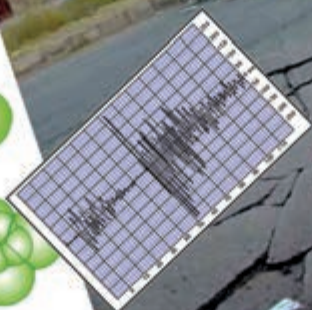
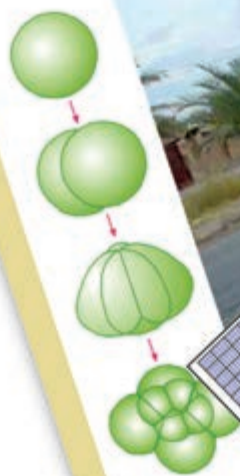


# توابع نمایی و لگاریتمی

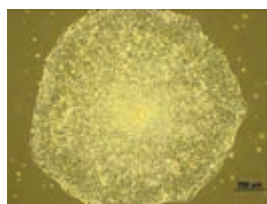
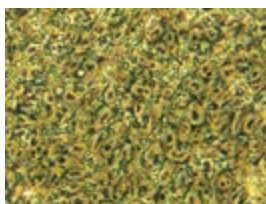
فصل ۴



آیا رشد سلول‌ها، نظام‌های بانکداری در دنیا و نحوه‌ی محاسبه‌ی سنّ یک درخت کهنسال یا یک سنگ از دوران باستان، تابع قانون‌مندی‌های خاصی است؟  
 امروزه با توجه به رشد روزافزون روش‌های پژوهشی کمی در علوم، هم نیاز و هم امکان استفاده از روش‌های ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر افزایش یافته‌است و مهم‌ترین ویژگی به کارگیری ریاضی، توانایی الگوسازی‌های ریاضیات است. یکی از جدیدترین این نمونه‌ها نقش الگوهای ریاضی در مطالعه‌ی سلول‌های بنیادی است.

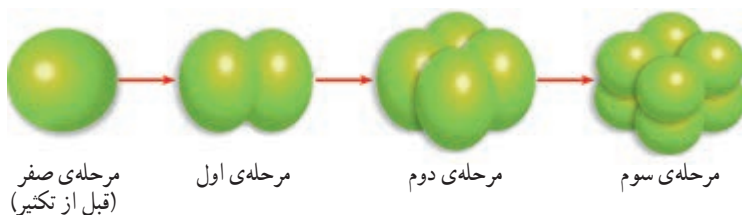
## سلول‌های بنیادی

در یکی از روزهای سال ۱۳۸۲ این خبر به تمام دنیا مخابره شد. پژوهشکده‌ی رویان به عنوان مرکز تحقیقات علوم سلولی و درمان ناباروری جهاد دانشگاهی، موفق به تولید سلول‌های بنیادی جنینی انسان شد. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب، ماهیچه‌ی قلبی، کبدی و ... را به وجود آورند.



شکل ۱- (سمت چپ) یک مجموعه از سلول‌های بنیادی دارای حدود ۱۰ هزار سلول است که در سمت راست با بزرگ‌نمایی بیشتر، سلول‌ها به صورت واضح نشان داده شده‌اند.

در شکل (۲) روند تکثیر سلول بنیادی جنینی در ۴ مرحله نشان داده شده است.



شکل ۲

اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنینی مانند شکل (۲) ادامه پیدا کند :



فکر می‌کنید پس از مرحله ی نهم، چه تعداد سلول بنیادی خواهیم داشت؟ برای یافتن پاسخ، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

تعداد سلول‌های بنیادی تکثیر شده	تعداد مراحل تکثیر سلول‌ها
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	۴
۳۲	۵
۶۴	۶
۱۲۸	۷
۲۵۶	۸
۵۱۲	۹

جدول ۱

با توجه به جدول (۱) می‌بینیم که سرعت تکثیر سلول‌های بنیادی چه قدر زیاد است !

۱- پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده، برابر با  $2 \times 48$  سلول خواهد بود؟

۲- آیا اعداد این جدول الگویی را مشخص می‌کنند؟ آیا می‌توانید قانونی بین این دو کمیت یعنی تعداد سلول‌ها و مراحل تکثیر آن‌ها به دست آورید؟

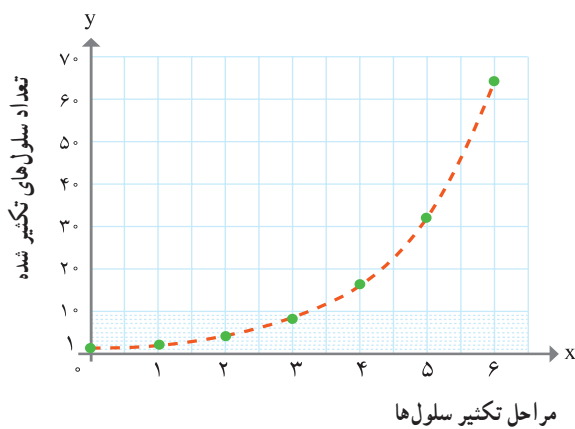
اگر بخواهیم تعداد سلول‌های تکثیر شده در مرحله ی بیستم یا مرحله ی سی‌ام و یا هر مرحله ی دیگری پیدا کنیم، قطعاً باید به دنبال راه میان بری بگردیم و گرنه محاسبات طولانی و وقت گیر خواهد بود. به همین منظور جدول (۱) را بر حسب توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم، جدول (۲) به دست می‌آید. شما هم جای علامت سؤال‌ها را با استفاده از ماشین حساب پر کنید.

مراحل تکثیر سلول‌ها	تعداد سلول‌های تکثیر شده
۰	$2^0 = 1$
۱	$2^1 = 2$
۲	$2^2 = 4$
۳	$2^3 = 8$
۴	$2^4 = 16$
⋮	⋮
۹	$2^9 = 512$
⋮	⋮
?	۱۶۳۸۴
⋮	⋮
۲۰	$2^{20} = ?$
⋮	⋮

جدول ۲

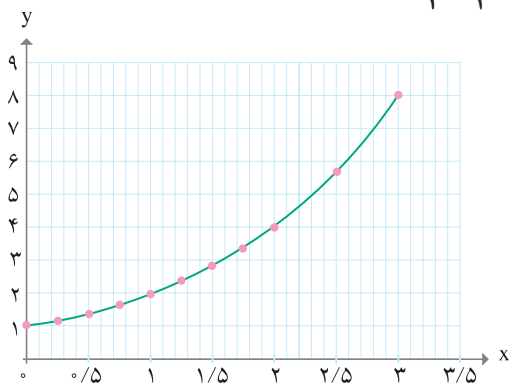
نمودار زیر، رابطه‌ی بین مراحل مختلف تکثیر سلول‌ها و تعداد سلول‌های تکثیر شده را نشان

می‌دهد:



در فصل اول یک الگوی نمایی برای رشد باکتری‌ها به دست آوردیم که جرم تقریبی باکتری‌ها از ضابطه‌ی  $g(x) = 2^x$ ، محاسبه می‌شد، دوباره به آن فعالیت باز می‌گردیم:

- ۱- مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم نمایید و نمودار آن را رسم کنید.
- ۲- اگر محور  $x$ ‌ها، بیانگر زمان و محور  $y$ ‌ها بیانگر جرم باکتری‌ها باشد، نمودار تابع  $g(x) = 2^x$  را برای  $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}$  رسم نمایید و سپس آن را با شکل زیر مقایسه کنید.



می‌توانیم این نمودار را بر حسب تابع  $y = 2^x$  بیان کنیم. به این گونه تابع‌ها، تابع نمایی می‌گویند که به دلیل متغیر بودن نما، چنین نامی به آن‌ها داده شده است. برای تمام اعداد حقیقی  $x$ ، (گویا و گنگ)، این منحنی را می‌توان برای نمایش تابع  $g(x) = 2^x$  به کار برد. در این الگو رابطه‌ی بین زمان و مراحل رشد باکتری، یک تابع نمایی است زیرا رشد باکتری‌ها بر حسب زمان، به صورت توان‌ها یا نماهای ۲ است.

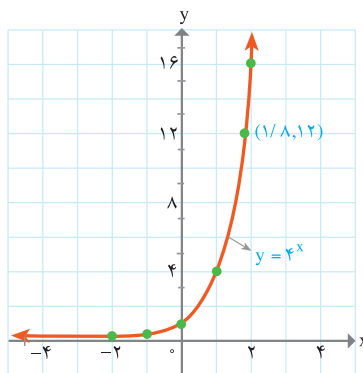
آیا عبارت  $(-2)^x$  را می‌توان به ازای تمام  $x$ ‌های حقیقی محاسبه کرد؟

هر تابع به صورت  $y = a^x$  که  $a$  عددی حقیقی و  $a \neq 1$ ،  $a > 0$  و  $x$  یک متغیر است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

- ۱- دامنه و برد تابع  $y = a^x$  را به دست آورید.  
 ۲- آیا تابع نمایی  $y = a^x$  یک تابع یک به یک است؟ چرا؟

الف) نمودار تابع نمایی  $y = 4^x$  را در نقاط داده شده جدول زیر به دست آورید و سپس نقاط را به یکدیگر وصل نمایید.

x	$4^x$	y
-۲	$4^{-2}$	$\frac{1}{16}$
-۱	$4^{-1}$	$\frac{1}{4}$
۰	$4^0$	۱
۱	$4^1$	۴
۲	$4^2$	$4^2 = 16$



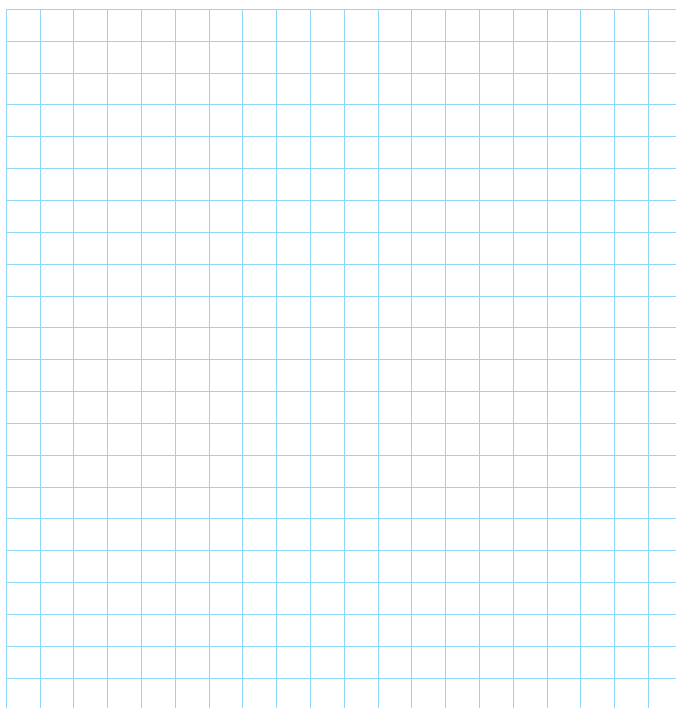
حل :

نمودار تابع نمایی  $4^x$ ، محور  $y$ ها را در نقطه  $1$  قطع می کند.

ب) با استفاده از نمودار  $y = 4^x$  ، مقدار تقریبی  $4^{1/8}$  را به دست آورید.  
 حل : از نمودار این تابع می توان به طور تقریبی مقدار  $y$  را برای همه ی مقادیر حقیقی  $x$  به دست آورد. با توجه به نمودار مقدار تقریبی  $y$  وقتی که  $x = 1/8$  است، برابر با ۱۲ می باشد.  
 با استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی  $4^{1/8}$  برابر است با:  
 $4^{1/8} \cong 12/125732253$



- ۱- نمودار تابع  $y = 7^x$  را به ازای  $-1 \leq x \leq 2$  رسم کنید.
- ۲- مقدار تقریبی  $y = 7^{0/6}$  را با استفاده از نمودار تابع به دست آورید.
- ۳- نمودار توابع  $y = 3^x$  و  $y = 3^{x-1}$  و  $y = 3^x + 3$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن ها را با هم مقایسه کنید.

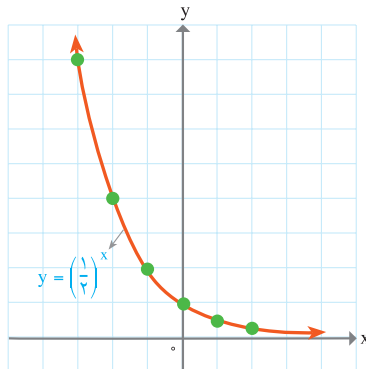


x	$(\frac{1}{4})^x$	y
-3	$(\frac{1}{4})^{-3}$	8
-2	$(\frac{1}{4})^{-2}$	4
-1	$(\frac{1}{4})^{-1}$	2
0	$(\frac{1}{4})^0$	1
1	$(\frac{1}{4})^1$	$\frac{1}{4}$
2	$(\frac{1}{4})^2$	$\frac{1}{16}$

الف) نمودار  $y = (\frac{1}{4})^x$  را رسم کنید.

نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور  $y$ ‌ها، چیست؟

حل: چند نقطه‌ی دلخواه را در نظر می‌گیریم.



نقطه‌ی تقاطع نمودار با محور  $y$ ‌ها، ۱ می‌باشد.

ب) با استفاده از شکل تابع، مقدار تقریبی  $(\frac{1}{4})^{-2/5}$  را به دست آورید.

حل: مقدار  $y$  وقتی که  $x = -2/5$  است، حدوداً  $5/5$  است. مقدار تقریبی  $(\frac{1}{4})^{-2/5}$  برابر

با  $(\frac{1}{4})^{-2/5} \cong 5/6561854249$  می‌باشد.



۱- نمودار  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$  را رسم کنید. نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور  $y$ ها، چیست؟

۲- با استفاده از نمودار تابع فوق، مقدار تقریبی  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5} + 2$  را به دست آورید.

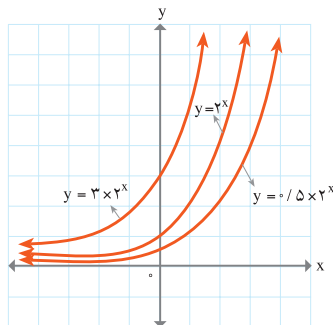
توجه شود که در نمودار مثال قبل وقتی که  $x$  بزرگ می‌شود مقدار  $y$  کم می‌شود و برای  $x$ های کوچک‌تر از صفر، مقدار  $y$  به سرعت افزایش می‌یابد. به طور کلی این وضعیت برای تمام توابع نمایی  $y = a^x$  و  $0 < a < 1$  برقرار است.

۳- از روی نمودار، ویژگی‌های تابع  $a^x$  را برای حالت  $a > 1$  و  $0 < a < 1$  را مشخص نمایید.

مثال

در شکل زیر، نمودار توابع  $y = 2^x$  و  $y = 3 \times 2^x$  و  $y = 0.5 \times 2^x$  نشان داده شده است.

توجه کنید :



همان‌گونه که از نمودارها، مشخص است، محل تقاطع منحنی  $y = 2^x$  با محور  $y$ ها، نقطه‌ی  $y = 1$ ،

منحنی  $y = 3 \times 2^x$ ، نقطه‌ی  $y = 3$  و برای منحنی  $y = 0.5 \times 2^x$ ، نقطه‌ی  $y = 0.5$  می‌باشد.

تعمیر

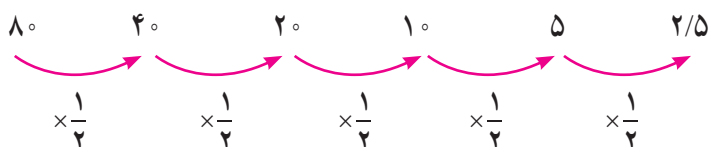
با توجه به نمودار این سه تابع، چه وجه مشترک و چه وجه اختلافی بین این توابع ملاحظه می‌کنید؟

- ۱- فکر می کنید توابع  $y = 10^x$  و  $y = (\frac{1}{10})^x$  در چه نقطه‌ای محور  $y$ ها را قطع می کنند. آیا می توانید بدون استفاده از جدول، نمودار تقریبی این دو تابع را رسم کنید؟
- ۲- نمودار توابع  $y = 3^x$  و  $y = 4^x$  و  $y = 5^x$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن‌ها را در  $x > 0$  و  $x < 0$  با هم مقایسه کنید.

در جدول زیر، مقادیر  $x$  و  $y$  از یک تابع داده شده است. رفتار این تابع یا چگونگی تغییرات این تابع، یک تابع نمایی را مشخص می کند یا خیر؟ چرا؟

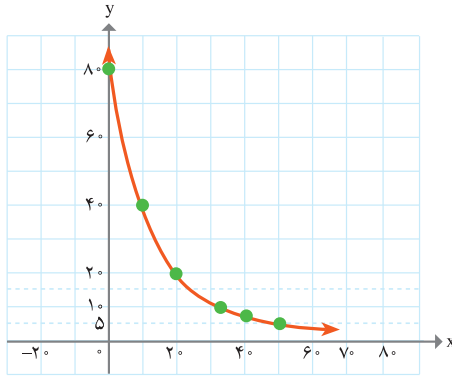
<b>x</b>	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
<b>y</b>	۸۰	۴۰	۲۰	۱۰	۵	۲/۵

حل: مقادیر  $x$  به صورت منظم، به فاصله‌ی ده واحد اضافه می شوند. مقادیر  $y$  به صورت زیر می باشند:



همان طور که مشاهده می شود، مقادیر  $y$  با ضرب یک عدد ثابت در عدد قبلی، به دست می آیند. با توجه به این که دامنه‌ی تغییرات  $x$  به صورت منظم در یک فاصله‌ی معین است و میزان تغییرات مقادیر  $y$  بر اثر ضرب در یک عدد ثابت است لذا این داده‌ها می تواند بیانگر رفتار یک تابع نمایی باشد.

نقاط معلوم در جدول را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم و سپس آن‌ها را به یک دیگر وصل می کنیم. شکل این تابع، همانند شکل یک تابع نمایی است.



تفاوت در مقیاس

آیا می‌توانید عبارت دقیق تابع نمای بالا را به دست آورید؟

مسائل

۱- نمودار هر دسته از تابع‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

الف)  $y = 2^x - 4$  ,  $y = 2^x + 3$  ,  $y = 2^x$

ب)  $y = 2^{x-4}$  ,  $y = 2^{x+5}$  ,  $y = 2^x$

ج)  $y = 5^x$  ,  $y = 3^x$  ,  $y = 2^x$

۲- در جدول زیر نقاطی از یک تابع داده شده است. آیا چگونگی تغییرات این تابع، نمای است؟ چرا؟

x	0	10	20	30	40	50
y	15	21	27	33	39	45

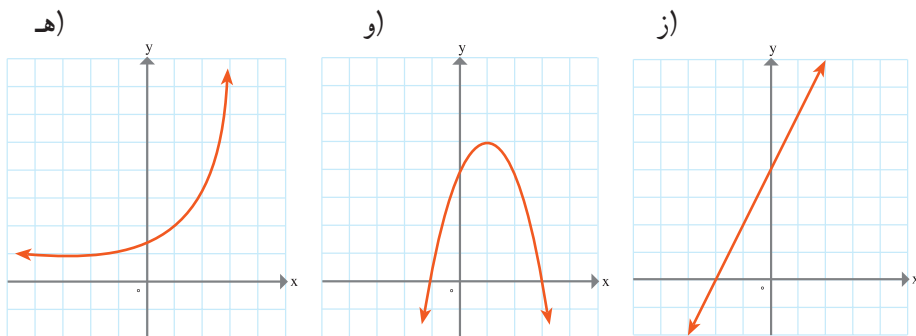
۳- رفتار یا چگونگی تغییرات کدام یک از توابع زیر، نمای است؟

الف)  $y = 4^x + 3$

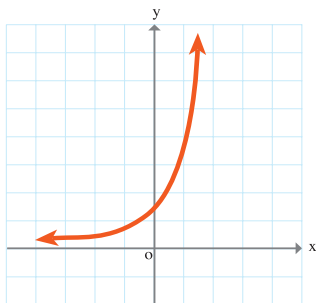
ب)  $y = 2x(x-1)$

ج)  $y + 5x = 8$

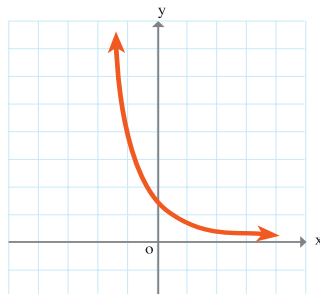
د)  $y = x^4 + 3$



۴- نرگس و فاطمه نمودار  $y = (\frac{1}{3})^x$  را رسم کرده‌اند. کدام یک از آن‌ها، نمودار را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.



نمودار رسم شده توسط فاطمه



نمودار رسم شده توسط نرگس

۵- توابع  $y = 3^x$  و تابع  $y = x^3$  چه فرق اساسی با هم دارند؟

۶- نمودار توابع زیر را رسم کنید. محل تقاطع نقاط نمودار با محور  $y$ ها را پیدا کنید. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی تابع در نقطه‌ی داده شده را به دست آورید.

الف)  $y = 9^x$  ;  $x = 0/8$

ب)  $y = (\frac{1}{4})^x$  ;  $x = 1/7$

ج)  $y = 10^x$  ;  $x = 0/3$

د)  $y = (\frac{1}{10})^x$  ;  $x = -1/3$

۷- مشخص کنید که آیا داده‌های زیر در هر جدول، بیانگر یک تابع نمای است یا خیر؟ دلیل خود را توضیح دهید.

الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۶	۳۶	۲۱۶	۱۲۹۶	۷۷۷۶

ب)

x	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
y	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۵

ج)

x	۱	۰	-۱	-۲
y	۴	۱	-۲	-۵

د)

x	۰	۱	۲	۳
y	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۱۲۵

ه)

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۱۶	۱۲	۹	۶/۷۵

و)

x	-۱	۰	۱	۲
y	-۰/۵	۱/۵	-۲	+۴

۸- مشخص کنید که از توابع زیر، کدام یک خطی هستند، کدام یک درجه‌ی دوم و کدام یک رفتار نمایی دارند؟

الف)  $y = 7^x - 4$

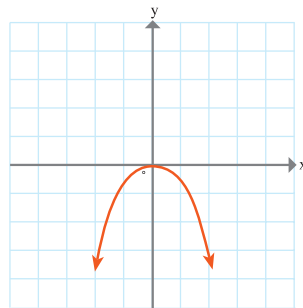
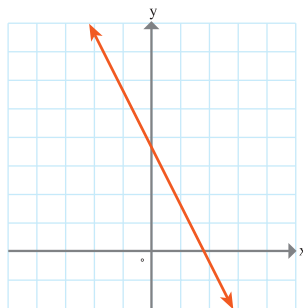
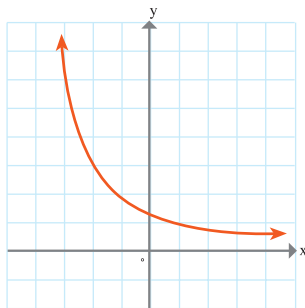
ب)  $y = -x(x+1)$

ج)  $y + 3x = 5$

د)

ه)

و)



(این قسمت از مطالب کتاب یعنی رشد و زوال نمایی، صرفاً جهت اطلاعات بیشتر دانش‌آموزان است و به عنوان سرفصل رسمی درس محسوب نمی‌شود.)

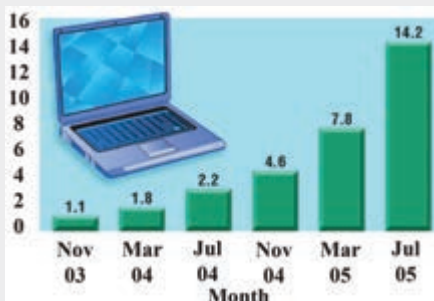
## رشد و زوال نمایی

در این بخش به یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی می‌پردازیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم.

### رشد نمایی

در یک بررسی آماری در یکی از کشورها، افزایش تعداد وبلاگ‌ها از نوامبر سال ۲۰۰۳ (آبان ماه ۱۳۸۲) تا جولای ۲۰۰۵ (تیرماه ۱۳۸۴) ۱۳/۷ درصد در هر ماه بوده است. فرض کنید  $y$  بیانگر تعداد کل وبلاگ‌ها برحسب میلیون و  $t$  بیانگر ماه‌ها از نوامبر ۲۰۰۳ باشد. در این صورت تعداد متوسط وبلاگ‌ها در هر ماه از قانون (الگوی) زیر پیروی می‌کند.

$$y = 1/1(1 + 0/137)^t = 1/1(1/137)^t$$



همان گونه که مشاهده می‌شود، رشد وبلاگ‌ها، یک نمونه از رشد نمایی است. مثال دیگری از رشد نمایی سود بانکی می‌باشد.

پدر علی، مبلغ ۱۰۰ هزار تومان در حساب پس‌انداز، در یکی از بانک‌های کشور ذخیره می‌کند. طبق قانون اعلام شده از سوی بانک، این پول‌ها در ساخت یک بزرگراه سرمایه‌گذاری می‌شود. پیش‌بینی بانک این است که با گرفتن عوارض و درآمدهای تبلیغاتی بزرگراه در ۱۰ سال آینده،

حداقل می‌توان ۱۴ درصد سود پرداخت کرد. پدر علی، به علی می‌گوید که این حساب پس‌انداز را برای تو باز کرده‌ام و الآن که سن تو ابتدای ۱۷ سال است حساب‌کن که در پایان ۲۵ سالگی، چه میزان پول در حساب پس‌اندازت وجود خواهد داشت؟

علی شروع به محاسبه کرد. مقدار پس‌انداز پایان سال اول ابتدای ۱۸ سالگی برابر است با:

$$100,000 + (100,000 \times \frac{14}{100}) = 100,000 + 14,000 = 114,000$$

مقدار پس‌انداز در پایان ۱۸ سالگی برابر است با:

$$114,000 + (114,000) \times 0.14 = 129,960$$

این عبارت را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$[100,000(1/14)](1/14) = 100,000(1/14)^2$$

به همین صورت اگر ادامه دهیم مقدار پس‌انداز علی پس از پایان ۲۵ سالگی برابر است با:

$$(100,000) \times (1 + 0.14)^9$$

بنابراین در حالت کلی، اگر نرخ سود  $(100 r)$  درصد و سالیانه قابل پرداخت باشد، در این صورت اگر مبلغی در پایان سال اول پرداخت می‌گردد (اصل به علاوه سود)  $y_1$  باشد،

$$y_1 = c + rc = c(1+r) \quad \text{داریم:}$$

که  $c$  مقدار اولیه‌ی پس‌انداز است.

$$y_2 = [c(1+r)][1+r] = c(1+r)^2 \quad \text{مبلغ پس از دو سال برابر است با:}$$

$$y_3 = [c(1+r)^2][1+r] = c(1+r)^3 \quad \text{مبلغ پس از ۳ سال برابر است با:}$$

معادله‌ی کلی رشد نمایی، به صورت  $y = c(1+r)^t$  است که در آن  $y$  بیانگر مقدار نهایی،  $c$  بیانگر مقدار اولیه،  $r$  بیانگر میزان رشد (تغییرات) برحسب اعشار و  $t$  بیانگر زمان است.

مثال

فرض کنید ۴۰۰ هزار تومان در حساب پس اندازی که هر سال ۱۲ درصد سود می‌دهد، ذخیره شده است. مبلغ پس انداز را در پایان سال سوم حساب کنید.

حل: با توجه به فرمول  $y_n = c(1+r)^n$ ،  $n = 3$ ،  $c = 400$ ،  $r = 0.12$  و لذا،

$$y_3 = 400,000(1+0.12)^3 = 561971/2$$

یعنی مبلغ پس انداز در پایان ۳ سال برابر با ۵۰۶/۱۹۷ هزار تومان است.

فصلنامه

رشد جمعیت ایران طی سال‌های ۱۳۳۵ تا ۱۳۶۵، حدود ۳ درصد بوده است. اگر جمعیت ایران در سال ۱۳۵۵، حدود ۱۹ میلیون نفر بوده باشد، جمعیت ایران در سال ۱۳۶۵ چند نفر بوده است؟ اگر این رشد همچنان باقی می‌ماند، جمعیت کشور در سال ۱۳۸۸ چند میلیون نفر خواهد بود؟

از سال ۱۳۷۰ رشد جمعیت ایران با کاهش بی‌سابقه‌ای به حدود ۱/۵ درصد تنزل یافت. بنابراین اگر جمعیت ایران در سال ۱۳۶۵ حدود پنجاه میلیون نفر بوده است، با نرخ رشد ۱/۵ درصد، جمعیت ایران در سال ۱۳۸۸ چند نفر خواهد بود؟ اگر همین نرخ رشد ثابت بماند، جمعیت ایران در سال ۱۴۰۴ چند نفر خواهد بود؟

## زوال نمایی

همانند رشد نمایی، می‌توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله‌ی کلی زوال نمایی، به فرم  $y = c(1-r)^t$  است که در آن  $y$  بیانگر مقدار نهایی،  $c$  بیانگر مقدار اولیه،  $r$  بیانگر میزان نزول بر حسب اعشار و  $t$  بیانگر زمان است.

مثال

۱- یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۶/۶۰ درصد بادش را از دست می‌دهد. قایق بادی دارای ۷۳۷۴۱/۷۸۸ سانتی متر مکعب باد می‌باشد.



الف) معادله‌ای بنویسید که بیانگر میزان از دست دادن باد قایق باشد.  
 حل: معادله‌ی کلی برای نزول نمایی به صورت  $y = c(1-r)^t$  است. لذا با توجه به اطلاعات داده شده در مثال، می‌توان نوشت:

$$y = 73741 / 788(1 - 0.066)^t = 73741 / 788(0.934)^t$$

بنابراین معادله‌ای که بیانگر از دست دادن باد در قایق است به صورت  $y = 73741 / 788(0.934)^t$  است که در آن  $y$  بیانگر مقدار باد در قایق بر حسب سانتی متر مکعب و  $t$  بیانگر تعداد روزهاست.  
 ب) میزان بادی که بعد از ۷ روز قایق از دست می‌دهد، تخمین بزنید.

حل: معادله‌ی از دست دادن باد

$$y = 73741 / 788(0.934)^t =$$

$$= 73741 / 788(0.934)^7 \quad t = 7$$

$$\approx 45719$$

با استفاده از ماشین حساب

بنابراین میزان بادی که قایق بعد از ۷ روز از دست داده، ۴۵۷۱۹ سانتی متر مکعب می‌باشد.

۲- جمعیت یکی از کشورهای خارجی، در سال ۲۰۰۰ میلادی برابر با ۴۰,۰۰۰,۰۰۰ نفر بوده است. رشد جمعیت این کشور با نرخ ۱٪ در حال کاهش است. جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۰ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل: با توجه به این که معادله‌ی کلی زوال نمایی به صورت  $y = c(1-r)^t$  می‌باشد با جایگذاری  $c, r, t$  جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۰ برابر است با:

$$y = 40,000,000(1 - 0.01)^{10} = 36,175,283$$



۱- فرض کنید در یک کشت باکتری، در پایان ۲ روز تعداد ۳۶۰,۰۰۰ باکتری و در پایان ۴ روز تعداد ۳,۲۴۰,۰۰۰ باکتری وجود دارند. مطلوب است:

الف) تعداد باکتری‌ها در شروع آزمایش

ب) تعداد باکتری‌ها در پایان ۲۴ ساعت

ج) تعداد باکتری‌ها در پایان ۳ روز

د) تعداد روزهایی که در پایان آن تعداد باکتری‌ها برابر با ۲۹,۱۶۰,۰۰۰ خواهد بود.

۲- جمعیت کشور مکزیک در سال ۲۰۰۰ میلادی، برابر با ۱۰۰,۳۵۰,۰۰۰ نفر می‌باشد. اگر نرخ رشد جمعیت ۱/۷٪ در سال باشد، جمعیت کشور مکزیک در سال ۲۰۱۲ چند نفر خواهد بود؟

۳- شخصی در بیست و پنجمین سالگرد تولدش وارث ۵۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان شد. اگر این

شخص این مبلغ را با نرخ هشت درصد سود سالیانه سرمایه گذاری کند هنگام بازنشستگی در سن ۶۵ سالگی چه مبلغی دریافت می کند؟

۴- جمعیت کشور لیتوانی در سال ۲۰۰۵، برابر با ۲۳۷،۲۹۰ نفر بوده است. نرخ رشد جمعیت در این کشور با نرخ ۱/۱٪ در حال کاهش است. جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۵ میلادی چند نفر خواهد بود؟

۵- (هواشناسی). فشار اتمسفر (برحسب میلی بار) در ارتفاع  $x$  برحسب متر از سطح دریا، به وسیله ی تابع زیر تقریب زده می شود.

$$f(x) = 1038(1/000134)^{-x}$$

که  $x$  بین صفر تا ۱۰۰۰۰ خواهد بود.

الف) میزان فشار در سطح دریا چقدر است؟

ب) رستورانی در ارتفاع ۲۰۰۰ متری در اردبیل قرار دارد.

میزان فشار تقریبی اتمسفر در محل این رستوران چقدر است؟

ج) اگر ارتفاع افزایش پیدا کند، چه اتفاقی در فشار اتمسفر ایجاد خواهد شد؟

## لگاریتم و تابع لگاریتمی

محاسبه لگاریتم یک ابزار مناسب برای توصیف بسیاری از پدیده های طبیعی است، محاسبه شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف ترین صدای قابل شنیدن توسط گوش انسان که به آن آستانه شنوایی می گویند و همین طور محاسبه آستانه درد که قوی ترین صدای قابل تحمل برای گوش انسان است، به کمک این مفهوم ریاضی یعنی لگاریتم قابل تعریف و محاسبه است. در پیش بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان معینی که در برنامه ریزی اقتصادی نقش تعیین کننده ای دارد و یا هنگام محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو که ماده اصلی در انرژی هسته ای است از لگاریتم استفاده می کنیم.

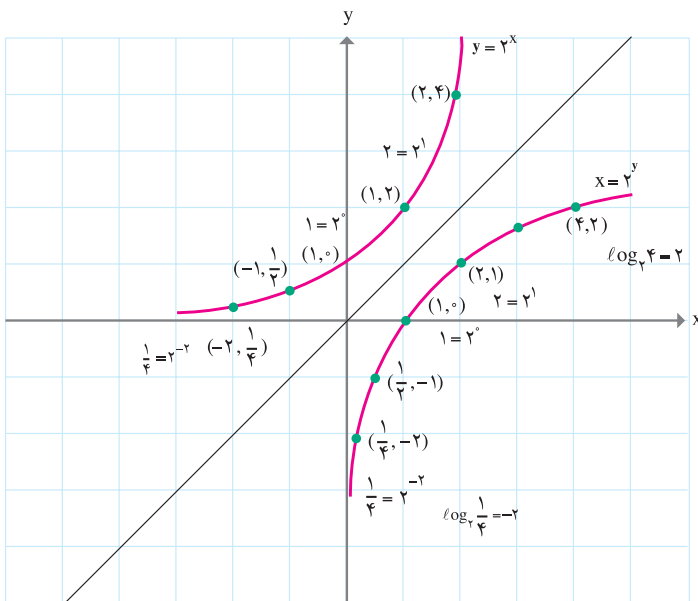
در بحث توابع نمایی دیدیم که تکثیر و رشد سلول ها از قوانین توابع نمایی پیروی می کنند. به کمک تابع نمایی  $y = b^x$  می توان به طور مثال تعداد سلول ها را پس از زمان  $x$  پیش بینی کرد. در مواقعی نیاز است که بدانیم تعداد معینی از سلول ها پس از چه زمانی به وجود می آیند، برای پاسخ به این قبیل سؤالات از مفهوم جدیدی به نام تابع لگاریتمی که معکوس تابع نمایی است استفاده می کنیم.

## تابع لگاریتمی چیست و چگونه ساخته می‌شود؟

با تابع نمایی  $y = 2^x$  شروع می‌کنیم که تابعی یک به یک است و بنابراین تابع معکوس آن وجود دارد. به یاد آورید که معکوس تابع یک به یک  $y = f(x)$  را می‌توان با یافتن قرینه‌ی نقاط روی نمودار تابع  $f$  نسبت به خط  $y = x$  ساخت.

به جدول و نمودار زیر توجه کنید :

$y = 2^x$		$x = 2^y$	
x	y	x	y
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3
0	1	1	0
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	-3



شکل (۱)

در شکل (۱) نمودار تابع نمایی و نمودار تابع معکوس آن (که تابع لگاریتمی نامیده می‌شود) نشان داده شده است. به عنوان مثال نقطه‌ی (۴ و ۲) روی نمودار تابع نمایی است. و نقطه‌ی (۲ و ۴) که قرینه‌ی آن نسبت به خط  $y = x$  است روی نمودار تابع معکوس آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد. معکوس  $y = 2^x$  را می‌توان به صورت  $x = 2^y$  نوشت. در عبارت  $x = 2^y$ ،  $x$  را لگاریتم  $x$  در پایه‌ی ۲ می‌خوانیم و با نماد  $y = \log_2 x$  نشان می‌دهیم.

مثال

۱- هر یک از تساوی‌های زیر را به صورت  $x = 2^y$  بنویسید.

الف)  $y = \log_2 \frac{1}{4} = -2$

ب)  $y = \log_2 1 = 0$

$$\frac{1}{4} = 2^{-2}$$

$$1 = 2^0$$

۲- هر یک از تساوی‌های زیر را به صورت  $y = \log_2 x$  بنویسید.

الف)  $2^5 = 32$

ب)  $16^{\frac{1}{2}} = 4$

$$\log_2 32 = 5$$

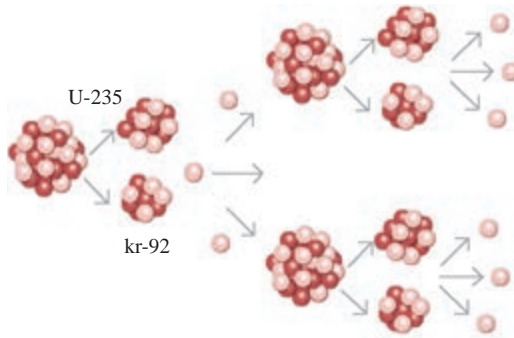
$$\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$$

تفاوت  
کلاس

در شکافت هسته‌ی اورانیوم، یک نوترون به هسته‌ی اورانیوم برخورد می‌کند و هسته‌ی اورانیوم



به دو هسته‌ی سبک‌تر تقسیم می‌شود و مقداری انرژی، تولید شده و دو یا سه نوترون نیز آزاد می‌شود. نوترون‌های جدید خودشان به هسته‌های دیگر اورانیوم برخورد کرده و منجر به آزادسازی انرژی و نوترون‌های دیگر می‌شوند و همین‌طور این فرایند استمرار می‌یابد، این فرایند، واکنش زنجیره‌ای نامیده می‌شود. فرض کنیم در اثر شکافت هسته‌ی اورانیوم سه نوترون آزاد شود.



مرحله‌ی واکنش زنجیره‌ای	تعداد نوترون‌های آزاد شده
۱	۳
۲	۹
۳	۲۷
۴	۸۱

جدول فوق تعداد نوترون‌های آزاد شده را که از قانون تابع نمایی  $y = 3^x$  پیروی می‌کند نشان می‌دهد و به کمک آن می‌توان تعداد نوترون‌های آزاد شده را در مرحله‌ی  $x$  پیش‌بینی کرد. اگر بخواهیم بدانیم تعداد معینی از نوترون‌ها در کدام مرحله به وجود می‌آیند از تابع لگاریتمی  $y = \log_3 x$  که معکوس تابع نمایی فوق است استفاده می‌کنیم.

الف) در مرحله ششم چه تعداد نوترون آزاد شده خواهیم داشت؟  
 ب) در کدام مرحله تعداد نوترون‌های آزاد شده برابر با ۲۴۳ نوترون خواهد بود؟



۱- جدول‌ها را کامل کنید.

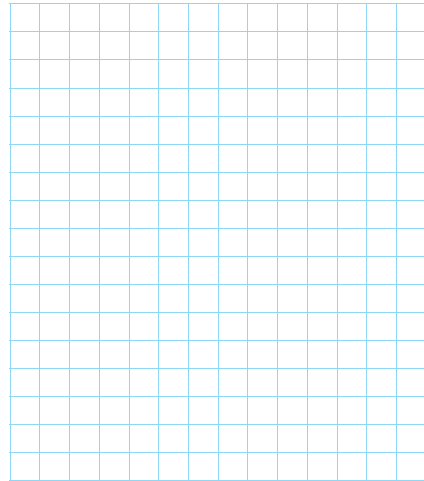
۲- هریک از نقاط جدول‌ها را روی صفحه شطرنجی مشخص کنید و سپس نمودارهای تابع  $y = 3^x$  و تابع  $y = \log_3 x$  را رسم کنید.

۳- هر نقطه از نمودار تابع نمایی را با نقطه نظیرش از تابع لگاریتمی مقایسه کنید.

۴- دامنه و برد دو تابع را با هم مقایسه کنید :

$f(x) = 2^x$	
$y = 2^x$	$(x, y)$
$1 = 2^0$	$(0, 1)$
...	$(1, 2)$
$\frac{1}{2} = 2^{-1}$	...
$(2, f(2))$	...
$\frac{1}{4} = 2^{-2}$	...
...	...
...	$(3, 8)$
...	...

$g(x) = \log_2 x$	
$y = \log_2 x$	$(x, y)$
$0 = \log_2 1$	$(1, 0)$
$1 = \log_2 2$	...
...	$(\frac{1}{2}, -1)$
...	$(4, g(4))$
$\log_2 \frac{1}{4} = -2$	...
$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$	...
...	$(2^3, 3)$
...	$(a, g(a))$



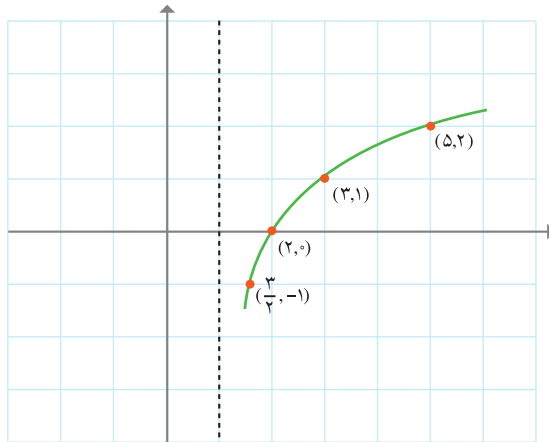
نمودار تابع  $f(x) = 2^x$  و نمودار تابع معکوس آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و به این سؤالات پاسخ دهید :

الف) دامنه و برد هر کدام از توابع را مشخص کنید.

ب) دامنه و برد تابع لگاریتمی و تابع معکوسش را با هم مقایسه کنید.

نمودار تابع  $y = \log_4(x-1)$  را رسم می‌کنیم.

$y = \log_4(x-1)$	
x	y
2	0
3	1
5	2
$\frac{3}{2}$	-1
⋮	⋮



توجه کنید که به  $x$  مقادیر کمتر از 1 را نمی‌دهیم. زیرا دامنه‌ی تابع لگاریتمی مقادیر مثبت است.

یعنی باید:  $x-1 > 0$  باشد و در نتیجه  $x > 1$  قابل قبول است.

به همین دلیل ابتدا خط  $x=1$  را به صورت نقطه چین رسم می‌کنیم تا نمودار راحت‌تر و دقیق‌تر

رسم شود.

می‌خواهیم نمودار تابع  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  و نمودار تابع  $y = (\frac{1}{4})^x$  را در یک دستگاه مختصات

رسم کنیم.

۱- ابتدا جدول صفحه‌ی بعد را تکمیل کنید:

$(x, y) \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x$		$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (x, y)$	
$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$		$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
$(2, -1)$	$-1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$		$(-1, 2)$
$(4, -2)$	$-2 = \log_{\frac{1}{2}} 4$		$(-2, 4)$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$	...	...	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
			$(, )$

۲- هر یک از نقاط دو جدول را در دستگاه مختصات مشخص کرده، نمودار تابع لگاریتمی را رسم کنید.

۳- نمودار معکوس تابع لگاریتمی را نسبت به خط  $y=x$  رسم کنید.

۴- دامنه و برد تابع نمایی را از روی نمودار مشخص کنید.

۵- دامنه و برد تابع لگاریتمی را از روی نمودار مشخص کنید.

۶- حدس می‌زنید که نمودارهای تابع  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  ,  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  چگونه باشند.



به نمودارهای زیر توجه کنید.  
کدام شکل نمودار کدام تابع می تواند باشد؟

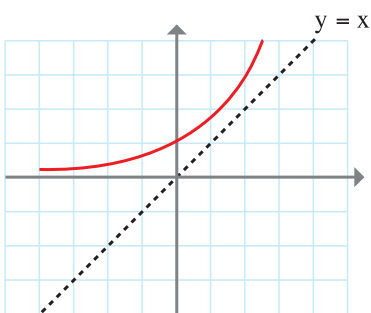
الف)  $y = \log_2(x - 2)$

ب)  $y = \log_3 x$

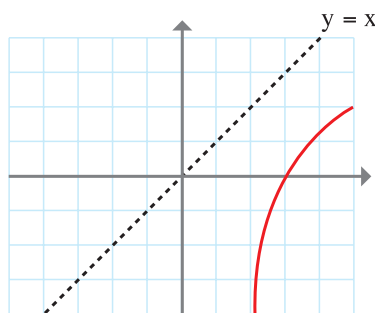
ج)  $y = 2^{-x}$

د)  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

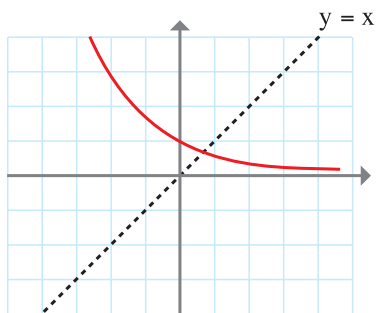
هـ)  $y = 2 + \log_2 x$



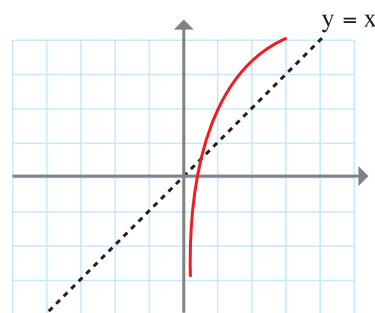
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

مجدداً به فعالیت های ۱ و ۲ و ۳ توجه کنید. ملاحظه می کنید که تابع لگاریتمی برای مقادیر مثبت  $x$  تعریف می شود.

دامنه تعریف توابع لگاریتمی مقادیر مثبت است و برد توابع لگاریتمی مجموعه  $\mathbb{R}$  است.

### محاسبه‌ی لگاریتم یک عدد

تابع  $f(x) = \log_3 x$  را در نظر بگیرید. می‌خواهیم  $f(81)$  را به دست آوریم:

فرض کنیم:  $f(81) = y$  یا  $\log_3 81 = y$

از تعریف لگاریتم داریم:  $81 = 3^y$  و یا  $3^4 = 3^y$  و در نتیجه:  $y = 4$

مثال

$\log_8 2$  و  $\log_{\frac{1}{3}} 81$  را محاسبه کنید.

الف)  $\log_8 2 = y$

$$2 = 8^y$$

$$2 = 2^{3y}$$

$$1 = 3y$$

$$y = \frac{1}{3}$$

ب)  $\log_{\frac{1}{3}} 81 = y$

$$81 = \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

$$81 = 3^{-y}$$

$$y = -4$$

تمرین  
مثال

۱- نشان دهید که:

۱)  $\log_4 16 = 2$

۲)  $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

۲- مقدار  $\log_5 5$  و  $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6}$  را محاسبه کنید. در حالت کلی  $a \neq 1$  و  $a > 0$  و  $\log_a a$  را

محاسبه و عبارت زیر را کامل کنید.

لگاریتم هر عدد a در پایه ی ..... مساوی ..... است.

۳- در عبارت های زیر y را بیابید.

الف)  $\log_4 1 = y$       ب)  $\log_2 8 = y$       ج)  $\log_{10} 0.01 = y$       د)  $\log_{\frac{1}{6}} 36 = y$

### معادله ی لگاریتمی

عبارت های زیر نمونه هایی از معادلات لگاریتمی هستند.

۱)  $\log_{10} x = 2$

۲)  $\log_3 x = \log_3 5$

۳)  $\log_2 x + \log_2 5 = 4$

۴)  $\log_2(x+1) + \log_2 x = \log_2 6$

منظور از حل معادله ی لگاریتمی یافتن مقدار و یا مقدارهایی برای x است که در معادله صدق کند.

مثال

معادلات لگاریتمی زیر را با توجه به تعریف لگاریتم حل می کنیم.

الف)  $\log_{10} x = 2$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

ب)  $\log_5 x = -1$

$$x = 5^{-1}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

۱)  $\log_3 x = 4$

۲)  $\log_2(x-1) = -1$

۳)  $\log_{0.1} x = \frac{1}{3}$

در حل بسیاری از معادلات لگاریتمی به حالتی می‌رسیم که در طرفین تساوی دو لگاریتم قرارداد. برای ادامه حل به مفهوم زیر نیاز داریم:

- اگر  $a > 0$  و  $a \neq 1$  باشد آن‌گاه از تساوی  $\log_a x = \log_a z$  می‌توان تساوی  $x = z$  را نتیجه گرفت و بالعکس.

مثال

$$۱) \log_2 x = \log_2 \sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$۲) \log_5 (2x - 1) = \log_5 x$$

$$2x - 1 = x$$

$$x = 1$$

$$۳) \log_v (x^2 - 2) = \log_v x$$

$$x^2 - 2 = x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x = 2, x = -1$$

$$۴) \log_5 x = \log_5 7$$

$$x = 7$$

در مثال شماره ۳،  $x = -1$  قابل قبول نیست زیرا لگاریتم برای اعداد مثبت تعریف می‌شود. به بیان دیگر  $x = -1$  در دامنه‌ی تعریف لگاریتم‌های معادله‌ی فوق نیست.

تمرین

معادلات زیر را حل کنید: (جواب‌های قابل قبول برای معادلات زیر را مشخص کنید.)

$$۱) \log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$$

$$۲) \log_{10} (x^2 - 30) = \log_{10} x$$

$$۳) \log_x 16 = 2$$

## قوانین (قضایا) لگاریتم ها

هنگام حل بسیاری از مسائل واقعی در فیزیک، پزشکی، زمین شناسی و ... که در آن ها معادلات لگاریتمی به کار رفته است نیازمند استفاده از قوانینی که بین لگاریتم ها برقرار است می شویم. به همین جهت در این بخش به بیان و اثبات این قوانین می پردازیم.

$$\text{همان طور که می دانیم: } 16 \times 128 = 2^4 \times 2^7 = 2^{4+7}$$

می خواهیم ببینیم که آیا درباره لگاریتم ها نیز می توان نوشت:  $\log_2 2^4 \times 2^7 = \log_2 2^4 + \log_2 2^7$  دو طرف تساوی را جداگانه محاسبه می کنیم.

$$\log_2 16 \times 128 = \log_2 2^4 \times 2^7 = \log_2 2^{11} = y \quad \log_2 2^4 = a \quad \log_2 2^7 = b$$

$$2^{11} = 2^y \quad \text{مطابق تعریف لگاریتم} \quad 2^4 = 2^a \quad 2^7 = 2^b$$

$$y = 11 \quad a = 4 \quad b = 7$$

$$\text{بنابراین: } \log_2 2^4 + \log_2 2^7 = a + b = 4 + 7 = 11$$

در حالت کلی نیز می توان ثابت کرد که:

برای اعداد حقیقی و مثبت  $a, b, c$  که  $(c \neq 1)$

$$\log_c a \cdot b = \log_c a + \log_c b$$

حال به اثبات رابطه بالا می پردازیم. با فرض اینکه  $\log_c ab = p$ ، از تعریف لگاریتم داریم:

$$ab = c^p$$

$$\log_c b = n, \log_c a = m$$

$$b = c^n, a = c^m$$

$$ab = c^m \times c^n = c^{m+n}$$

$$ab = c^p$$

$$ab = c^{m+n}$$

بنابراین :  $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$  یا  $c^p = c^{m+n}$

مثال

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 10 = 1$$

برای هر عدد حقیقی مثبت  $a, b, c$  که  $(c \neq 1)$  است می توان ثابت کرد که:

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

مثال

برای محاسبه ی  $\log_{10} \frac{1}{10}$  می توان نوشت :

$$\log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 1 - \log_{10} 10 = 0 - 1 = -1$$

از اینکه  $\log_3 5 = 1/4650$  و  $\log_3 20 = 2/7268$  است، استفاده می کنیم و  $\log_3 4$  را محاسبه می نماییم.

$$\log_3 4 = \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 20 - \log_3 5 = 1/2618$$

ثابت کنید  $\log_c a^x = x \log_c a$  و  $\log_c a^x = m$  و  $\log_c a = n$  (راهنمایی: فرض کنید  $\log_c a = n$ ,  $\log_c a^x = m$ )

الف)  $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

ب)  $2 \log_1 \sqrt{2} + \log_1 5 = \log_1 (\sqrt{2})^2 + \log_1 5 = \log_1 2 + \log_1 5 = \log_1 10 = 1$

۱- درستی تساوی  $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$  را تحقیق کنید. a) b و c و d

اعداد حقیقی مثبت اند و  $c \neq 1$  است.)

۲- نشان دهید که:  $\log 3^5 = 5 \log 3$

۳- از تساوی  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$  استفاده کنید و رابطه‌ی  $\log_c a^n = n \log_c a$  را نتیجه بگیرید.

۴- حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید:

۱)  $\log_1 100$     ۲)  $\log_1 1000$     ۳)  $\log_1 4 + \log_1 25$     ۴)  $2 \log_1 4 + \log_1 4$   
۵- اگر  $\log_1 2 = m$ ,  $\log_1 3 = n$  باشد عبارات زیر را محاسبه کنید: (بر حسب n, m)

۱)  $\log_1 18$                       ۲)  $\log_1 32 + \log_1 27$

۶- از این که  $\log_4 2 = \frac{1}{2}$  استفاده کنید و  $\log_4 32$  را محاسبه کنید.

۷- حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

۱)  $\log_2 16$     ۲)  $\log_7 \frac{1}{49}$     ۳)  $\log_2 \sqrt{8}$     ۴)  $\log_3 54 - \log_3 2$

۵)  $2 \log_1 5 + \log_1 4$     ۶)  $2 \log_1 2 + \log_1 250$

۷)  $\log_1 24 - \frac{1}{2} \log_1 9 + \log_1 125$     ۸)  $3 \log_1 \sqrt[3]{4} - \log_1 25$

## حل معادلات لگاریتمی با استفاده از قوانین لگاریتم ها

از قوانین لگاریتم ها استفاده کرده و مثال هایی از معادلات لگاریتمی را حل می کنیم.

مثال

$$1) \quad 3 \log_5 x - \log_5 4 = \log_5 16$$

$$\log_5 x^3 - \log_5 4 = \log_5 16$$

$$\log_5 \frac{x^3}{4} = \log_5 16 \Rightarrow \frac{x^3}{4} = 16 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$$

اگر در معادله ی اصلی به جای  $x$  عدد ۴ را قرار دهیم :

$$3 \log_5 4 - \log_5 4 = \log_5 16$$

$$2 \log_5 4 = \log_5 16$$

$$2 \log_5 4 = \log_5 4^2$$

بنابراین جواب  $x=4$  قابل قبول است.

۲)

$$\log_3 x + \log_3 (2x + 1) = 1$$

$$\log_3 x(2x + 1) = 1$$

$$2x^2 + x = 3^1$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

جواب ها را در معادله ی اصلی قرار می دهیم :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = 1, x = -\frac{3}{2}$$

$$\log_3 1 + \log_3 3 = 1$$

$$\log_3 \left(-\frac{3}{2}\right) + \log_3 2 \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = 1$$

توجه کنید که  $x = -\frac{3}{2}$  در دامنه ی تعریف لگاریتم ها نیست و بنابراین جواب قابل قبول برای

معادله ی لگاریتمی نیست. بنابراین تنها جواب  $x=1$  در معادله ی اصلی صدق می کند.



۱- معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$۱) \log_9 x = \frac{3}{2}$$

$$۲) \log_{\Delta}(x+1) = \frac{1}{2}$$

$$۳) \log_{10}(4-x) = \log_{10}(6-x) - \log_{10} x$$

$$۴) \log_3 5 + \log_3 x = \log_3 10$$

$$۵) \log_4 a + \log_4 9 = \log_4 27$$

$$۶) \log_{10} 16 - \log_{10} 2x = \log_{10} 2$$

$$۷) \log_v 24 - \log_v(x+5) = \log_v 8$$

$$۸) \log_2 n = \frac{1}{4} \log_2 16 + \log_2 49$$

$$۹) \log_a 4n - 2 \log_a x = \log_a x$$

$$۱۰) \log_b 8 + 3 \log_b n = 3 \log_b(x-1)$$

$$۱۱) \log_{10} z + \log_{10}(z+3) = 1$$

$$۱۲) \log_6(a^2+2) + \log_6 2 = 2$$

$$۱۳) \log_2(t+2) + \log_2(t-2) = 1$$

$$۱۴) \log_4 x + \log_4(x-6) = 2$$

$$۱۵) \log_{\frac{1}{10}}(x^2-1) = -1$$

۲- برای هر عدد حقیقی و مثبت که  $c, e, a, x$  که  $(c, e \neq 1)$  است ثابت کنید.

$$۱) \log_c \frac{1}{x} = -\log_c x$$

$$۲) \log_c a = \frac{\log_e a}{\log_e c}$$

$$۳) c^{\log_c a} = a$$

$$۴) \log_c c^a = a$$

۳- با استفاده از قوانین لگاریتم ها یا هر راه حل دیگر نشان دهید که :

$$۱) \log_{27} 3 \times \log_3 27 = 1 \quad ۲) \log_v 49 = 2 \log_v 7 = 2 \quad ۳) \log_3(\log_3(\log_3 8)) = 0$$

۴- کدام راه حل درست و کدام یک نادرست است؟ استدلال کنید.

$$۱) \log_3 x = 9$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

$$۲) \log_3 x = 9$$

$$x = 3^9$$

$$x = 19083$$

۵- آیا راه حل زیر درست است؟

$$\log_1 (2x - 1) = 0$$

استدلال کنید.

$$\log_1 2x - \log_1 1 = 0$$

$$\log_1 2x - 0 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

۶- معادله ی  $\log_1 (x + 2) = \log_1 8 - \log_1 (x - 5)$  را حل کنید.

چگونه می توانید از درستی جواب به دست آمده اطمینان حاصل کنید؟

۷- با توجه به نمودار تابع  $y = \log_2 x$  نمودار تابع  $y = \log_2 (x + 1)$  و تابع معکوس آن را

رسم کنید.

۸- یکی از کاربردهای مفهوم لگاریتم در شیمی، محاسبه ی pH یک محلول است. بر طبق

تعریف، pH معیاری از میزان اسیدی، بازی (قلیایی) یا خنثی بودن یک محلول است و از رابطه ی

زیر به دست می آید.

$$\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}_3\text{O}^+]$$

در این رابطه  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  غلظت یون هیدرونیوم<sup>۱</sup> را نشان می دهد.

الف) pH هریک از محلول های زیر را حساب کنید.

۱- در آب پرتقال غلظت یون هیدرونیوم ( $\text{H}_3\text{O}^+$ ) برابر  $10^{-4} \times 2/9$  مول بر لیتر است.

۱. یون هیدرونیوم،  $\text{H}_3\text{O}^+$ ، از جمله یون های چند اتمی مهمی است که در فرآیندهای زیستی اهمیت بسیاری دارد و واحد

اندازه گیری آن مول بر لیتر است.

$$(\log 29 = 1/46)$$

۲- در شیر منیزی (شربت معده) غلظت یون هیدرونیوم ( $H_3O^+$ ) برابر  $10^{-11} \times 2/5$  مول بر لیتر است.

$$(\log 25 = 1/39)$$

۳- در آب خالص غلظت یون هیدرونیوم ( $H_3O^+$ ) برابر  $10^{-7} \times 1$  مول بر لیتر است.

ب) محلول‌ها را بر مبنای مقدار pH آن‌ها به سه دسته به صورت زیر تقسیم می‌کنند.

۱) اسیدی  $pH < 7$

۲) خنثی  $pH = 7$

۳) بازی  $pH > 7$

مقدار غلظت یون هیدرونیوم در محلول خنثی چند مول بر لیتر است؟

## خواندنی

- زمین لرزه یا زلزله، لرزش و جنبش خفیف یا شدید زمین است که به علت آزاد شدن انرژی ناشی از گسیختگی سریع در پوسته زمین در مدتی کوتاه به وقوع می پیوندد. محلی که منشأ زلزله از آنجا شروع شده و انرژی از آن خارج می شود را کانون زلزله و نقطه‌ی بالای کانون در سطح زمین را مرکز زلزله می گویند.

بزرگی زمین لرزه از رابطه لگاریتمی  $\log E = 11/4 + 1/5M$  به دست می آید که در آن M بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر و E انرژی آزاد شده در واحد ارگ است. رابطه‌ی فوق نشان می دهد که با افزایش یک درجه‌ای M مقدار انرژی آزاد شده تقریباً ۳۲ برابر می گردد. انرژی یک زلزله‌ی ۸ ریشتری را برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن ماده‌ی انفجاری TNT برآورد کرده اند.

$$\log E = 11/4 + 1/5 \times 8 = 23/4 \Rightarrow E = 10^{23/4}$$

زلزله‌ها از جنبه‌ی آزاد شدن انرژی به دو صورت افقی و عمودی تقسیم بندی می گردند. خرابی‌های عمده و وسیع معمولاً بر اثر زلزله‌هایی از نوع افقی صورت می گیرد.

البته باید توجه داشت که میزان انرژی رسیده به هر نقطه از سطح زمین علاوه بر میزان انرژی آزاد شده در مرکز به مجموعه عواملی از قبیل فاصله از مرکز زلزله، جنس خاک، مقاومت بنا و ... بستگی دارد.

زلزله‌ای که در سال ۱۳۶۹ در منطقه‌ی رودبار رخ داد ۷/۳ ریشتر بود. میزان انرژی آزاد شده در مرکز زلزله را تخمین بزنید.

همچنین بزرگی زلزله‌ی بم در سال ۱۳۸۲، ۶/۶ ریشتر گزارش شده است. میزان انرژی آزاد شده در این منطقه را تخمین بزنید.