۸

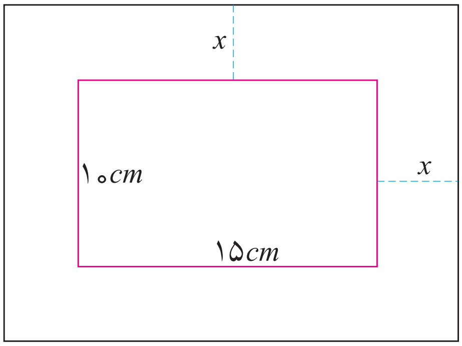
معادلات درجه دوم و حل آن‌ها

معمولاً چتربازان پس از کمی سقوط آزاد، چتر خود را باز می‌کنند. فکر می‌کنید چه مدت طول می‌کشد که یک چتر باز ۲۰ متر سقوط آزاد کند؟

معادلات درجه دوم

مریم می‌خواهد برای یکی از عکس‌های خانوادگی خود که ۱۵ سانتی‌متر طول و ۱۰ سانتی‌متر عرض دارد، یک قاب عکس تهیه کند. عکس باید از کناره‌های قاب فاصله‌های مساوی داشته باشد و می‌خواهیم نسبت مساحت قاب (S_1) به مساحت عکس (S_2) $\frac{5}{4}$ باشد. طول و عرض این قاب چقدر باید باشد؟

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{4}$$



اگر عرض حاشیه ایجاد شده در قاب موردنظر را x بنامیم، طول و عرض قاب $15 + 2x$ و $10 + 2x$ خواهد بود، پس $S_1 = (15 + 2x)(10 + 2x)$ و $S_2 = 15 \times 10$ و باید داشته باشیم.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(15+2x)(10+2x)}{15\times 10} = \frac{5}{4}$$

رابطهٔ بالا یک معادله برحسب x است و باید به دنبال مقداری برای x بگردیم تا تساوی بالا برقرار شود. آن مقادیری از x که تساوی بالا را برقرار می‌کنند جواب‌های معادلهٔ بالا نامیده می‌شوند.

معادله‌هایی را که پس از ساده کردن، بالاترین درجه متغیر آن ۲ باشد معادله درجه دوم می‌نامند.

معادله مربوط به قاب عکس یک معادله درجه دوم است، زیرا پس از ساده کردن به صورت زیر درمی‌آید.

$$8x^2 + 100x - 75 = 0$$

مثال : یک نخ به طول یک متر در اختیار داریم و می‌خواهیم با آن یک مستطیل بسازیم که مساحت آن ۶۰۰ سانتی‌مترمربع باشد. طول و عرض این مستطیل چقدر باید باشد؟

اگر طول و عرض این مستطیل را برحسب سانتی‌متر x و y بنامیم باید داشته باشیم $2(x+y) = 100$ و $xy = 600$.

از معادله اول نتیجه می‌شود $y = 50 - x$ و با جایگذاری در معادله دوم داریم $x(50 - x) = 600$. این نیز یک معادله درجه دوم برحسب x است، زیرا پس از ساده کردن به شکل $x^2 - 50x + 600 = 0$ در می‌آید.

مثال : اعدادی بیابید که مربع آن‌ها ۱۲ واحد بیشتر از خودشان باشد. اگر چنین عددی را x بنامیم، باید داشته باشیم $x^2 = x + 12$. این یک معادله درجه دوم برحسب x است و جواب‌های این معادله همان اعداد موردنظر هستند.

آیا هر معادله درجه ۲ جواب دارد؟ به عنوان مثال، آیا عددی هست که جمع مربع آن با ۱ صفر شود؟ اگر چنین عددی وجود داشته باشد، جواب معادله $x^2 + 1 = 0$ خواهد بود. اما مربع هر عددی نامنفی است و اگر با ۱ جمع شود صفر نخواهد شد. پس این معادله جواب ندارد.

در مثال قبل اعدادی وجود دارند که مربع آن‌ها ۱۲ واحد بیشتر از خودشان باشند. ۴ یکی از این اعداد است زیرا $12 + 4 = 4^2$ در این مثال، جواب دیگری هم وجود دارد. (-3) نیز جواب این مسئله است، $12 + (-3) = (-3)^2$.

خوارزمی

ابوعبداللّه محمدبن موسی خوارزمی متولد قبل از ۱۶۵هـ.ق. ریاضی‌دان، منجم و مورخ و جغرافی‌دان ایرانی و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم عصر خود بود، به گونه‌ای که سدهٔ نهم میلادی را عصر خوارزمی می‌نامیدند. ازجمله معروف‌ترین کتاب‌های او کتاب الجبر و المقابله بوده است که تا قرن ۱۶میلادی مبنای مطالعات علمی ریاضی‌دانان اروپایی بوده است. خوارزمی در این کتاب به جای مجهول درجه اول (یعنی x) از کلمهٔ شیء به مفهوم چیز نامعلوم استفاده می‌کند. هنگامی که اروپائیان کتاب‌های مسلمانان را به زبان خود ترجمه می‌کردند، کلمهٔ عربی «شیء» را هم با اندکی تحریف با تلفظ xei به همین شکل برگزیدند و پس از آن که نوشتن معادلات به صورت نمادگذاری معمول شد اروپائیان «x» را که حرف اول آن واژه است به جای مجهول درجه اول اختیار کردند. او نخستین کسی است که علم جبر را به طور مستقل جبر و مقابله نامید. او روش تازه حساب را که به الگوریتم شهرت داشت در کتاب الجمع والتفریق حساب الهند آورده است. او همه انواع معادلات را به چند نوع استاندارد تبدیل و به کمک چند قاعده به حل آن‌ها می‌پردازد. از خوارزمی کتاب‌های دیگری نظیر کتاب الحساب و صورة الارض وجود دارد. او در سال ۲۳۳ هـ. درگذشت.

روش‌های حل معادلات درجه دوم

برای حل معادلات درجه دوم روش‌های متعددی وجود دارد که در این بخش برخی از آن‌ها را توضیح خواهیم داد.

روش آزمون و خطا

ساده‌ترین روش حل معادله‌های درجه دوم، روش آزمون و خطا است که یک جواب تقریبی به دست می‌دهد و در مورد معادلات پیچیده‌تر نیز می‌توان آن را به کار برد.

فعالیت

می‌خواهیم معادله $x^{۲} - ۱۲x + ۳۴ = ۰$ را حل کنیم.

۱ــ جدول زیر را کامل کنید.

x	۰	۱	۲
$x^{۲} - ۱۲x + ۳۴$			

۲ــ آیا با اضافه شدن مقادیر x، مقادیری که برای $x^{۲} - ۱۲x + ۳۴$ یافته‌اید در حال نزدیک شدن به صفر است؟

۳ــ مقادیر x در سطر اول را ادامه دهید تا جایی که مقادیر سطر دوم هم‌چنان به صفر نزدیک شوند و در جایی منفی شوند.

۴ــ مقدار $x^{۲} - ۱۲x + ۳۴$ به ازای $x = ۴$، مثبت و به ازای $x = ۵$، منفی است. ثابت می‌شود که در چنین حالتی یک جواب معادله بین ۴ و ۵ است. برای یافتن دقیق‌تر جواب جدول زیر را کامل کنید.

x	۴	۴/۳	۴/۵	۴/۸	۵
$x^{۲} - ۱۲x + ۳۴$					

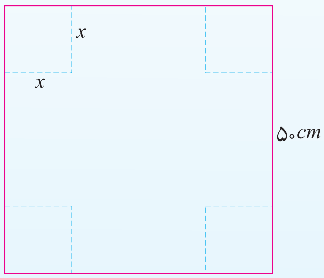
۵ ــ با استفاده از جدول، مقادیری برای x بیابید که جواب معادله بین آن‌ها باشد.

۶ ــ روش بالا را تکرار کنید و در فاصله‌های کوچکتر به دنبال جواب بگردید. جواب این معادله را با دقت یک رقم اعشار تعیین کنید.

البته، یک معادله درجه دوم ممکن است دو جواب داشته باشد و با روش بالا فقط یکی از جواب‌ها به‌طور تقریبی محاسبه می‌شود. برای به‌دست آوردن جواب دیگر باید حدسی در مورد مقدار آن جواب داشته باشیم. با تکرار روش بالا و مقداردهی مناسب به متغیر، می‌توانیم به آن جواب برسیم.

تمرین در کلاس

در یک مغازه شیرینی فروشی، با مقواهای مربعی به طول ۵۰ سانتی‌متر و بریدن گوشه‌های آن به صورت مربع و تا کردن کناره‌های آن، جعبه می‌سازند. از گوشه‌های مربع بزرگ، چه مربع‌هایی را ببریم تا حجم جعبه ساخته شده، ۷۰۰۰ سانتی‌مترمکعب شود.



۱ــ طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شوند را x بنامید و حجم جعبه ساخته شده را برحسب x بنویسید.

۲ــ معادله‌ای تشکیل دهید که با حل آن، جواب مسئله به دست آید.

۳ــ این معادله، یک معادله درجه دوم نیست، ولی با روش آزمون وخطا، یک جواب تقریبی با دقت یک رقم اعشار برای آن پیدا کنید.

مسائل

۱ــ با دقت دو رقم اعشار و با استفاده از روش آزمون و خطا، یکی از دو جواب معادله $۲x^{۲} - ۲x - ۱ = ۰$ را حساب کنید.

۲ــ حل تقریبی معادله $x^{۲} - ۲ = ۰$ به معنی محاسبه تقریبی $\sqrt{۲}$ است. با استفاده از روش آزمون و خطا، $\sqrt{۲}$ را با دقت دو رقم اعشار حساب کنید.

روش هندسی

معادله $x^{۲} - ۶x + ۷ = ۰$ را در نظر بگیرید. این معادله را به صورت $x^{۲} = ۶x - ۷$ می‌نویسیم. می‌توانیم بگوییم جواب این معادله آن مقداری از x است، که به ازای آن مقدار دو چند جمله‌ای $x^{۲}$ و $۶x - ۷$ با هم برابر شوند. همانند روش آزمون و خطا می‌توان عمل کرد و با حدس مقادیر مختلف برای x، مقادیر $x^{۲}$ و $۶x - ۷$ را محاسبه می‌کنیم و با انتخاب‌های مناسب برای x، کاری می‌کنیم که مقدار این دو چندجمله‌ای به هم نزدیک شوند.

فعالیت

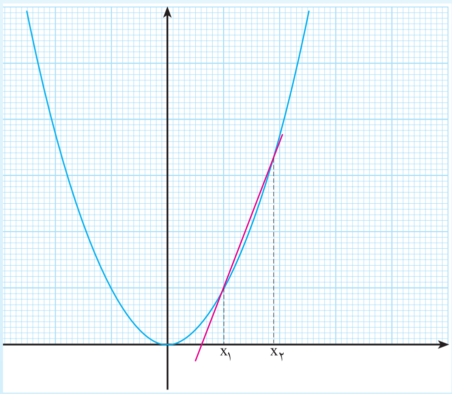
می‌خواهیم معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ را حل کنیم.

۱ــ جدول زیر را کامل کنید.

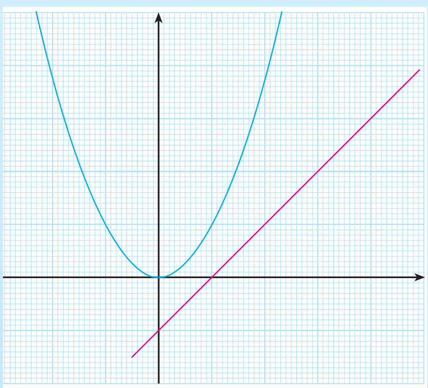
x	-1	0	1	2	3
x^2	1	0	1		
$2x+1$	-1	1			

۲ــ اعداد قرار گرفته در این جدول را می‌توان به صورت نمودار دو معادله $y = x^2$ و $y = 2x + 1$ در صفحه نمایش داد. جاهایی که مقدار این دو چندجمله‌ای مساوی می‌شوند، چه نقطه‌هایی از این دو نمودار را نشان می‌دهند؟

۳ــ در جدول به ازای هیچ مقداری از x دو چند جمله‌ای x^2 و $2x + 1$ مساوی نشده‌اند. با رسم نمودارهای معادلات $y = x^2$ و $y = 2x + 1$ و یافتن محل‌های تقاطع این دو نمودار و اندازه‌گیری طول نقطه‌های تقاطع، به‌طور تقریبی جواب‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ را به دست آورید.



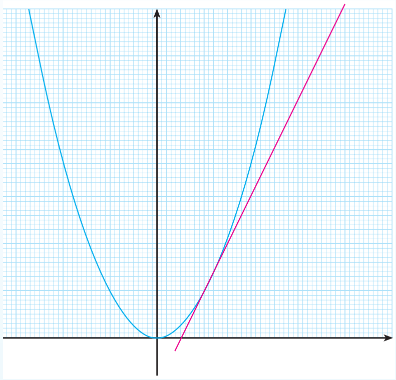
مثال ۱ : برای حل یک معادله درجه دوم مانند $5x^2 - 14x + 9 = 0$، می‌توانیم آن را به صورت $x^2 = \frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ بنویسیم. اگر نمودارهای معادله $y = x^2$ و خط $y = \frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ را رسم کنیم، محل‌های برخورد این دو نمودار جاهایی را نشان می‌دهد که به ازای مقدارهایی از x مقدارهای x^2 و $\frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ مساوی شده‌اند. این مقدارهای x همان طول نقاط تقاطع نمودارها هستند و جواب معادله می‌باشند.



مثال ۲ : وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - x + 1 = 0$ را با روش هندسی تعیین کنید.

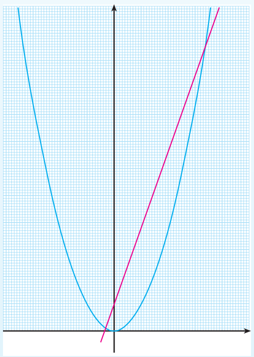
این معادله را به صورت $x^2 = x - 1$ می‌نویسیم. اگر نمودار معادله $y = x^2$ و خط $y = x - 1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس این معادله جواب ندارد.

مثال ۳ : وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - 2x + 1 = 0$ را با روش هندسی تعیین کنید.



این معادله را به صورت $x^2 = 2x - 1$ می‌نویسیم. اگر نمودار معادله $y = x^2$ و خط $y = 2x - 1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها حالت مماس بر هم دارند. حدس می‌زنیم معادله فقط یک جواب دارد. با محاسبات جبری باید درستی حدس خود را بیازماییم.

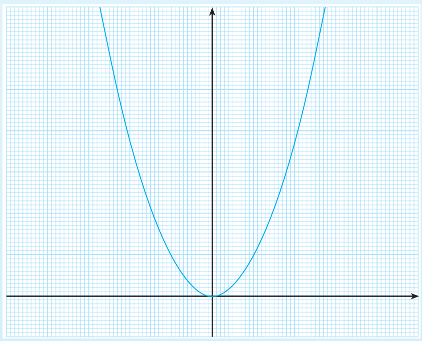
مثال ۴ : وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1$ را با روش هندسی تعیین کنید.



این معادله را به صورت $x^2 = 3x + 1$ می‌نویسیم. اگر نمودار معادله $y = x^2$ و خط $y = 3x + 1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. پس این معادله دو جواب دارد.

تمرین در کلاس

۱ــ نمودارهای خط‌های $y = 2x - 2$ و $y = 2x - 1$ و $y = 2x + 1$ را رسم کنید و محل تقاطع آن‌ها را با نمودار $y = x^2$ تعیین کنید.

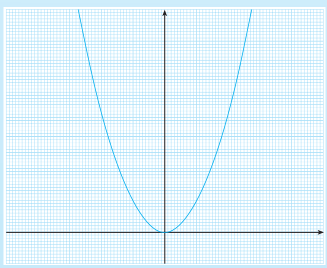


۲ــ از میان معادلات $x^2 - 2x + 2 = 0$ و $x^2 - 2x + 1 = 0$ و $x^2 - 2x - 1 = 0$ تعیین کنید کدام‌یک جواب دارند و چند جواب دارند.

مسائل

۱ــ با رسم نمودار نشان دهید معادله $x^2 + 4 = 0$ جواب ندارد.

۲ــ معادلات زیر را با روش رسم نمودار حل کنید و جواب‌های آن را به‌طور تقریبی به‌دست آورید.



الف) $x^2 + x + 1 = 0$ ب) $x^2 - 4x + 3 = 0$

ج) $4x^2 - 8x = 0$

روش تجزیه

در مواردی، معادله درجه دوم به صورت ضرب دو چندجمله‌ای درجه ۱ مساوی صفر است. به عنوان مثال معادله $(x-۱)(۲x+۳)=۰$ را در نظر بگیرید. حل این گونه معادلات بسیار ساده است، زیرا طبق یکی از خواص اساسی اعداد،

برای آن که ضرب دو عدد صفر شود باید حداقل یکی از آن دو عدد صفر باشد.

بنابراین $(x-۱)(۲x+۳)$ فقط در حالتی صفر است که $x-۱$ یا $۲x+۳$ صفر شوند. پس، جواب‌های دو معادله $x-۱=۰$ و $۲x+۳=۰$، همان جواب‌های معادله $(x-۱)(۲x+۳)=۰$ است.

یک معادله درجه دوم به صورت تساوی یک چندجمله‌ای درجه دوم با صفر است. اگر بتوانیم این چندجمله‌ای را تجزیه کنیم، می‌توانیم به روش بالا آن را حل کنیم. این روش حل را روش تجزیه می‌نامند.

مثال ۱ : معادله $x^۲-۵x=۰$ را حل کنید.

این معادله را به صورت $x^۲-۵x=x(x-۵)=۰$ می‌نویسیم. در نتیجه جواب‌های آن $x=۰$ و $x=۵$ خواهند بود.

مثال ۲ : معادله $x^۲-۵x+۶=۰$ را حل کنید.

چندجمله‌ای $x^۲-۵x+۶$ را تجزیه می‌کنیم. $x^۲-۵x+۶=(x-۳)(x-۲)$، درنتیجه جواب‌های این معادله $x=۲$ و $x=۳$ خواهند بود.

مثال ۳ : معادله $۲x^۲-۵x-۳=۰$ را حل کنید.

می‌توان چندجمله‌ای $۲x^۲-۵x-۳$ را تجزیه کرد. این چندجمله‌ای را در فصل ۴ با روش‌های معمول تجزیه کرده‌ایم.

$$۲x^۲-۵x-۳=(x-۳)(۲x+۱)$$

بنابراین، معادله اصلی را می‌توانیم به صورت $(x-۳)(۲x+۱)=۰$ بنویسیم. در نتیجه جواب‌های این معادله $x=۳$ و $x=-\frac{۱}{۲}$ خواهند بود.

اگر بتوانیم چندجمله‌ای مربوط به یک معادله درجه دوم را تجزیه کنیم به دو معادله درجه اول می‌رسیم که جواب دارند. بنابراین آن دسته از معادلات درجه دوم که جواب ندارند، چند جمله‌ای آن‌ها قابل تجزیه نخواهد بود.

آخرین مثال نشان می‌دهد که کاربرد روش تجزیه بسیار محدود است، زیرا عمل تجزیه در بسیاری موارد کار آسانی نیست.

مسائل

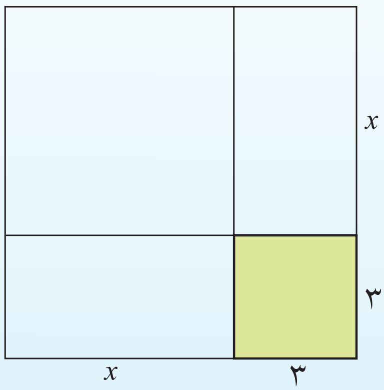
۱ــ معادلات زیر را با روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^۲-۷x+۶=۰$ ب) $(x-۱)(x+۱)=(x-۱)$ ج) $۴x^۲+۳x-۲=۰$

روش خوارزمی

خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم شش حالت خاص را بررسی کرده است. از میان این حالت‌ها فقط یکی از آن‌ها را توضیح خواهیم داد.

معادله $x^۲ + ۶x - ۴۰ = ۰$ را در نظر بگیرید. در روش خوارزمی جمله‌های دارای مجهول را در یک طرف تساوی نگه می‌داریم و عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم. بنابراین، این معادله را به صورت $x^۲ + ۶x = ۴۰$ می‌نویسیم. نصف ضریب x را حساب می‌کنیم که در اینجا عدد ۳ است. مساحت مربعی با ضلع $x + ۳$ را می‌توان حساب کرد.



در شکل روبه‌رو مساحت مربع رنگی برابر ۳×۳ است و بقیه مربع، مساحت $x^۲ + ۶x$ دارد که آن هم برابر ۴۰ است. پس کل مربع بزرگ، مساحت $۴۹ = ۴۰ + ۹$ دارد. پس، طول ضلع مربع بزرگ برابر $\sqrt{۴۹} = ۷$ است، یعنی $x + ۳ = ۷$. در نتیجه $x = ۴$.

تمرین در کلاس

معادله $x^۲ + ۲x - ۴ = ۰$ را با روش خوارزمی حل کنید.

همه معادلات درجه دوم را نمی‌توان با این روش حل کرد، زیرا این روش نیازمند یک تعبیر هندسی از معادله است و برخی معادلات را نمی‌توان با این روش تعبیر هندسی کرد. علاوه بر این، با این تعبیر هندسی، فقط یکی از جواب‌های معادلات درجه دوم به‌دست می‌آید. خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم در حالت‌های دیگر روش‌های دیگری را ساخته است.

مسائل

۱ــ معادلات زیر را با روش خوارزمی حل کنید.

الف) $x^۲ + ۴x - ۵ = ۰$

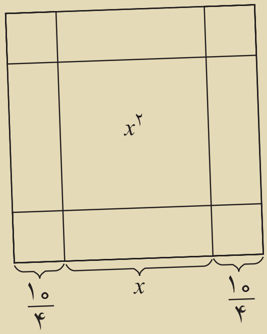
ب) $۴x^۲ + ۴x - ۳ = ۰$

ریاضی‌دانان مسلمان به‌جای x^3، لفظ «مکعب»، به‌جای x^2 لفظ «مال»، به‌جای x، لفظ «ریشه»، «شئ»، «ضلع» یا «جذر» و به‌جای مقدار عددی لفظ «درهم» یا «عدد» را به کار می‌بردند.

خیام و خوارزمی روش مشابهی را برای اثبات جواب معادلهٔ «مالی و دَه جذر معادل سی و نه درهم» به کار برده‌اند.

این معادله را با زبان امروزی بنویسید.

آیا می‌توانید از روی شکل اثبات را تکمیل کنید؟



روش مربع کامل

در این روش با استفاده از جملات شامل متغیر یک مربع کامل می‌نویسیم و سپس با تغییرات مناسب معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۱ : معادله $x^2 - 20x + 30 = 0$ را حل کنید.

نصف ضریب x عدد -10 است و چندجمله‌ای $(x-10)^2$ را در نظر می‌گیریم. این چندجمله‌ای رابطه مشخصی با چندجمله‌ای $x^2 - 20x$ دارد.

$$(x-10)^2 = (x^2 - 20x) + 100$$

با توجه به تساوی بالا می‌توانیم معادله اصلی را به صورت $(x-10)^2 - 100 + 30 = 0$ بنویسیم که پس از ساده‌سازی به صورت $(x-10)^2 = 70$ درمی‌آید. در نتیجه $x - 10$ برابر ریشه‌های دوم 70 است، یعنی

$$x - 10 = \pm\sqrt{70}$$

جواب‌های این معادله عبارتند از : $x = 10 + \sqrt{70}$ و $x = 10 - \sqrt{70}$.

در روش به‌کار گرفته شده در مثال فوق، چندجملهٔ $x^2 - 20x$ را برحسب $(x-10)^2$ نوشتیم، بنابراین روش را **روش مربع کامل** می‌نامند.

مثال ۲ : معادله $x^2 - 2bx + 15 = 0$ را حل کنید.

در این‌جا، نصف ضریب x برابر $(-b)$ است و چندجمله‌ای $x^2 - 2bx$ را برحسب $(x-b)^2$ می‌نویسیم.

$$(x-b)^2 = (x^2 - 2bx) + b^2$$

پس، معادله اصلی به صورت $(x-b)^۲ - b^۲ + ۱۵ = ۰$ نوشته می‌شود. پس :

$$(x-b)^۲ = b^۲ - ۱۵$$

$$x - b = \pm\sqrt{b^۲ - ۱۵}$$

$$x = b + \sqrt{b^۲ - ۱۵} \quad \text{و} \quad x = b - \sqrt{b^۲ - ۱۵}$$

این محاسبه وقتی قابل قبول است که $b^۲ - ۱۵$ عددی نامنفی باشد تا ریشه‌گیری از آن امکان‌پذیر باشد. پس شرط داشتن جواب در این معادله، نامنفی بودن $b^۲ - ۱۵$ است.

مثال ۳ : معادله $۳x^۲ - ۲x + c = ۰$ را حل کنید.

ابتدا کاری می‌کنیم که ضریب $x^۲$ برابر ۱ شود. طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و معادله $x^۲ - \frac{۲}{۳}x + \frac{c}{۳} = ۰$ را به‌دست می‌آوریم. حال روش قبلی را تکرار می‌کنیم.

در این‌جا، نصف ضریب x برابر $(-\frac{۱}{۳})$ است و چندجمله‌ای $x^۲ - \frac{۲}{۳}x$ را برحسب $(x - \frac{۱}{۳})^۲$ می‌نویسیم.

$$(x - \frac{۱}{۳})^۲ = (x^۲ - \frac{۲}{۳}x) + (\frac{۱}{۳})^۲$$

پس، معادله اصلی به صورت $(x - \frac{۱}{۳})^۲ - \frac{۱}{۹} + \frac{c}{۳} = ۰$ نوشته می‌شود. در نتیجه $(x - \frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۱}{۹} - \frac{c}{۳}$.

$$(x - \frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۱}{۹} - \frac{c}{۳} = \frac{۱ - ۳c}{۹}$$

$$x - \frac{۱}{۳} = \pm\sqrt{\frac{۱ - ۳c}{۹}} = \pm\frac{\sqrt{۱ - ۳c}}{۳}$$

$$x = \frac{۱}{۳} + \frac{\sqrt{۱ - ۳c}}{۳} \quad \text{و} \quad x = \frac{۱}{۳} - \frac{\sqrt{۱ - ۳c}}{۳}$$

این محاسبه وقتی قابل قبول است که $۱ - ۳c$ عددی نامنفی باشد تا ریشه‌گیری از آن امکان‌پذیر باشد. پس شرط داشتن جواب در این معادله، نامنفی بودن $۱ - ۳c$ است.

فرمول کلی جواب‌های معادلات درجه دوم

در فعالیت صفحهٔ بعد، روش مربع کامل را روی یک معادله درجه دوم دلخواه پیاده می‌کنیم تا تشخیص دهیم تحت چه شرایطی یک معادله درجه دوم جواب دارد و درصورت وجود جواب، فرمولی برای جواب‌های معادله درجه دوم بیابیم.

فعالیت

یک معادله درجه دوم دلخواه به شکل $ax^۲ + bx + c = ۰$ است که در آن a و b و c اعداد معینی هستند و a ناصفر است.

۱ــ طرفین معادله بالا را بر عدد ناصفر a تقسیم کنید و معادله درجه دومی بنویسید که ضریب $x^۲$ برابر ۱ باشد. نشان دهید جواب‌های این معادله جدید همان جواب‌های معادله اصلی است.

۲ــ نصف ضریب x در معادله جدید برابر $\frac{b}{۲a}$ است. چندجمله‌ای $(x+\frac{b}{۲a})^۲$ را با چندجمله‌ای معادله جدید مقایسه کنید.

۳ــ معادله جدید را برحسب $(x+\frac{b}{۲a})^۲$ بنویسید و نتیجه بگیرید $(x+\frac{b}{۲a})^۲ = \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲}$.

۴ــ تحت چه شرایطی تساوی بالا امکان‌پذیر است؟ تحت چه شرایطی معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ جواب دارد؟

۵ــ نشان دهید که اگر $b^۲ - ۴ac$ مثبت باشد، طرف دوم معادله جذر دارد و جواب‌های معادله اصلی برابر جواب‌های دو معادله $x+\frac{b}{۲a} = \frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ و $x+\frac{b}{۲a} = -\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ است.

۶ــ نتیجه بگیرید، معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ در صورت داشتن جواب، دارای جواب‌های زیر است.

$$x_۱ = \frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \quad , \quad x_۲ = \frac{-b-\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

خوارزمی نیز تمام عملیات گفته شدهٔ این بخش را برای حل یک معادله درجه دوم انجام داده بود ولی در محاسبه جواب‌ها فقط از ریشه مثبت عبارت $b^۲ - ۴ac$ استفاده نموده است، بنابراین مناسب است که این فرمول‌ها را فرمول‌های خوارزمی برای معادلات درجه دوم بنامیم.

در هر معادله درجه ۲ به صورت $ax^۲ + bx + c = ۰$، عبارت $b^۲ - ۴ac$ را با Δ نشان می‌دهند. شرط وجود جواب برای یک معادله درجه دوم آن است که $\Delta > ۰$ یا $\Delta = ۰$.

اگر $\Delta > ۰$، معادله دو جواب دارد که عبارتند از :

$$x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta = 0$ معادله فقط دارای یک جواب $x = -\frac{b}{2a}$ است.

اگر $\Delta < 0$ معادله جواب ندارد.

مثال ۱ : جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.

در این معادله داریم $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$. چون $\Delta = 5 > 0$، این معادله دارای دو جواب زیر است.

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

مثال ۲ : جواب‌های معادله $9x^2 - 12x + 4 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.

در این معادله داریم $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 144 - 144 = 0$. چون $\Delta = 0$، این معادله دارای یک جواب $x = -\frac{-12}{18} = \frac{2}{3}$ است.

مثال ۳ : جواب‌های معادله $5x^2 + 2x + 1 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.

در این معادله داریم $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 \times 1 = 4 - 20 = -16$. چون $\Delta < 0$، این معادله جواب ندارد.

تمرین در کلاس

معادله مربوط به قاب عکس را که در ابتدای این فصل به‌دست آمد، حل کنید و جواب‌های آن را تفسیر کنید.

مسائل

۱ــ با روش مربع کامل معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 + 3x = 0$ ب) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

۲ــ کدام‌یک از معادلات زیر فقط یک جواب دارند؟ جواب آن را بیابید.

الف) $x^2 - 7x + 4 = 0$ ب) $x^2 - 6x + 9 = 0$

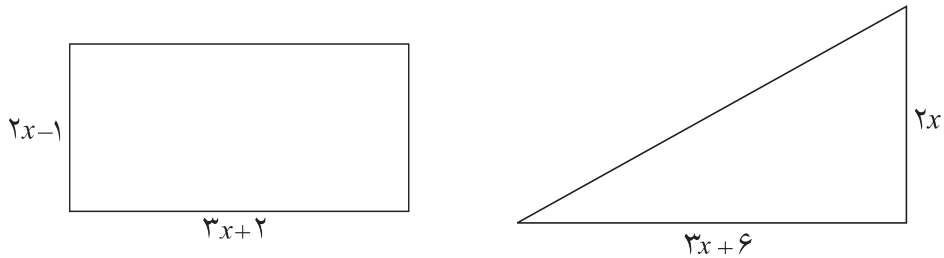
۳ــ با استفاده از فرمول کلی جواب‌های معادلات درجه دوم، معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 3x + 2 = 0$ ب) $7x^2 - 8x + 1 = 0$

۴ــ اگر یکی از جواب‌های معادله $4x^2 - ax + 20 = 0$ برابر (-4) باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۵ــ اگر طول مستطیلی دو برابر عرض آن باشد و مساحت آن ۲۰۰ سانتی‌مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

۶ ــ در زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم شده مساوی هستند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



۷ــ اگر a عددی مثبت باشد و طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه برابر $2a$ و $2a+1$ و $2a+2$ شده باشد، کدام عدد طول وتر خواهد بود؟ طول اضلاع این مثلث را بیابید.