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}$ مصرف هفته‌ی دوم

$A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۸ & ۵\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}$ مصرف هفته‌ی اول

میزان مصرف میوه‌ی این خانواده در دو هفته مجموعاً عبارت خواهد بود از جمع دو ماتریس A و B :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}\text{پرتقال} & \text{سیب} & \text{پرتقال} & \text{سیب} & \text{پرتقال} & \text{سیب}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{شنبه}\\ \text{سه‌شنبه}\end{array} & A+B=\begin{bmatrix}۸ & ۵\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸+۵ & ۵+۴\\ ۷+۳ & ۴+۶\end{bmatrix}\end{array}$$

دو ماتریس که دارای تعداد سطرهای برابر و تعداد ستون‌های برابر باشند را می‌توان با هم جمع کرد. به این صورت که درایه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس با هم جمع می‌شوند.

مثال

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۷ & ۵ \\ -۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۶ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۱۱ & ۶ \\ ۰ & ۶ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۵ & -۷ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

به هر ماتریس مانند $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ که درایه‌های آن همگی صفر هستند، ماتریس صفر می‌گوییم و آن را با نماد $O_{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

مثال

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۵ \\ ۱ & ۹ \\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۴} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۴ & ۵ \\ -۱ & -۹ \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = O_{۳\times ۲}$ که ماتریسی با سه سطر و دو ستون است را نیز ماتریس صفر می‌نامند.

مانند جمع دو ماتریس، تفاضل دو ماتریس در صورتی که ماتریس‌ها هم‌مرتبه باشند، امکان‌پذیر است.

مثال

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱۱ & ۶ \\ ۴ & ۳ & -۱ \\ ۵ & ۹ & ۷ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-۱ & ۱۱-۲ & ۶-۰ \\ ۴-۲ & ۳-۳ & -۱+۱ \\ ۵-۳ & ۹-۱ & ۷-۶ \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس

حاصل ضرب عدد حقیقی k در ماتریس با مرتبه‌ی $m\times n$ ، ماتریسی با مرتبه‌ی $m\times n$ است که هریک از درایه‌های آن برابر حاصل‌ضرب عدد k در درایه نظیر در ماتریس اولیه است.

مثال

ماتریس $A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۵\\ -۷ & ۴ & ۱\end{bmatrix}$ و $k=۲$ را درنظر بگیرید. ماتریس kA عبارت است از :

$$k\times A_{۲\times۳}=۲\times\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۵\\ -۷ & ۴ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\times۲ & ۲\times۰ & ۲\times۵\\ ۲\times(-۷) & ۲\times۴ & ۲\times۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۱۰\\ -۱۴ & ۸ & ۲\end{bmatrix}$$

ماتریس $A_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۲ & -۳ & ۱\\ ۵ & ۴ & ۲\\ ۱ & ۹ & ۵\end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. ماتریس ۵A و ۳A− را مشخص‌کنید.

قرینه‌ی ماتریس

قرینه‌ی ماتریس $A_{m\times n}$ ، ماتریس $(-۱)A_{m\times n}$ است که مجموع آن‌ها ماتریس صفر $O_{m\times n}$ خواهد بود.

مثال

اگر $A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۶ & ۵\\ ۹ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، قرینه‌ی ماتریس A عبارت است از :

$$(-۱)A_{۲\times۲}=(-۱)\begin{bmatrix}۵ & ۶\\ ۲ & ۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\times۵ & -۱\times۶\\ -۱\times۲ & -۱\times۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵ & -۶\\ -۲ & -۹\end{bmatrix}$$

۱ــ در مثال فوق مجموع ماتریس A و ماتریس قرینه‌اش را به‌دست آورید.

۲ــ قرینه‌ی هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید و سپس مجموع هر ماتریس با قرینه‌اش را به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}۷ & -۱\\ ۲ & ۶\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۴ & ۲\\ -۲ & ۱ & ۳\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\quad D=[۴\quad ۲\quad ۸]\quad H=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\ ۵\\ -\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$$

۳ــ معادله‌های ماتریسی زیر را درنظر بگیرید :

$$\begin{bmatrix}۵ & ۸\\ ۸ & ۵\end{bmatrix}+A=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\qquad B+\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۹\\ ۷ & ۰ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۳ & -۱ & ۱\end{bmatrix}+B=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

الف) مرتبه‌ی ماتریس‌های B و A را مشخص کنید.

ب) درایه‌های ماتریس‌های B و A را معلوم کنید.

مسائل

۱ــ ماتریس‌های $C=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید.

الف) حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$A+B,\ B+C,\ C+A$

ب) عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$۲A, \quad ۳C, \quad ۲A+B, \quad B-C$$

ج) آیا رابطه‌ی $A+B=B+A$ برقرار است؟

آیا رابطه‌ی $(A+B)+C=A+(B+C)$ برقرار است؟

آیا این رابطه‌ها برای هر سه ماتریس $A_{m\times n}$ ، $B_{m\times n}$ ، $C_{m\times n}$ برقرار است؟ مثال بزنید.

۲- قرینه‌ی ماتریس‌های داده شده را به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

۳- اگر $Q=\begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ -۶ & ۴ \\ ۲ & -۹ \end{bmatrix}$ و $P=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & -۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس R را طوری بیابید که

$$P+Q+R=۰$$

۴- در رابطه‌ی زیر x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۲x-۳y \\ x+۳y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها

شخصی میوه‌ی موردنیاز خانواده‌اش را در روزهای شنبه و سه‌شنبه مطابق جدول مقابل تهیه کرده است.

	سیب	پرتقال
شنبه	۲	۱
سه‌شنبه	۳	۲

اطلاعات جدول را به صورت ماتریس زیر نشان می‌دهیم.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \text{سیب} & \text{پرتقال} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{شنبه} \\ \text{سه‌شنبه} \end{array} \end{array}$$

اگر قیمت پرتقال هر کیلو ۱۵۰۰ تومان و سیب هر کیلو ۱۰۰۰ تومان باشد در صورتی که بخواهیم قیمت کل میوه‌ای که شخص در روز شنبه پرداخته است را محاسبه کنیم می‌توانیم ماتریس سطری $\begin{bmatrix}۱ & ۲\end{bmatrix}$ را در ماتریس ستونی $\begin{bmatrix}۱۵۰۰\\۱۰۰۰\end{bmatrix}$ که بردار قیمت هر کیلو میوه است ضرب کنیم. در این صورت خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱۵۰۰\\۱۰۰۰\end{bmatrix}=(۱\times۱۵۰۰)+(۲\times۱۰۰۰)=۳۵۰۰$$

و قیمت کل میوه برای روز سه‌شنبه به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{bmatrix}۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱۵۰۰\\۱۰۰۰\end{bmatrix}=(۲\times۱۵۰۰)+(۳\times۱۰۰۰)=۶۰۰۰$$

اطلاعات فوق را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو ماتریس زیر نوشت :

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲\\۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱۵۰۰\\۱۰۰۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۵۰۰\\۶۰۰۰\end{bmatrix}$$

اکنون اگر قیمت میوه‌ها در دو میوه فروشی متفاوت و به صورت زیر باشد :

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc}\text{میوه فروشی اول} & \text{میوه فروشی دوم}\end{array}\\ \begin{array}{r}\text{قیمت هر کیلو پرتقال}\\ \\ \text{قیمت هر کیلو سیب}\end{array} & \begin{bmatrix}۱۵۰۰ & ۱۰۰۰\\ & \\ ۱۰۰۰ & ۹۰۰\end{bmatrix}\end{array}$$

برای به‌دست آوردن هزینه‌ی کل میوه در روزهای شنبه و سه‌شنبه و در صورت خرید از هریک از دو میوه‌فروشی، لازم است دو ماتریس را در هم ضرب کنیم :

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲\\۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱۵۰۰ & ۱۰۰۰\\۱۰۰۰ & ۹۰۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\times۱۵۰۰+۲\times۱۰۰۰ & ۱\times۱۰۰۰+۲\times۹۰۰\\۲\times۱۵۰۰+۳\times۱۰۰۰ & ۲\times۱۰۰۰+۳\times۹۰۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۵۰۰ & ۲۸۰۰\\۶۰۰۰ & ۴۷۰۰\end{bmatrix}$$

برای آشنایی بیش‌تر با ضرب ماتریس‌ها به مثال‌های بعد توجه کنید.

مثال

ماتریس $A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}$ و ماتریس $B_{۲\times۱}=\begin{bmatrix}۷\\ ۳\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب آن‌ها به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۷\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\times۷+۵\times۳\\ ۱\times۷+۹\times۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۹\\ ۳۴\end{bmatrix}$$

توجه کنید که تعداد درایه‌های سطر اول ماتریس A با تعداد درایه‌های ستون اول ماتریس B برابر است. همین‌طور در سطر دوم ماتریس A و ستون اول ماتریس B تعداد درایه‌ها برابرند.

اکنون ماتریس $C_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۷ & ۲\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}$ و ماتریس A در مثال قبل را درنظر بگیرید. حاصل‌ضرب $A_{۲\times۲}\times C_{۲\times۲}$ به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۲\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\times۷+۵\times۵ & ۲\times۲+۵\times۳\\ ۱\times۷+۹\times۵ & ۱\times۲+۹\times۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۹ & ۱۹\\ ۵۲ & ۲۹\end{bmatrix}$$

فعالیت

دو ماتریس $D=\begin{bmatrix}۳ & ۷ & ۴\\ ۲ & ۱ & ۶\end{bmatrix}$ و ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۹\end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید.

۱ــ مرتبه‌ی ماتریس‌های فوق را بنویسید.

۲ــ حاصل ضرب دو ماتریس را به‌دست آورید.

$$A_{۲\times۲}\times D_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۹\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & ۷ & ۴\\ ۲ & ۱ & ۶\end{bmatrix}=$$

۳ــ آیا حاصل ضرب $D_{۲\times۳}\times A_{۲\times۲}$ انجام‌پذیر است؟ چرا؟

حاصل ضرب دو ماتریس در صورتی امکان‌پذیر است که تعداد ستون‌های اولی با تعداد سطرهای دومی برابر باشند.

تمرین در کلاس

۱ـ اگر $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، $C\times B$ ، $A\times B$ را محاسبه کنید.

۲ـ اگر $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، $A\times B$ ، $B\times A$ را محاسبه کنید.

نشان دهید : $A\times B \neq B\times A$

فعالیت

ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۸ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} \frac{۵}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. حاصل‌ضرب $A\times B$ ، $B\times A$ را به‌دست آورید.

ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را ماتریس واحد یا یکه می‌نامیم و آن را با $I_{۲\times۲}$ نشان می‌دهیم.

حاصل‌ضرب ماتریس $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ را در $I_{۲\times۲}$ بیابید. آیا $CI=IC$ است؟

برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه‌ی A و B در صورتی که $AB=I$ باشد، ماتریس B را ماتریس وارون ماتریس A می‌نامیم و آن را با نماد $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

در فعالیت بالا ماتریس B ماتریس وارون ماتریس A است. $B=A^{-۱}$

تمرین در کلاس

ماتریس‌های A و B و C را درنظر بگیرید.

$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۳}{۲} \\ -۲ & \frac{۷}{۲} \end{bmatrix}$

کدام‌یک از ماتریس‌ها، وارون ماتریس A است؟

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از ماتریس

همان‌طور که می‌دانید دستگاه زیر مثالی از یک دستگاه دو معادله دومجهولی است.

$$\begin{cases} ۲x - y = ۶ \\ -x + y = ۴ \end{cases}$$

می‌توان دستگاه فوق را با استفاده از تساوی ماتریس‌ها به صورت زیر نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۲x - y \\ -x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

با توجه به ضرب ماتریس‌ها، ماتریس سمت چپ را می‌توان به صورت ضرب دو ماتریس نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & +۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

اگر در رابطه‌ی فوق $C = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & +۱ \end{bmatrix}$ باشد، می‌توان رابطه‌ی ماتریسی روبرو را نوشت : $AX=C$

با راه‌حل معادله‌ی $۳x = ۷$ آشنا هستید. یک بار دیگر آن را مرور می‌کنیم.

$$۳x = ۷$$

$$\frac{۱}{۳} \times ۳x = \frac{۱}{۳} \times ۷$$ (عدد $\frac{۱}{۳}$ وارون عدد ۳ است.)

$$۱x = \frac{۷}{۳}$$ (عدد ۱ عضو بی‌اثر عمل ضرب اعداد است.)

$$x = \frac{۷}{۳}$$

اکنون به نظر شما برای حل معادله‌ی ماتریس $AX = C$ به چه چیزی احتیاج داریم؟

فعالیت

ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و ماتریس $B=\dfrac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید.

حاصل‌ضرب دو ماتریس را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای از این حاصل‌ضرب می گیرید؟

ماتریس B وارون ماتریس A می‌باشد و مقدار $ad-bc$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم.

مثال

وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

اگر $A^{-۱}$ را وارون ماتریس A بنامیم داریم :

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۳+۲}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{-۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

تمرین در کلاس

۱- به نظر شما شرط وارون‌پذیری ماتریس ۲×۲ مانند A چیست؟

۲- دستگاه $\begin{cases} ۲x-y=۶ \\ -x+y=۴ \end{cases}$ را حل کنید.

مسائل

۱- دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

$I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱۰ & ۵ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$

۲- وارون هریک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

$B=\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۳- کدام‌یک از عبارت‌های زیر برقرار نیست؟

الف) $(AB)^{-۱} = A^{-۱}B^{-۱}$ (فرض کنیم A و B و AB وارون‌پذیر باشند)

ب) $(A+B)^{-۱} = A^{-۱}+B^{-۱}$ (فرض کنیم A و B و A + B وارون‌پذیر باشند)

۴- مثالی از یک ماتریس ۲×۲ بزنید که وارون آن با خودش برابر باشد.

۵- اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ در این‌صورت $(A^{-۱})^{-۱}$ را پیدا کنید.

۶- مقدار a را به گونه‌ای پیدا کنید که ماتریس $\begin{bmatrix} a+۱ & ۱ \\ ۴ & a-۲ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

۷- در هریک از دستگاه‌های دو معادله دومجهولی زیر، ماتریس ضرایب را نوشته و با استفاده از ماتریس معکوس ضرایب جواب دستگاه را به‌دست آورید.

الف) $\begin{cases} ۳x - y = ۴ \\ x + ۲y = ۳ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} ۲x + ۳y = ۰ \\ ۶x + ۴y = ۱ \end{cases}$ ج) $\begin{cases} -x + y = ۷ \\ ۵x - ۴y = ۱ \end{cases}$

۸- رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$ مفروض است:

ماتریس سمت چپ را به صورت حاصل‌ضرب ۲ ماتریس بنویسید و مقادیر x و y را به دست آورید.

۹- معادلات زیر را با توجه به محاسبات در ماتریس‌های مربعی مرتبه‌ی ۲×۲ حل کنید.

الف) $X + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} + ۲X = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$