فصل سوم

جبر بول

هدف کلی: شـــناخت جبر بول و اتحادهای اساســـی آن، توابع بولی به شکل مجموع حاصل ضرب‌ها و حاصل ضرب جمع‌ها، پیاده‌سازی توابع منطقی توسط دروازه‌های منطقی پایه و نقشهٔ کارنو

کل زمان اختصاص داده شده به فصل: ۲۰ ساعت آموزشی

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از فراگیرنده انتظار می‌رود که :

۱ـ توابع بولی را شرح دهد.

۲ـ عبارت بولی یک تابع منطقی را بنویسد.

۳ـ اتحادهای اساسی جبر بول را شرح دهد.

۴ـ توابع بولی را به کمک اتحادهای اساسی ساده کند.

۵ـ توابع بولی ساده شده را با دروازه‌های منطقی ترسیم (پیاده‌سازی) کند.

۶ـ عبارت بولی را به شکل نرمال (عادی) بنویسد.

۷ـ عبارت بولی را به شکل حاصل ضرب توضیح دهد.

۸ـ عبارت بولی را به شکل مجموع توضیح دهد.

۹ـ عبارت بولی را به شکل استاندارد مجموع حاصل ضرب‌ها شرح دهد.

۱۰ـ عبارت بولی به شکل استاندارد و حاصل ضرب جمع‌ها را توضیح دهد.

۱۱ـ عبارت منطقی را به شکل استاندارد مین ترم بنویسد.

۱۲ـ عبارت بولی را با استفاده از نقشهٔ کارنو ساده کند .

۱۳ـ توابع منطقی را با گیت‌های منطقی پیاده‌سازی (طرح) کند.

۱۴ـ تعداد ورودی‌های دروازه‌های منطقی را افزایش دهد.

۱۵ـ دروازه‌های منطقی مختلف را فقط با NAND و NOR بسازد.

۱۶ـ جـــدول صحـــت را از ورودی داده‌هـــای مساله استخراج کند.

۱۷ـ تابع منطقی را به شکل مجموع حاصل ضرب‌ها بنویسد (حداکثر چهار ورودی).

۱۸ـ مراحل طراحی مدارهای ترکیبی ساده را شرح دهد.

۱۹ـ مدارهای سادهٔ ترکیبی را تشریح کند.

۲۰ـ یک نمونه مدار ترکیبی ساده را طراحی کند.

۲۱ـ با استفاده از نرم افزار مولتی‌سیم توابع بولی را با کمک گیت‌ها شبیه‌سازی کند.

۲۲ـ به سؤال‌های الگوی پرسش پاسخ دهد.

۲۳ـ کلیهٔ هدف‌های رفتاری در حیطهٔ عاطفی که در فصل اول آمده‌است را باید در این فصل مورد توجه قرار دهد.

3 0011 DIGITAL 3

واژه‌های بنیادی فصل سوم

Combinational	ترکیبی	Maxterm	ماکس ترم عبارت بلند
Sequential	ترتیبی	Boolean Algebra	جبر بول
Sum of Products = SOP	جمع حاصل ضرب‌ها		
Product of Sums = POS	ضرب حاصل جمع‌ها		
Minterm	مین ترم عبارت کوتاه		

پیش‌گفتار

جبر بول دستگاه ریاضی مناسبی برای تجزیه‌وتحلیل مدارهای دیجیتالی است . در این فصل با اتحادهای اساسی جبر بول، چگونگی به‌دست آوردن تابع منطقی یک مدار مشخص، شکل‌های نرمال، ساده‌کردن توابع منطقی آشنا می‌شویم.

۱ـ۳ـ جبر بول (Boolean algebra)

در این فصل یک مدل ریاضی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که نحوهٔ کار یک مدار دیجیتال را بیان می‌کند. چنین مدلی را جبربول می‌نامیم.

این جبر روش‌های مفید و ساده‌ای را برای تجزیه و تحلیل و ترکیب مدارهای دیجیتالی، از جمله مدارهای ترکیبی (Combinational) و مدارهای ترتیبی (Sequential) ارائه می‌دهد.

برای درک بهتر جبر بول و استفادهٔ مؤثر از آن، ابتدا روش‌های کلی مربوط به این جبر را بیان می‌کنیم، سپس به روابط منطقی و عملیات جبری می‌پردازیم.

این عملیات برای ساده‌کردن و به دست آوردن فرم استاندارد و ساده شدهٔ مدار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در جبر بول یک مدل ریاضی قابل استفاده مدلی است که بتواند:

۱ـ روابط بین خروجی‌ها و ورودی‌ها را به صورت ساده‌ترین رابطهٔ ریاضی بیان کند.

۲ـ از نظر اجرای آزمایشگاهی و عمل قابل اجرا باشد.

۳ـ قادر به بیان عمل منطقی مدار باشد.

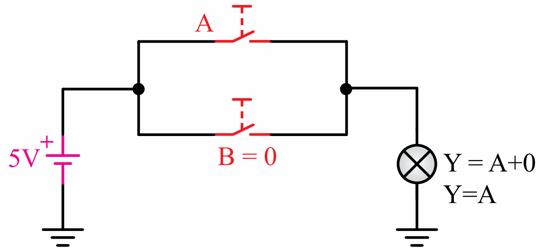
۱ـ۱ـ۳ـ قوانین حاکم بر جبر بول یا اتحادهای اساسی

اتحادهای اساسی در ساده‌سازی توابع منطقی کاربرد دارند. در ادامه به بررسی این قوانین و اتحادها می‌پردازیم. برای اثبات این قوانین (قاعده‌ها)، از مدارهای کلیدی استفاده می‌کنیم. شرایط روشن شدن لامپ در شکل ۱ـ۳ را به عنوان خروجی مدار در نظر

می‌گیریم و آن را با y نشان می‌دهیم.

الف) عضو خنثی: در عمل OR (جمع منطقی)[۱]، صفر منطقی عضو خنثی است. یعنی اگر هر عبارتی با صفر جمع شود، حاصل همان عبارت منطقی (تابع منطقی) خواهد بود. به شکل ۱ـ۳ که یک نمونه مدار سادۀ جمع با عضو خنثی است توجه کنید.

در این شکل کلید A دو وضعیت بسته (۱) و باز (۰) را می‌تواند اختیار کند.



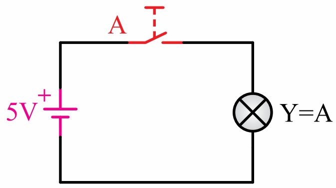
شکل ۱ـ۳ـ یک نمونه مدار اصلی جمع با عضو خنثی

توجه: در این قسمت ، کلید در حالت بسته را «یک» و کلید در حالت باز را « صفر» فرض کرده‌ایم.

کلید B یک کلید همیشه باز است و در این مدار همواره حالت باز یا صفر را به خود می‌گیرد و نمی‌تواند تغییر وضعیت دهد. این کلید به صورت موازی با کلید A قرار دارد. در این شرایط خروجی مدار یعنی لامپ Y تابع تغییرات کلید A خواهد بود. یعنی اگر کلید A بسته شود لامپ روشن و اگر باز شود لامپ خاموش خواهد شد.

با برداشتن کلید B هیچ تغییری در مدار رخ نمی‌دهد و خروجی Y همواره تابع A خواهد بود. بنابراین بودن یا نبودن کلید B هیچ تأثیری در عملکرد خروجی مدار ندارد. شکل ۲ـ۳ این وضعیت را نشان می‌دهد.

۱ـ از این پس در این کتاب عمل OR را با عنوان «جمع منطقی» یا «جمع» نیز بیان خواهیم کرد.



شکل ۲ـ۳ـ مدار معادل اثر صفر در عمل جمع منطقی (OR)

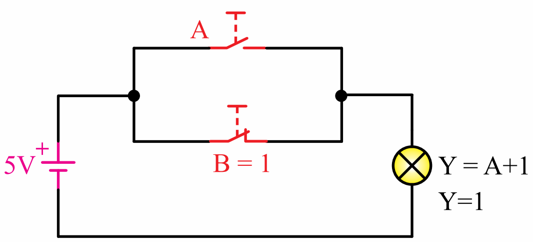
مدار معادل شکل ۱ـ۳ در شکل ۲ـ۳ آمده است. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر صفر منطقی با هر عبارت منطقی جمع شود حاصل همان عبارت خواهد بود.

$$A + ۰ = A$$

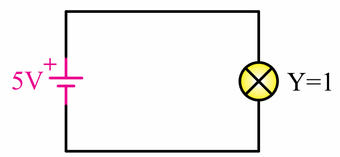
تمرین کلاسی ۱ـ۳: (A+B) را با صفر منطقی جمع کنید، حاصل آن را به‌دست آورید، مدار اصلی و معادل آن را ترسیم کنید.

ب) جمع با یک منطقی: اگر ۱ با هر عبارت منطقی جمع شود حاصل برابر با «۱» خواهد شد. شکل ۳ـ۳ـالف یک نمونه مدار سادۀ جمع شدن «۱» با عبارت منطقی را نشان می‌دهد. در این مدار کلید A با کلید B موازی شده است. کلید B یک کلید همیشه بسته (یک منطقی) است. در حالتی که کلید A می‌تواند تغییر وضعیت دهد. با توجه به توضیح داده شده در مورد عضو خنثی (صفر)، در این مدار رفتار کلید A هیچ تأثیری در خروجی ندارد و خروجی همواره "۱" خواهد بود.

به عبارت دیگر لامپ همیشه روشن است.



شکل ۳ـ۳ـ الف) مدار اصلی جمع با یک منطقی



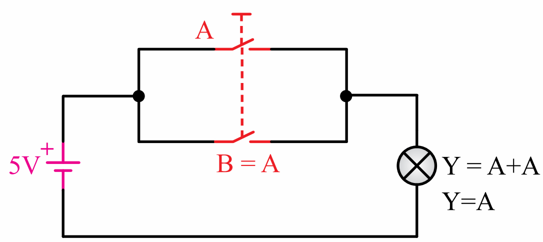
شکل۳ـ۳ـ ب) مدار معادل اثر یک در عمل جمع منطقی (OR)

در شکل ۳ـ۳ـ ب مدار معادل شکل ۳ـ۳ـ الف را مشاهده می‌کنید. در این مدار کلید A هیچ تأثیری ندارد و خروجی همواره «یک» است، پس می‌توانیم روی خروجی بنویسیم.

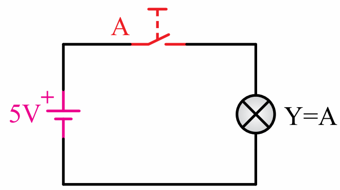
A + ۱=۱

تمرین کلاسی ۲ـ۳: عبارت B+C را با یک منطقی جمع کنید ، حاصل آن را به‌دست آورید و مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

پ) جمع یک عبارت منطقی با خودش: هرگاه هر عبارت منطقی با خودش جمع منطقی (OR) شود، حاصل همان عبارت است، در شکل ۴ـ۳ـ الف یک نمونه مدار مربوط به جمع هر عبارت با خودش را ملاحظه می‌کنید. برای تحلیل این مدار به توضیحات داده شده در مورد عضو خنثی توجه نمایید. در شکل ۴ـ۳ـ ب مدار معادل جمع هر عبارت با خودش را مشاهده می‌کنید.



شکل ۴ـ۳ـ الف) مدار اصلی جمع منطقی هر عبارت با خودش



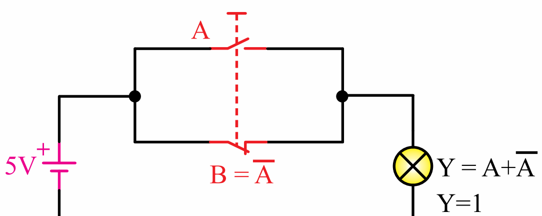
شکل ۴ـ۳ـ ب) مدار معادل جمع منطقی(OR) هر عبارت با خودش

از مدارهای شکل ۴ـ۳ می‌توان نتیجه گرفت که:

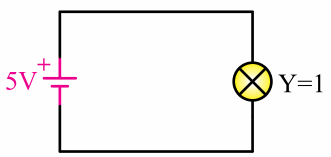
A+A=A

تمرین کلاسی ۳ـ۳: عبارت منطقی B+C را با خودش جمع منطقی کنید. حاصل آن را به‌دست آورید، مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

ت) جمع یک عبارت منطقی با معکوس آن: هرگاه هر عبارت منطقی با معکوس خودش(NOT) جمع منطقی (OR) شود ، حاصل یک می‌شود، در مدار شکل ۵ـ۳ـ الف عبارت A را با عبارت B که معکوس A است جمع کرده‌ایم. همان طور که از حالت‌های کلید A و B مشاهده می‌کنید در کلیهٔ شرایط لامپ روشن می‌ماند. مدار معادل شکل ۵ـ۳ـ الف را در شکل ۵ـ۳ـ ب ملاحظه می‌کنید.



الف) مدار اصلی



ب) مدار معادل

شکل۵ـ۳ـ جمع منطقی(OR) هرعبارت‌بامعکوس خودش

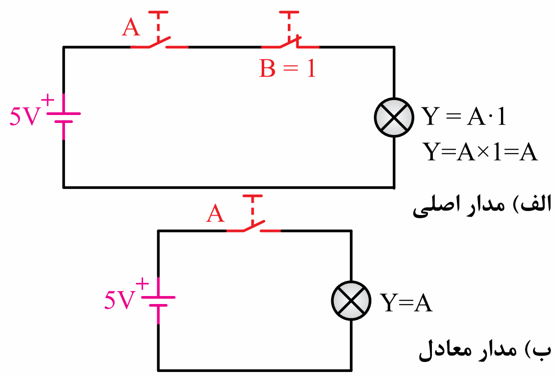
از مدارهای شکل ۵ـ۳ نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$A+\bar{A}=۱$$

نکته: همان طور که در شکل‌های ۱ـ۳ تا ۵ـ۳ ملاحظه کردید، عمل جمع منطقی دقیقاً مشابه گیت OR منطقی است.

تمرین کلاسی ۴ـ۳: عبارت منطقی C+D را با $\bar{C}$ جمع منطقی کنید و حاصل آن را به‌دست آورید . مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

ث) ضرب منطقی[1] عبارت منطقی در یک: هرگاه هر عبارت منطقی در"یک" ضرب منطقی(AND) شود، حاصل همان عبارت است (در عمل ضرب منطقی«یک» عضو خنثی محسوب می‌شود). در شکل ۶ـ۳ـ الف کلید A در حالت صفر قرار دارد و کلید B فقط در یک حالت قرار دارد و نمی‌تواند تغییر کند. بنابراین عامل اثرگذار روی مدار فقط کلید A است. شکل ۶ـ۳ ب مدار معادل شکل ۶ـ۳ـ الف را نشان می‌دهد.



الف) مدار اصلی

ب) مدار معادل

شکل ۶ـ۳ـ تأثیر یک منطقی در عمل ضرب منطقی (AND)

۱ـ از این پس در این کتاب عمل AND را با عنوان «ضرب منطقی» یا «ضرب» نیز بیان خواهیم کرد.

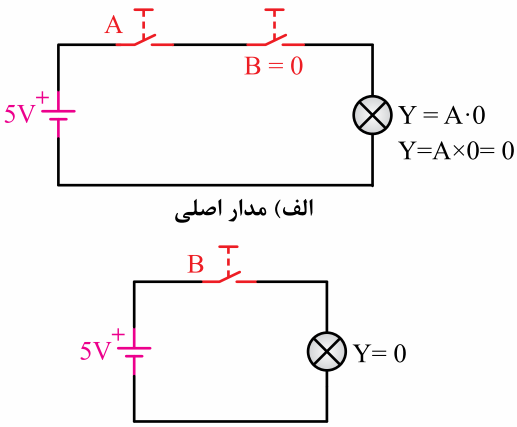
از مدارهای شکل ۶ـ۳ می‌توان نتیجه گرفت که «یک» منطقی در ضرب منطقی (AND) بی‌تأثیر است، یعنی:

$$A\ .\ ۱ = A$$

تمرین کلاسی ۵ـ۳: عبارت (A+B) را در «۱» منطقی ضرب کنید و حاصل را به‌دست آورید . مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

ج) ضرب عبارت منطقی درصفر: هرگاه هر عبارت منطقی در «صفر» منطقی ضرب منطقی (AND) شود حاصل صفر خواهد شد، در شکل ۷ـ۳ـ الف کلید A دو حالت بسته و باز را اختیار می‌کند و کلید B یک حالت دارد و آن حالت خاموش یا صفر منطقی است.

شکل ۷ـ۳ـ ب مدار معادل شکل ۷ـ۳ـ الف را نشان می‌دهد.



الف) مدار اصلی

ب) مدار معادل

شکل ۷ـ۳ـ تأثیر صفر منطقی در عمل ضرب منطقی (AND)

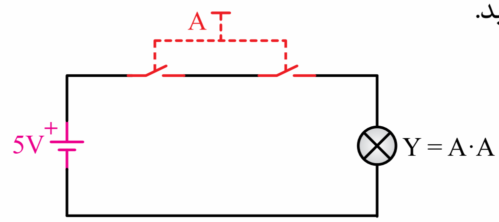
از مدارهای شکل ۷ـ۳ به این نتیجه می‌رسیم که هرگاه صفر منطقی در عبارتی ضرب منطقی (AND) شود، حاصل صفر خواهد شد. بنابراین:

$$A\ .\ ۰ = ۰$$

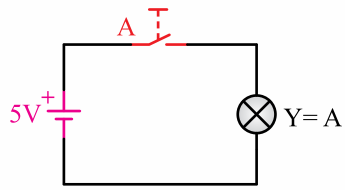
تمرین کلاسی ۶ـ۳: عبارت (C+D) را در «صفر» منطقی ضرب کنید، حاصل عبارت را به‌دست آورید . مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

سؤال: آیا در عمل ضرب ریاضی نیز نتایج موارد ث و ج صادق است؟ توضیح دهید.

چ) ضرب یک عبارت منطقی در خودش: هرگاه هر عبارت منطقی در خودش ضرب منطقی (AND) شود حاصل همان عبارت خواهد بود. در شکل ۸ـ۳ـ الف مدار اصلی و در شکل ۸ـ۳ـ ب مدار معادل آن را مشاهده می‌کنید.



الف) مدار اصلی



ب) مدار معادل

شکل ۸ـ۳ـ تأثیر عمل ضرب منطقی (AND) هرعبارت در خودش

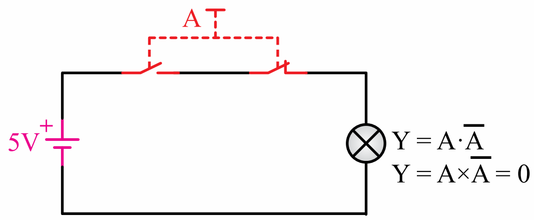
از مدارهای شکل ۸ـ۳ نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$A \cdot A = A$$

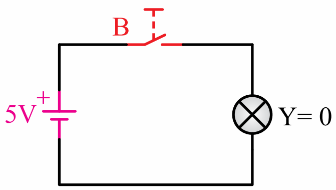
تمرین کلاسی ۷ـ۳: عبارت (A+B) را در خودش ضرب منطقی کنید. حاصل عبارت را به‌دست آورید . مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

ح) ضرب عبارت منطقی در معکوس آن: هرگاه هر عبارت منطقی در معکوس خودش ضرب منطقی (AND) شود، حاصل صفر خواهد شد. در شکل ۹ـ۳ـ الف مدار اصلی و در شکل ۹ـ۳ـ ب مدار معادل آن را ملاحظه می‌کنید.

کلید B یک کلید یک حالته معادل صفر است.



الف) مدار اصلی



ب) مدار معادل

شکل ۹ـ۳ـ تأثیر ضرب منطقی (AND) بین هر عبارت منطقی و معکوس آن

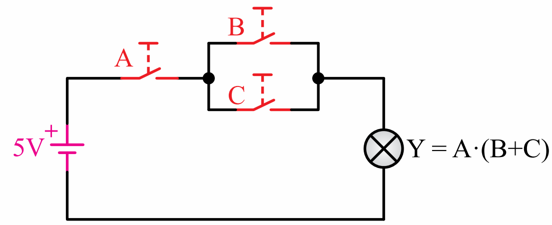
از مدارهای شکل ۹ـ۳ می‌توان به نتیجهٔ زیر رسید.

$$A.\overline{A}=۰$$

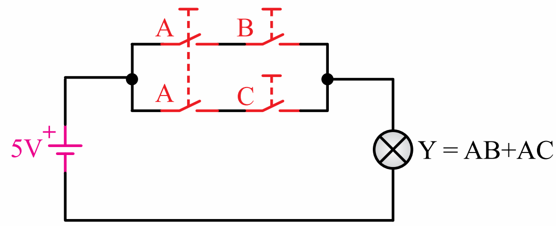
تمرین کلاسی ۸ـ۳: عبارت A+B را در $(\overline{A}+\overline{B})$ ضرب کنید و حاصل را به دست آورید . مدار اصلی آن را ترسیم کنید.

خ) توزیع پذیری AND در OR: هرگاه یک عبارت منطقی در پرانتزی ضرب منطقی(AND) شود، در تک‌تک عبارت‌های داخل پرانتز ضرب منطقی می‌شود، در شکل ۱۰ـ۳ـ الف ضرب منطقی تابع (B+C) را در تابع A ملاحظه می‌کنید. در شکل ۱۰ـ۳ـ ب مدار

معادل شکل ۱۰ـ۳ـالف آمده است.



الف) مدار اصلی



ب) مدار معادل

شکل ۱۰ـ۳ـ ضرب یک عبارت منطقی درعبارت منطقی داخل پرانتز

از مدارهای شکل ۱۰ـ۳ می‌توان به نتیجهٔ زیر رسید.

$$A \,.\, (B+C) = AB+AC$$

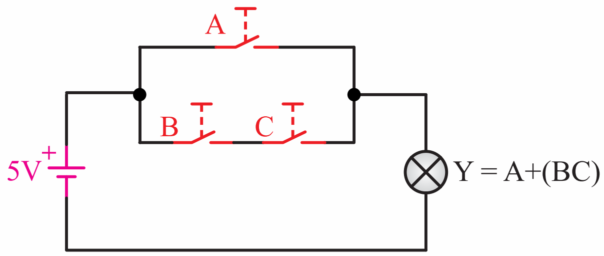
این عمل را توزیع‌پذیری AND در OR می‌نامند. به‌عبارت دیگر در رابطهٔ سمت راست اگر از عبارت A فاکتور گرفته شود، خواهیم داشت:

$$\underline{A}B + \underline{A}C = A(B+C)$$

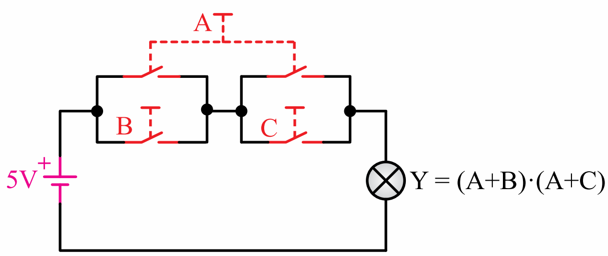
یعنی پس از فاکتورگیری عبارت سمت چپ داخل کادر به‌دست می‌آید . عمل فاکتورگیری در ساده سازی توابع منطقی کاربرد زیادی دارد که در مباحث بعدی به آن بیشتر خواهیم پرداخت.

تمرین کلاسی ۹ـ۳: تابع B را در تابع (A+C+D) ضرب منطقی کنید، حاصل را به‌دست آورید. مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

د) جمع منطقی یک عبارت با پرانتز: هرگاه یک عبارت منطقی با پرانتزی جمع منطقی (OR) شود با تک‌تک عبارت‌های داخل پرانتز جمع منطقی (OR) می‌شود. شکل ۱۱ـ۳ـالف حاصل جمع BC را با A نشان می‌دهد. در شکل ۱۱ـ۳ـب مدار معادل شکل ۱۱ـ۳ـالف را ملاحظه می‌کنید.



الف) مدار اصلی



ب) مدار معادل

شکل ۱۱ـ۳ـ حاصل جمع منطقی (OR) در پرانتز

از مدارهای شکل ۱۱ـ۳ نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$A + BC = (A+B)\,(A+C)$$

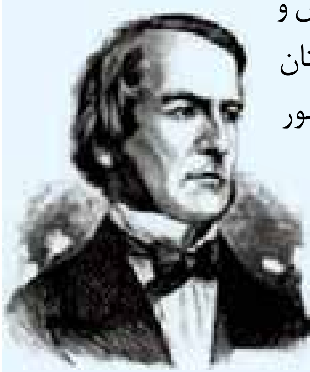
تمرین کلاسی ۱۰ـ۳: تابع (CD) + AB را باستفاده از قانون جمع منطقی عبارت با پرانتز جمع منطقی کنید، حاصل را به‌دست آورید. مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

جدول ۱ـ۳ قوانین جبر بول را نشان می‌دهد:

جدول ۱ــ۳ــ قوانین جبر بول

تأثیر عضو خنثی «صفر» در جمع منطقی	$A+0=A$
تأثیر «یک» منطقی در جمع منطقی	$A+1$
جمع منطقی یک تابع با خودش	$A+A=A$
جمع منطقی یک تابع با معکوس خودش	$A+\overline{A}=1$
تأثیر عضو خنثی «یک» در ضرب منطقی	$A\cdot 1=A$
تأثیر «صفر» منطقی در عمل ضرب منطقی	$A\cdot 0=0$
ضرب یک تابع در خودش	$A\cdot A=A$
ضرب یک تابع در معکوس خودش	$A\cdot\overline{A}=0$
ضرب یک تابع در پرانتز	$A\cdot(B+C)=AB+AC$
جمع یک تابع با پرانتز	$A+(BC)=(A+B)\cdot(A+C)$

جورج بول ۱۸۶۴ ۱۸۱۵



جورج بول از پدری کفاش و مادری خدمتکار در انگلستان بــه دنیــا آمـد. به منظــور حمایـــت از خانــواده به‌دلیل مشکلات مالی، خیلــی زود تحصیلات ابتدایــی را به اتمام رساند. در سال‌های جوانی از طریـــق معلمی امـرار معاش می‌کرد و در سال ۱۸۳۴ مدرسه‌ای را بنیان گذاشت. به تنهایی مطالعات ریاضیات پیشرفته را دنبال کرد و به واسطهٔ انتشار مقالاتی در این زمینه به شهرت جهانی دست یافت. اولین مدال طلای ریاضیات را از انجمن سلطنتی لندن در سال ۱۸۴۴ دریافت کرد و به‌عنوان اولین پرفسور ریاضیات در کالج کوئین منصوب شد . او هم‌چنین لقب پدرمنطق نمادین و بنیانگذار ریاضیات محض را از آن خود ساخت.

۲ــ۳ــ قوانین دمورگان (Demorgan)

۱ــ۲ــ۳ــ طبق قانون اول دمورگان اگر پرانتزی که عمل جمع منطقی (OR) در آن صورت می‌گیرد را NOT کنیم، عمل جمع منطقی (OR) به ضرب منطقی (AND) تبدیل می‌شود و علامت NOT روی تک‌تک عناصر عبارت قرار می‌گیرد.

$$\boxed{\overline{(A+B)}=\overline{A}.\overline{B}}$$

مثال ۱ــ۳: با استفاده از قانون اول دمورگان معادل عبارت $\overline{C+D+E}$ را بنویسید.

حل: $\overline{(C+D+E)}=\overline{C}.\overline{D}.\overline{E}$

تمرین کلاسی ۱۱ــ۳: معادل عبارت $\overline{A+B+C+D}$ را بنویسید.

۲ــ۲ــ۳ــ قانون دوم دمورگان نشان می‌دهد، اگر NOT روی یک عبارتی که عمل ضرب منطقی دارد، قرار بگیرد، ضرب منطقی به‌جمع منطقی تبدیل می شود و علامت NOT روی تک تک عناصر مربوط به آن عبارت قرار می‌گیرد.

$$\boxed{\overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}}$$

از قوانین دمورگان در ساده‌سازی عبارت‌های منطقی استفاده می‌شود.

مثال ۲ــ۳: با استفاده از قانون دوم دمورگان معادل عبارت $\overline{C.D.E}$ را بنویسید.

حل: $\overline{C.D.E}=\overline{C}+\overline{D}+\overline{E}$

مثال ۳ــ۳: با استفاده از قوانین دمورگان معادل عبارت $\overline{(A+B)}\overline{(C.D)}$ را بنویسید.

حل:

$$\overline{(A+B)}\overline{(C.D)}=(\overline{A}.\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{D}$$

تمرین کلاسی ۱۲ـ۳: با استفاده از قانون دوم دمورگان معادل عبارت $\overline{ABCD}$ را بنویسید.

آگوستوس دمورگان
(۱۸۰۶ـ۱۸۷۱)

دانشمندی انگلیسی‌الاصل، متولد هندوستان و نویسنده مقالهٔ مشهور «نظریهٔ احتمالات» در دائرةالمعارف متروپولیتن (۱۸۴۵) است. در این مقاله او به تحلیل تئوری تحلیلی و لاپلاس پرداخته است.
شهرت وی عمدتاً به دلیل قوانین دمورگان در احتمالات است.

مثال ۴ـ۳: می‌خواهیم یک مدار را مطابق شکل ۱۲ـ۳ با استفاده از دروازه‌های منطقی طوری طراحی کنیم که دارای مشخصات زیر باشد:

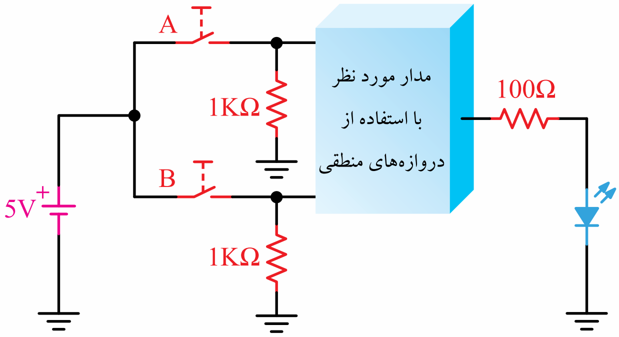
الف) دو کلید ورودی و یک مقاومت خروجی متصل به یک دیود نوردهنده (LED) داشته باشد.

ب) اگر هر دو کلید A و B باز باشند (A=۰ و B=۰) دیود نوردهنده (LED) روشن شود.

پ) اگر کلید A باز و کلید B بسته باشد(A=۰ و B=۱)، دیود نوردهنده (LED) روشن شود.

ت) اگر کلید A بسته و کلید Bباز باشد(A=۱ و B=۰) دیود نوردهنده (LED) خاموش باشد.

ث) اگر هر دو کلید A و B بسته باشند (A=۱ و B=۱) دیود نوردهنده (LED) روشن شود.



شکل ۱۲ـ۳ـ مدار الکتریکی مربوط به مثال ۴ـ۳

حل:

مرحلهٔ (۱) تنظیم جدول اولیه

به جای مطرح کردن بندهای الف تا ث می‌توانیم صورت مثال را به شکل جدول ۲ـ۳ بیان کنیم.

نکته: در ضمن، به یاد داشته باشید که اگر خروجی مدار در وضعیت یک منطقی قرار گیرد، دیود نوردهنده روشن و اگر در وضعیت صفر منطقی قرار گیرد، دیود خاموش می‌شود.

جدول ۲ـ۳ـ جدول مربوط به مثال ۴ـ۳

وضعیت کلید A	وضعیت کلید B	وضعیت دیود نور دهنده
باز	باز	روشن
باز	بسته	روشن
بسته	باز	خاموش
بسته	بسته	روشن

مرحلهٔ (۲) تنظیم جدول صحت

اگر روشن بودن دیود نوردهنده (LED) را یک منطقی وخاموش بودن آن را صفر در نظر بگیریم و همچنین باز بودن کلید را صفر منطقی و بسته بودن آن را یک منطقی منظور کنیم، جدول ۳ـ۳ به‌صورت زیر درمی‌آید.

جدول ۳ـ۳ـ جدول صحت مربوط به مثال ۴ـ۳

ورودی‌ها		خروجی
A	B	Y
۰	۰	۱
۰	۱	۱
۱	۰	۰
۱	۱	۱

مرحلهٔ (۳) تعیین عبارت‌های خروجی مربوط به هر ردیف جدول صحت

جدول صحت ۳ـ۳ را می‌توان به‌صورت یک عبارت جبری نوشت. هرجایی که در جدول خروجی یک است عبارت مربوط به وضعیت ورودی‌ها را می‌نویسیم. در ستون مربوط به ورودی‌ها، هرجا که ورودی صفر است معکوس ورودی را می‌نویسیم و هر جا که ورودی یک است خود ورودی را قرار می‌دهیم. جدول ۴ـ۳ جدول صحت عبارت‌های منطقی مثال ۴ـ۳ را نشان می‌دهد.

جدول ۴ـ۳ جدول صحت مثال ۴ـ۳

ورودی‌ها				خروجی	
A		B		Y	
$\overline{A}$	0	$\overline{B}$	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}=1$
$\overline{A}$	0	B	1	1	$\overline{A}\cdot B=1$
A	1	$\overline{B}$	0	0	
A	1	B	1	1	$A\cdot B=1$

$$Y=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot B$$

مرحلهٔ (۴) به‌دست آوردن رابطهٔ خروجی از حاصل جمع عبارت‌های خروجی جدول که حاصل آن یک است، عبارت خروجی اصلی یا Y به‌دست می‌آید.

مرحلهٔ (۵) تشریح مراحل

$$Y=\overline{A}.\overline{B}+\overline{A}.B+A.B$$

مفهوم عبارت (۱) این است که زمانی Y= ۱ می‌شود که $\overline{A}\overline{B}=۱$ یا $\overline{A}B=۱$ یا AB = ۱ شود در غیر این صورت، Y= ۰ خواهد بود.

نکته: توجه کنید که هیچ‌گاه هر سه جمله به‌طور هم‌زمان نمی‌توانند برابر یک شوند، بلکه در هر لحظه به ازای یک عبارت ورودی فقط و فقط یک خروجی خواهیم داشت. چرا؟ توضیح دهید.

مجدداً به‌صورت مثال ۴ـ۳ و بندهای الف تا ث توجه کنید.

زمانی که ۰ =A و B=۰ (هردو کلید باز) است، دیود نور دهنده (LED) باید روشن شود (Y=۱). پس این مطلب را به‌صورت $\overline{A}.\overline{B}$ می‌نویسیم، بنابراین اگر A=۰ باشد، $\overline{A}$=۱ و اگر B=۰ باشد، ۱= $\overline{B}$ می‌شود. لذا $\overline{A}\overline{B}$=۱ است. اگر «یک» منطقی در «یک» منطقی ضرب شود حاصل مساوی یک می‌شود.

زمانی که A=۰ و B=۱ (کلید A باز و B بسته) است دیود نور دهنده (LED) باید روشن شود (Y=۱). پس باید این را به صورت $\overline{A}$B نوشت ، یعنی اگر A=۰ باشد، $\overline{A}$=۱ می شود. بنابراین، ($\overline{A}$B=۱) است.

زمانی که A=۱ و B=۱ (هردو کلید بسته باشند) دیود نوردهنده (LED) باید روشن شود (Y=۱). پس باید مطلب را به‌صورت AB بنویسیم.

چون دیود نوردهنده (LED) باید در سه حالت روشن شود و در هر لحظه فقط یکی از حالت‌ها اتفاق می‌افتد. طبق جدول صحت، که دارای سه حالت روشن و یک حالت خاموش است، باید این سه حالت یعنی حالتهایی را که باید Y=۱ شود با یک‌دیگر OR کنیم، بدین ترتیب هنگامی که یکی از ورودی‌های OR یک شود، خروجی آن نیز یک می‌شود.

با حل این مثال توانستیم مثال ۴ـ۳ را به‌صورت یک رابطهٔ جبری بیان کنیم. **در این عبارت جبری، هر متغیر فقط دو مقدار** (صفر یا یک منطقی) را به خود اختصاص می‌دهد. ریاضیات حاکم بر این نوع روابط

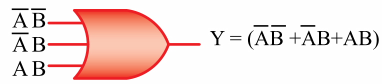
همان **جبر بول** است.

مرحلهٔ (۶) طراحی مدار با استفاده از گیت‌های منطقی

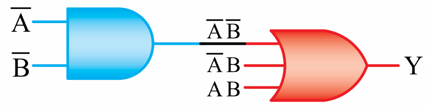
طراحی مدار موردنظر را مطابق شکل ۱۳ـ۳ مرحله به مرحله بررسی می‌کنیم. چون تابع اصلی به صورت زیر است:

$$Y=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+AB$$

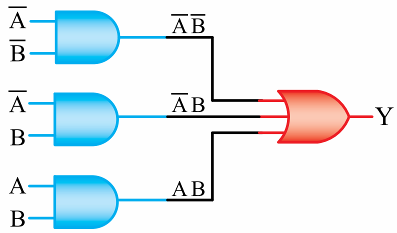
مدار اصلی، مشابه شکل ۱۳ـ۳ـ الف خواهد شد زیرا سه تابع $\bar{A}\bar{B}$ و $\bar{A}B$ و AB باید با هم جمع شوند.



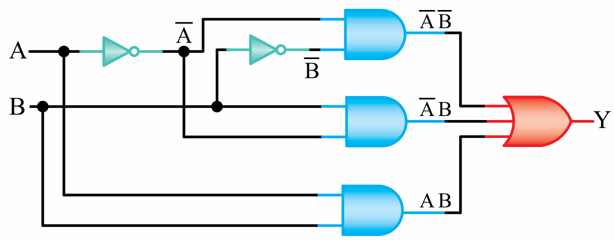
الف) اختصاص یک گیت OR به تابع اصلی



ب) اجرای تابع $\bar{A}\bar{B}$ با گیت AND



پ) اجرای سایر توابع توسط گیت‌های مربوط به آنها



ت) استفاده از گیت NOT برای نفی متغیرها

شکل ۱۳ـ۳ـ مراحل طراحی مدار مثال ۴ـ۳

در نهایت برای این‌که مدار را به‌صورت کامل درآوریم، باید در مسیر ورودی‌های مدار یک کلید قرار دهیم و توسط یک مقاومت مناسب مسیر کلید را به زمین اتصال دهیم.

در خروجی مدار با فرض شرایط مطلوب یک مقاومت ۱۰۰ اهم را با یک LED سری کرده‌ایم و آن را به زمین اتصال داده‌ایم.

شکل ۱۴ـ۳ مدار کامل را نشان می دهد.

مرحلهٔ (۶) ساده کردن تابع خروجی

طبق قوانینی که در جبر بول آموختیم، رابطهٔ خروجی مدار را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ساده می‌کنیم.

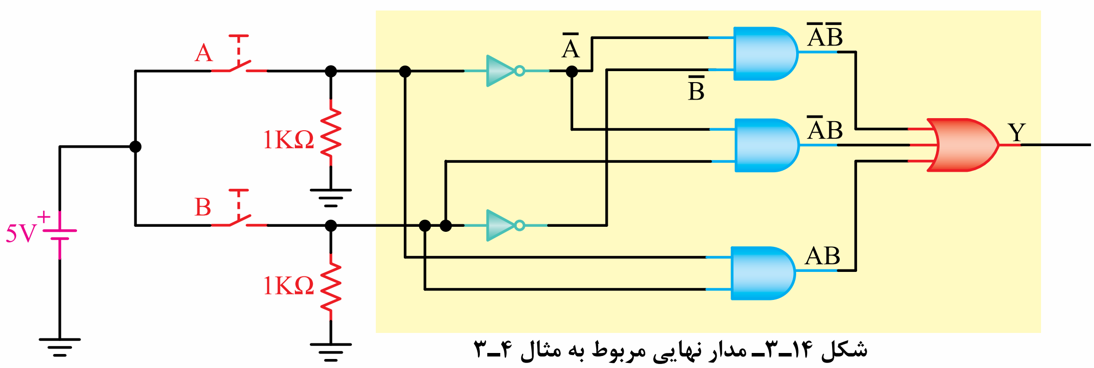
$$Y=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+AB$$

با توجه به توزیع‌پذیری می‌توانیم از متغیر مشترک در جمله‌ها فاکتورگیری کنیم.

$$Y=\bar{A}(\bar{B}+B)+AB$$

از $\bar{A}$ جملهٔ اول و دوم فاکتورمی‌گیریم و در پرانتز به‌عبارت $\bar{B}+B$ می‌رسیم، طبق یکی از قوانین جبر بول حاصل $\bar{B}+B=1$ می‌شود بنابر این تابع را ساده می‌کنیم.

$$Y=\bar{A}(1)+AB$$



شکل ۱۴ـ۳ـ مدار نهایی مربوط به مثال ۴ـ۳

تمرین کلاسی ۱۳ـ۳: $\overline{B}+B=1$ کدام قانون است آن را تعریف کنید.

قانون دیگر جبر بول می‌گوید که اگر عبارتی در «یک» منطقی ضرب (AND) شود حاصل خود عبارت خواهد شد. از این قانون نیز برای ساده سازی استفاده می‌کنیم.

$$Y=(\overline{A})(1)+AB$$

و چون $\overline{A}\times ۱=\overline{A}$ است پس می‌توان نوشت:

$$Y=\overline{A}+AB$$

طبق قانون دیگری در جبر بول داریم که اگر تابعی با یک تابع حاصل‌ضرب جمع شود. تابع در هر یک از توابع مربوط به حاصل‌ضرب جمع می‌شود پس می‌توانیم بنویسیم:

$$Y=\overline{A}+AB=(\overline{A}+A).(\overline{A}+B)$$

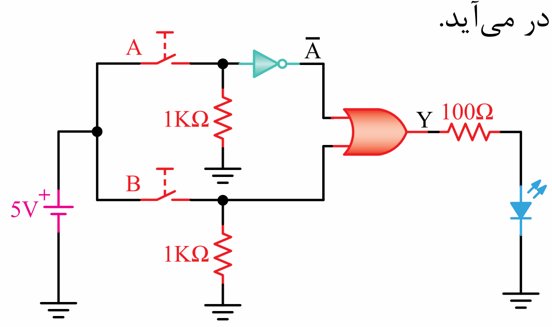
براساس قانون $\overline{A}+A=1$ پرانتز اول یک خواهد شد. لذا تابع به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Y=1.(\overline{A}+B)$$

طبق قانون حاصل ضرب با عضو خنثی (یک) در یک تابع داریم:

$$Y=\overline{A}+B$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، حاصل به‌دست آمده برای رابطهٔ خروجی بسیار ساده است، حال اگر برای این رابطه مداری طراحی کنیم مدار به صورت شکل ۱۵ـ۳ در می‌آید.



شکل ۱۵ـ۳ـ مدار مربوط به ساده‌سازی مدار مثال ۴ـ۳

با مقایسه شکل‌های ۱۴ـ۳ و ۱۵ـ۳ به ویژگی‌های قوانین جبر بول پی‌می‌بریم. در شکل ۱۴ـ۳ باید از ۶ دروازهٔ منطقی برای طراحی مدار استفاده کنیم در صورتی که در مدار شکل ۱۵ـ۳ فقط دو دروازهٔ منطقی به‌کار رفته است.

به عبارت دیگر به جای ۶ گیت پیچیده فقط از دو گیت منطقی ساده استفاده کرده‌ایم که این امر باعث کاهش توان مصرفی مدار و صرفه‌جویی در تعداد گیت‌ها می‌شود.

مثال ۵ـ۳: عبارت‌های جبر بول جدول صحت ۵ـ۳ را بنویسید.

جدول ۵ـ۳ـجدول مربوط به مثال ۵ـ۳

A	B	Y
۰	۰	۱
۰	۱	۱
۱	۰	۰
۱	۱	۰

پاسخ: مرحلهٔ ۱ نوشتن توابع هر دوردیف جدول که خروجی آن یک است.

جدول ۶ـ۳ـ پاسخ مثال ۵ـ۳

A	B	Y	
0	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}=1$
0	1	1	$\overline{A}\cdot B=1$
1	0	0	
1	1	0	

همان‌طور که از جدول صحت پیداست، خروجی Y زمانی در وضعیت یک منطقی قرار می‌گیرد که $\overline{A}\overline{B}$=۱ یا $\overline{A}B$=۱ شود.

مرحلهٔ ۲ نوشتن تابع خروجی

رابطهٔ Y (خروجی مدار) از حاصل جمع سطرهایی که خروجی آن «یک» است به دست می‌آید. پس می‌توان

رابطهٔ خروجی را به‌صورت زیر نوشت:

$$Y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B$$

تمرین کلاسی ۱۴ـ۳: براساس رابطهٔ خروجی مثال ۵ـ۳ مداری طراحی کنید: سپس رابطهٔ خروجی را ساده کنید و مدار دیگری بر اساس رابطهٔ ساده شدهٔ عبارت خروجی رسم کنید، این دو مدار را با هم مقایسه کنید.

مثال ۶ـ۳: دربارهٔ عبارت جبر بول زیر اظهارنظر کنید.

$$Y = A\bar{B} + AB$$

پاسخ: رابطهٔ فوق سیستمی را نشان می‌دهد که دارای دو متغیر ورودی (A و B) و یک متغیر خروجی (Y) است. متغیر خروجی زمانی در وضعیت یک منطقی قرار می‌گیرد که B=۰ و A=۱ باشد یا A=۱ و B=۱ شود. در غیر این صورت، خروجی آن در وضعیت صفر منطقی قرار می‌گیرد.

مثال ۷ـ۳: جدول صحت رابطهٔ $Y = A\bar{B} + \bar{A}B$ را رسم کنید.

پاسخ : چون این سیستم دارای دو متغیر است، پس چهار حالت مختلف وجود دارد و خروجی زمانی که B=۰ و A=۱ یا B=۱ و A=۰ است، در وضعیت یک منطقی قرار می‌گیرد.بنابراین می‌توانیم براساس حالات فوق جدول صحت ۷ـ۳ را بنویسیم.

جدول ۷ـ۳ جدول مربوط به مثال ۷ـ۳

A	B	Y	
0	0	0	
0	1	1	$\bar{A}\cdot B$
1	0	1	$A\cdot\bar{B}$
1	1	0	

در سایر حالت‌ها خروجی در وضعیت صفر منطقی قرار می‌گیرد.

تمرین کلاسی ۱۵ـ۳: رابطهٔ مثال ۷ـ۳ را با کدام دروازهٔ منطقی می‌توان طراحی کرد؟

نکته: به ستون‌های ورودی توجه کنید ردیف اول صفر باینری، ردیف دوم یک باینری، ردیف سوم دو باینری و ردیف چهارم سه باینری را نشان می‌دهد. از این الگو برای تمامی جدول‌ها استفاده کنید.

مثال ۸ـ۳: مداری را طرح کنید که جدول صحت ۸ـ۳ در مورد آن صدق کند.

جدول ۸ـ۳ـ جدول مربوط به مثال ۸ـ۳

A	B	C	Y
۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱

پاسخ: مرحلهٔ (۱) نوشتن روابط خروجی هریک از ردیف‌های جدول

جدول صحت ۸ـ۳ مربوط به یک سیستم مدار منطقی است. این سیستم سه متغیر ورودی (A، B و C) و یک متغیر خروجی (Y) دارد.

باتوجه به جدول خروجی این سیستم مدار منطقی

زمانی در وضعیت یک منطقی قرار می‌گیرد که A=۰ و B=۰ و C=۰ یا A=۰ و B=۱ و C=۱ یا A=۱ و B=۰ و C=۰ یا A=۱ و B=۰ و C=۱ یا A=۱ و B=۱ و C=۱ باشد. جدول صحت فوق را مجدداً رسم می‌کنیم و رابطهٔ مربوط به هر ردیف که خروجی آن یک است را می‌نویسیم.

جدول ۹ـ۳ـ جدول پاسخ مثال ۸ـ۳

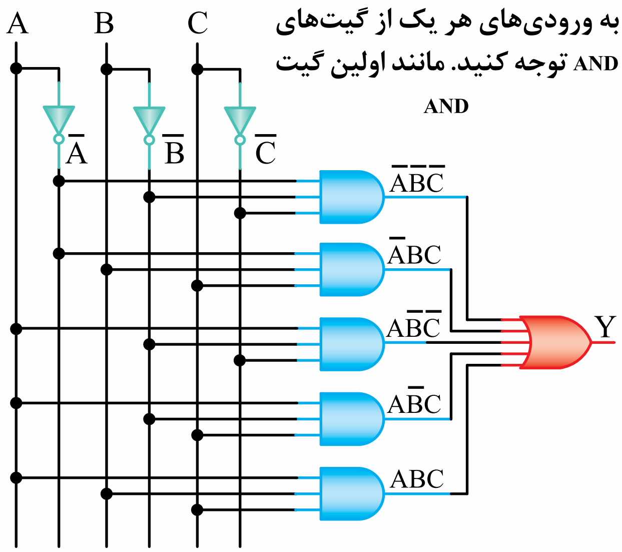
A	B	C	Y	
0	0	0	1	$\rightarrow \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\rightarrow \overline{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	1	$\rightarrow A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
1	0	1	1	$\rightarrow A\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$\rightarrow A\cdot B\cdot C$

مرحلهٔ ۲ با توجه به رابطهٔ خروجی‌هایی که تعداد آن‌ها یک است تابع خروجی را به‌صورت حاصل جمع می‌نویسیم.

$$Y=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C+ABC$$

مرحلهٔ ۳ طراحی مدار

چون خروجی در پنج حالت یک شده است، پس رابطهٔ آن شامل پنج عبارت می‌شود. مداری که تابع بالا را اجرا می‌کند در شکل ۱۶ـ۳ دیده می‌شود.



شکل ۱۶ـ۳ـ مدار منطقی مربوط به مثال ۸ـ۳

برای ساده‌کردن رابطهٔ خروجی مثال ۸ـ۳ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

ابتدا هر یک از جمله‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم.

$$Y=\underbrace{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}_{۱}+\underbrace{\overline{A}BC}_{۲}+\underbrace{A\overline{B}\,\overline{C}}_{۳}+\underbrace{A\overline{B}C}_{۴}+\underbrace{ABC}_{۵}$$

از جمله‌های ۱و۳ از $\overline{B}\,\overline{C}$ آن‌ها و از جمله‌های ۴ و ۵ از AC آن‌ها فاکتورگیری می‌کنیم، هم‌چنین می‌توان در جمله‌های ۲ و ۵ از BC آن‌ها فاکتور بگیریم.

$$Y=\underbrace{\overline{B}\,\overline{C}(\overline{A}+A)}_{۱و۳}+\underbrace{AC(\overline{B}+B)}_{۵و۴}+\underbrace{BC(\overline{A}+A)}_{۵و۲}$$

نکته: یک جمله می‌تواند چند بار در فاکتورگیری شرکت داشته باشد. زیرا هر تابع که با خودش جمع شود خود تابع خواهد بود، بنابراین تکرار توابع تأثیری در نتایج ندارد.

داخل تمام پرانتزها طبق جبربول برابر یک می‌شود و نتیجهٔ ضرب (AND) آنها در عبارت قبل از پرانتز مساوی با خود عبارت خواهد شد.

$$Y=\overline{B}\,\overline{C}+AC+BC$$

بار دیگر نیز می‌توانیم مدار را ساده‌تر کنیم در رابطهٔ جدید مجدداً هر یک از جمله‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم.

$$Y=\underbrace{\overline{B}\,\overline{C}}_{۱}+\underbrace{AC}_{۲}+\underbrace{BC}_{۳}$$

جمله‌های ۱و۳ با هم رابطهٔ دروازهٔ منطقی XNOR را دارد.

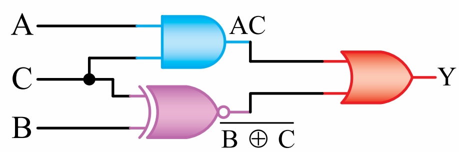
در نتیجه داریم:

$$Y=AC+(\overline{B\oplus C})$$

یادآوری: رابطهٔ گیت XNOR برای ورودی B و C به‌صورت مقابل است:

$$Y=\overline{B\oplus C}=\overline{B}\,\overline{C}+BC$$

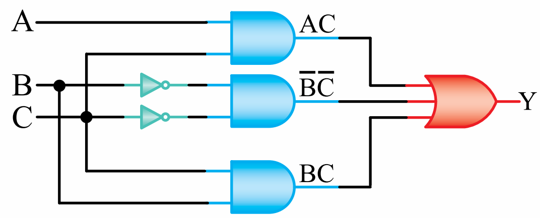
در شکل ۱۷ـ۳ مدار این رابطه را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱۷ـ۳ـ مدار ساده شدهٔ مثال ۸ـ۳

با مقایسهٔ مدارها در شکل ۱۶ـ۳ و ۱۷ـ۳ در می‌یابیم که در مدار شکل ۱۶ـ۳ از ۹ دروازهٔ منطقی استفاده شده درصورتی که در مدار شکل ۱۷ـ۳ سه دروازهٔ منطقی به کار رفته است.

اگر مدار رابطهٔ $Y=\bar{B}\bar{C}+AC+BC$ را از قبل از ساده شدن طراحی کنیم، مدار شکل ۱۸ـ۳ را خواهیم داشت، در این مدار به جای ۹ دروازهٔ منطقی از ۶ دروازهٔ منطقی استفاده شده است.



شکل ۱۸ـ۳ مدار مثال ۸ـ۳

تمرین کلاسی ۱۶ـ۳: آیا می‌توانید رابطهٔ خروجی مدار ۱۸ـ۳ را بنویسید؟

تمرین کلاسی ۱۷ـ۳: چگونه از رابطهٔ جدول اصلی به رابطهٔ شکل ۱۸ـ۳ رسیده‌ایم؟ با توجه به مراحل اجرای درس، شرح دهید.

۳ـ۳ـ ساده‌سازی توابع جبربول

۱ـ۳ـ۳ـ اصول ساده‌سازی توابع جبربول: ساده‌سازی توابع جبر بول، براساس فاکتورگیری از متغیرهای مشترک توابع و حذف تدریجی متغیرهاست. در این قسمت برای درک بهتر مفاهیم توابع جبر بول با توجه به روابط و مدل ریاضی آن مورد بررسی قرار می‌دهیم.

به مثال ۹ـ۳ توجه کنید.

مثال ۹ـ۳: تابع $Y=A\bar{B}+\bar{A}\bar{B}$ را ساده کنید.

چون $\bar{B}$ در هر دو جمله ظاهر شده است، از $\bar{B}$ فاکتور می‌گیریم (طبق قانون توزیع‌پذیری بول)

$$Y=A\bar{B}+\bar{A}\bar{B}=\bar{B}(A+\bar{A})$$

از طرفی طبق قانون جمع یک عبارت با معکوس خودش:

$$A+\bar{A}=1$$

$$Y=\bar{B}.1$$

طبق قانون ضرب یک تابع در یک منطقی می‌توانیم بنویسیم:

$$Y=\bar{B}$$

مثال ۱۰ـ۳: تابع $Y=\bar{A}B+\bar{A}B+AB$ را ساده کنید.

$$Y=A\bar{B}+\bar{A}B+AB=A\bar{B}+B(\bar{A}+A)=B+A\bar{B}$$

از طرفی براساس قانون جمع یک عبارت با معکوس خودش و ضرب یک تابع در یک منطقی

$$Y=(B+A)(B+\bar{B})=(B+A)(1)=A+B$$

مثال ۱۱ـ۳: تابع $Y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC+A\bar{B}C$ را ساده کنید.

$$Y=\underline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}+\underline{\bar{A}\bar{B}C}+\underline{AB\bar{C}}+\underline{ABC}+\underline{A\bar{B}C}$$

جملهٔ پنجم   جملهٔ چهارم   جملهٔ سوم   جملهٔ دوم   جملهٔ اول

تابع را شماره‌گذاری می‌کنیم.

از عوامل مشترک فاکتورگیری می‌کنیم.

$$Y=\underline{\bar{A}\bar{B}(\bar{C}+C)}+\underline{AB(\bar{C}+C)}+A\bar{B}C$$

از جملهٔ سوم و چهارم   از جملهٔ اول و دوم

عبارت‌های داخل پرانتز طبق قانون جمع یک عبارت با معکوس خودش یک می‌شود.

$$Y=\bar{A}\bar{B}+AB+A\bar{B}C$$

$$Y=\bar{A}\bar{B}+\underline{(AB+A\bar{B})(AB+C)}$$

طبق قانون جمع منطقی
یک عبارت با پرانتز

$$=\bar{A}\bar{B}+\left[\ A(\cancel{B+\bar{B}})^{1}\ \right](AB+C)$$

$$Y=\bar{A}\bar{B}+\underline{A(AB+C)}=\bar{A}\bar{B}+\underline{AAB}+AC$$

طبق قانون توزیع‌پذیری AND در OR — طبق قانون ضرب یک عبارت در خودش

$$=\bar{A}\bar{B}+AB+AC$$

مثال ۱۲ــ۳: تابع

$$Y=\bar{A}B\bar{C}+AB\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}$$

را ساده کنید.

$$Y=\underset{۱}{\underleftrightarrow{\bar{A}B\bar{C}}}+\underset{۲}{\underleftrightarrow{AB\bar{C}}}+\underset{۳}{\underleftrightarrow{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}}+\underset{۴}{\underleftrightarrow{A\bar{B}C}}+\underset{۵}{\underleftrightarrow{\bar{A}\bar{B}C}}+\underset{۶}{\underleftrightarrow{A\bar{B}\bar{C}}}$$

ابتدا تابع را شماره‌گذاری می‌کنیم.

از عوامل مشترک فاکتورگیری می‌کنیم.

$$Y=B\bar{C}(\bar{A}+A)+\bar{A}\bar{B}(\bar{C}+C)+A\bar{B}(C+\bar{C})$$

از جمله‌های ۱و۲ — از جمله‌های ۳ و ۵ — از جمله‌های ۴ و ۶

مقادیر $A+\bar{A}$ و $C+\bar{C}$ را برابر یک درنظر می‌گیریم و رابطه را ساده می‌کنیم.

$$Y=B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}+A\bar{B}$$

مجدداً تابع را شماره‌گذاری می‌کنیم.

$$Y=\underset{۱}{B\bar{C}}+\underset{۲}{\bar{A}\bar{B}}+\underset{۳}{A\bar{B}}$$

از جملات ۲و۳ فاکتورگیری می‌کنیم.

$$Y=B\bar{C}+\underline{\bar{B}(\bar{A}+A)}=B\bar{C}+\bar{B}$$

از جمله ۲ و ۳

مطابق قانون توزیع‌پذیری AND در OR خواهیم داشت:

$$Y=(B+\bar{B})(\bar{B}+\bar{C})$$

مقدار $B+\bar{B}=1$ است پس می‌توانیم بنویسیم:

$$Y=\bar{B}+\bar{C}$$

با توجه به مثال‌های ۹ـ۳ تا ۱۲ـ۳ در می‌یابیم که ساده‌سازی توابع به صورت فاکتورگیری‌های متعدد و حذف متغیرها صورت می‌پذیرد.

البته در بسیاری از موارد ممکن است فقط قسمتی از تابع ساده شود یا تابع اصلاً ساده نشود.

مثال ۱۳ــ۳: تابع $Y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+AB\bar{C}$ را ساده کنید.

$$Y=\underset{۱}{\underline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}}+\underset{۲}{\underline{A\bar{B}C}}+\underset{۳}{\underline{AB\bar{C}}}$$

ابتدا جملات را شماره گذاری می‌کنیم. از عوامل مشترک فاکتورگیری می‌کنیم و عبارات مساوی یک را حذف می‌کنیم.

$$Y=\bar{B}C(\bar{A}+A)+AB\bar{C}=\bar{B}C+AB\bar{C}$$

از جملهٔ ۱ و ۲

$$Y=\bar{B}C+AB\bar{C}$$

مثال ۱۴ــ۳: تابع $Y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C}+\bar{A}BC$ را ساده کنید.

این تابع ساده نمی‌شود؛ زیرا از هیچ کدام از جمله‌های آن نمی‌توانیم فاکتور بگیریم.

۲ــ۳ــ۳ــ فرم استاندارد توابع بول: یک تابع بول را درصورتی فرم استاندارد بول می‌گویند که در هر جملهٔ آن همهٔ متغیرها از جمله خود متغیر یا NOT آن ظاهر شده باشد.

برای مثال ، تابع

$$Y=\bar{A}BC+AB\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+ABC+\bar{A}B\bar{C}$$

یک تابع استاندارد بول است؛ زیرا در همهٔ جملات آن هر سه متغیر A, B وC به‌صورت متغییر اصلی یا NOT شده ظاهر شده‌اند.

تابع $Y=AB\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+ABC+\bar{B}C$ یک تابع استاندارد بول نیست؛ زیرا در جملهٔ چهارم آن متغیر A یا NOT آن ظاهر نشده است. با استفاده از قوانین

جبر بول برای استاندارد کردن جملهٔ چهارم کافی است به صورت زیر عمل کنیم و هر یک از عباراتی را که در تابع وجود ندارد در یک ضرب کنیم و به جای یک تابع $(\bar{A}+A)$ یا $(\bar{B}+B)$ یا $(\bar{C}+C)$ را قرار دهیم.

$$\bar{B}C=\bar{B}C(A+\bar{A})=A\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}C$$

در این قسمت برای استاندارد کردن تابع، عکس ساده سازی عمل کرده‌ایم. لذا در تابع اصلی به‌جای $\bar{B}C$، معادل منطقی آن یعنی $A\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}C$ را قرار می‌دهیم.

$$Y=AB\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+ABC+A\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}C$$

به‌طورکلی برای استانداردسازی توابع بول نکات زیر را رعایت می‌کنیم.

نکته

۱ـ در تمام جملات باید همهٔ متغیرها یا NOT آنها وجود داشته باشد.

۲ـ در هر یک از جملات به ترتیب از متغیر با ارزش تا متغیر کم ارزش را قرار می‌دهیم.

مثال ۱۵ـ۳: تابع زیر را به‌صورت تابع استاندارد بول درآورید.

$$Y=A+BC$$

هریک از عباراتی را که در آن متغیر موردنظر وجود ندارد را در «یک» منطقی ضرب می‌کنیم سپس تابع را گسترش می‌دهیم.

$$Y=A.1+BC.1=A(B+\bar{B})+BC(A+\bar{A})$$

$$Y=AB+A\bar{B}+ABC+\bar{A}BC$$

ضرب یک را ادامه می‌دهیم.

$$Y=AB.1+A\bar{B}.1+ABC+\bar{A}BC$$

$$Y=AB(C+\bar{C})+A\bar{B}(C+\bar{C})+ABC+\bar{A}BC$$

$$Y=\underbrace{ABC}_{\text{۱}}+\underbrace{AB\bar{C}}_{\text{۲}}+\underbrace{A\bar{B}C}_{\text{۳}}+\underbrace{A\bar{B}\bar{C}}_{\text{۴}}+\underbrace{ABC}_{\text{۵}}+\underbrace{\bar{A}BC}_{\text{۶}}$$

جمله‌های اول و پنجم یکی هستند. طبق قانون جبربول (A+A=A) می‌توانیم به‌جای ABC+ABC فقط ABC را بنویسیم.

$$Y=ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}BC$$

نکته: برای ساده‌سازی توابع غیر استاندارد، ابتدا باید آنها را به فرم استاندارد در آورید و سپس ساده کنید.

مثال ۱۶ـ۳: تابع $\bar{A}\bar{B}+\bar{A}C+BC$ را ساده کنید.

ابتدا تابع را به فرم استاندارد درمی‌آوریم:

$$Y=\bar{A}\bar{B}(C+\bar{C})+\bar{A}C(B+\bar{B})+BC(A+\bar{A})$$

$$Y=\underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_{\text{۱}}+\underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}_{\text{۲}}+\underbrace{\bar{A}BC}_{\text{۳}}+\underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_{\text{۴}}+\underbrace{ABC}_{\text{۵}}+\underbrace{\bar{A}BC}_{\text{۶}}$$

جمله‌های سوم و ششم و جمله‌های اول و چهارم تکراری است. پس طبق قانون جبربول یکی از آنها را حذف می‌کنیم.

$$Y=\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}BC+ABC$$

$$Y=\bar{A}\bar{B}(C+\bar{C})+BC(\bar{A}+A)=\bar{A}\bar{B}+BC$$

تمرین کلاسی ۱۸ـ۳: عبارت‌های زیر را با استفاده از فرم استاندارد ساده کنید.

الف) $F=AB+\bar{B}C$

ب) $F=A\bar{B}+AC+B\bar{C}$

۳ـ۳ـ۳ـ تعریف عبارت منطقی حاصل ضرب:

متغیرها یا مکمل‌های آنها را که با عمل ضرب به هم مربوط می‌شوند، را یک جملهٔ حاصل ضرب می‌گوییم. نمونه‌هایی از جملهٔ حاصل ضرب به شرح زیر است:

$Y_{۱}=ABC$ یا $Y_{۲}=\bar{A}BC$ یا $Y_{۳}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$,.......

۴ـ۳ـ۳ـ تعریف عبارت منطقی مجموع: متغیرها یا مکمل‌های آنها را که با عمل جمع به هم مربوط

می‌شوند را یک جملهٔ مجموع می‌گوییم. نمونه‌هایی از جملهٔ مجموع به شرح زیر است:

$$Y=A+B+\overline{C}+D+.......$$

$$Y=\overline{A}+\overline{B}+C+.......$$

از عبارت‌های منطقی حاصل‌ضرب و مجموع در مبحث مین‌ترم و ماکس‌ترم استفاده می‌کنیم که در ادامه به توضیح هریک از آنها می‌پردازیم.

۵ـ۳ـ۳ــتعریف عبارت مجموع حاصل ضرب‌ها (Sums of Products) یا مین ترم (minterm):

اگر در هر عبارت مجموع حاصل ضرب‌ها، به همان تعداد متغیری که در تابع وجود دارد، متغیرها یا مکمل‌های (NOT) آنها وجود داشته باشد، آن عبارت را مین‌ترم می‌گوییم. به‌طور مثال یکی از مین‌ترم‌های تابع Y با سه ورودی متغیر A، B و C را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$Y=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC$$

همان‌طورکه ملاحظه می‌کنید در هریک از جملات تابع Y، هر سه ورودی A،B و C یا معکوس آنها وجود دارد.

جدول ۱۰ـ۳ـ جدول صحت تابع خروجی Y با سه ورودی است.

در این جدول با توجه به تعداد ورودی‌ها هشت حالت داریم. هریک از سطرهای جدول را شماره‌گذاری می‌کنیم تا بتوانیم عبارت مین‌ترم را با توجه به آدرس سطرها نیز بنویسیم.

جدول ۱۰ـ۳ جدول صحت تابع Y با سه ورودی

شمارهٔ سطر جدول	ورودی‌ها A	B	C	خروجی Y	
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
2	0	1	0	1	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	1	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	0	
7	1	1	1	1	$A\cdot B\cdot C$

خروجی تابع در سطرهای ۱،۲،۴و۷ یک است. رابطهٔ خروجی را بنا به شمارهٔ سطرها چنین می‌نویسیم:

$$Y=\Sigma_m\ (m_1\ ,\ m_2\ ,\ m_4,\ m_7)$$

یا به این صورت نشان داد. $Y=\Sigma_m\ (1,2,4,7)$

معنای این رابطه، یعنی خروجی تابعی از حاصل جمع سطرهای ۱،۲، ۴و ۷ است. علامت Σ (سیگما) به معنای حاصل جمع است.

مثال ۱۷ـ۳: تابع خروجی $Y=\Sigma_m\ (1,3,5,6)$ را بنویسید.

حل: تابع خروجی در سطرهای ۵،۳،۱ و۶ یک است.

$$Y=\underbrace{\overline{A}\,\overline{B}C}_{\text{سطر ۱}}+\underbrace{\overline{A}BC}_{\text{سطر ۳}}+\underbrace{A\overline{B}C}_{\text{سطر ۵}}+\underbrace{AB\overline{C}}_{\text{سطر ۶}}$$

تمرین کلاسی ۱۹ـ۳: جدول صحت رابطهٔ $Y=\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC$ را رسم کنید و خروجی را به‌صورت ساده شده بنویسید.

تمرین کلاسی ۲۰ـ۳:
جدول صحت $Y=\Sigma_m\ (0,1,3,4)$ را رسم کنید و رابطهٔ خروجی را بنویسید.

۶ـ۳ـ۳ـ عبارت حاصل‌ضرب حاصل جمع‌ها (Products of sums) یا ماکس‌ترم (maxterm):

اگر در هر عبارت حاصل‌ضرب مجموع‌ها به همان تعداد متغیری که در تابع وجود دارد، متغیرها یا مکمل‌های (NOT) آنها وجود داشته باشد، آن را ماکس‌ترم می‌گوییم. مثلاً عبارت Y یک عبارت ماکس‌ترم است که در آن:

$$Y=(\overline{A}+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+C)$$

معمولاً یک عبارت ماکس‌ترم را می‌توان به صورت زیر هم نشان داد.

$$Y = \Pi_M (M_۲ , M_۳ , M_۵)$$

یا

می‌خوانیم پی اِم...

$$Y = \Pi_M (۲,۳,۵)$$

معنای این رابطه، یعنی خروجی، تابعی از حاصل‌ضرب حاصل جمع متغیرهای سطرهای ۲،۳و۵ جدول صحت سه متغیره است.

علامت Π_M معرف حاصل ضرب ماکس‌ترم‌ها است و سطرهـای داخل پرانتـز جایی است که خروجـی تابـع، جواب صفر دارد.

برای ایجاد حاصل جمع هرسطر معین جدول، قاعده‌ای کاملاً معکوس روش مین‌ترم استفاده می‌شود.

به این ترتیب که برای محاسبهٔ حاصل جمع هرسطر مشخص جدول، کلیهٔ متغیرهای ورودی در آن سطر به صورت حاصل جمع در جمله ظاهر می‌شوند.

اگر مقدار متغیر در آن سطر «۰» باشد، به صورت خود متغیر و اگر مقدار متغیر در آن سطر «۱» باشد، به صورت متمم متغیر ظاهر می‌شود.

به عنوان مثال جدول صحت مربوط به رابطهٔ ماکس‌ترم Y را در جدول ۱۱ـ۳ مشاهده می‌کنید.

$$Y = \Pi_M (۲,۳,۵)$$

جدول ۱۱ـ۳ـ جدول صحت خروجی ماکس‌ترم Y

شمارهٔ سطر جدول	ورودی‌ها A	B	C	خروجی Y	
0	0	0	0	1	
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	0	$A+\overline{B}+C$
3	0	1	1	0	$A+\overline{B}+\overline{C}$
4	1	0	0	1	
5	1	0	1	0	$\overline{A}+B+\overline{C}$
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	1	

$$Y = \underbrace{(A+\overline{B}+C)}_{۲}\underbrace{(A+\overline{B}+\overline{C})}_{۳}\underbrace{(\overline{A}+B+\overline{C})}_{۵}$$

همان‌طور که در رابطهٔ خروجی مشاهده می‌کنید حاصل جمع تابع Y مجموع سطرهایی است که خروجی جواب صفر دارد.

مقدار متغیرها برای سطر ۲ جدول: 0 1 0

حاصل‌جمع برای سطر ۲ جدول: $A+\overline{B}+C$

مقدار متغیرها برای سطر ۳ جدول: 0 1 1

حاصل‌جمع برای سطر ۳ جدول: $A+\overline{B}+\overline{C}$

مقدار متغیرها برای سطر ۵ جدول: 1 0 1

حاصل‌جمع برای سطر ۵ جدول: $\overline{A}+B+\overline{C}$

و تابع مدار به‌صورت حاصل ضرب عبارت‌های حاصل جمع نوشته می‌شود و به‌صورت زیر در می‌آید.

$$Y = (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})$$

مثال ۱۸ـ۳: رابطهٔ خروجی $F=\Pi_M (M_۰,M_۱,M_۳)$ را بنویسید.

حل: تابع خروجی را برای سطرهای ۰ و ۱ و ۳ به صورت ماکس‌ترم می‌نویسیم. خروجی در این سطرها صفر است.

$$F = \Pi_M(M_0,M_1,M_3) = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})$$

مجموعـهٔ عبـارت حاصـل ضرب‌هــا و عبـارت حاصـل جمع‌هـای هر سطـر برای یـک جدول با سـه ورودی در جدول ۱۲ـ۳ نشان داده شده است.

جدول ۱۲ـ۳ـ جدول حالات ورودی عبارت حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع هر سطر

شمارهٔ سطر جدول	ورودی‌ها A	B	C	عبارت حاصل‌ضرب	عبارت حاصل‌جمع
0	0	0	0	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$A+B+C$
1	0	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$	$A+B+\overline{C}$
2	0	1	0	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$	$A+\overline{B}+C$
3	0	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C$	$A+\overline{B}+\overline{C}$
4	1	0	0	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{A}+B+C$
5	1	0	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C$	$\overline{A}+B+\overline{C}$
6	1	1	0	$A\cdot B\cdot\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}+C$
7	1	1	1	$A\cdot B\cdot C$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

با توجه به قواعدی که در بالا ذکر شده است به راحتی می‌توان برای هر جدولی از مدارهای منطقی یک تابع منطقی نوشت اگر تابع منطقی بر اساس مقادیر«۱» برای خروجی نوشته شود باید به صورت عبارت حاصل جمع حاصل ضرب‌ها نوشته شود، و اگر جمله‌ها بر اساس مقادیر «۰» خروجی نوشته شود ، باید به صورت عبارت حاصل ضرب حاصل جمع‌ها باشد.

تمرین کلاسی ۲۱ـ۳: جدول صحت $Y = \Pi_M$ (۱,۳,۶) را رسم کنید و رابطهٔ خروجی را بنویسید.

نکته:

۱ـ در نوشتن مین‌ترم هر جدول باید جواب یک خروجی بررسی شود و به جای خود متغیر، یک و به جای متمم آن صفر قرار دهیم.

در نوشتن ماکس‌ترم باید جواب صفر خروجی بررسی شود و به جای خود متغیرصفر و به جای متمم آن یک قرار دهیم.

۲ـ هرچه در مین‌ترم باشد در ماکس‌ترم آن نیست و بالعکس.

تمرین کلاســـی ۲۲ـ۳: جــدول صحت خروجی Y را در جــدول ۱۳ـ۳ مشـــاهده می‌کنید. مین‌ترم و ماکس‌ترم خروجی را بنویسید.

جدول ۱۳ـ۳ـ جدول صحت تمرین کلاسی ۲۲ـ۳

خروجی	ورودی‌ها		
Y	C	B	A
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱

جهت هنرجویان علاقه‌مند : رابطهٔ خروجی تابع به‌صورت $Y = A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$ است . رابطهٔ ماکس‌ترم این خروجی را بنویسید.

۴ـ۳ـ ساده‌سازی توابع با استفاده از نقشهٔ کارنو

همان‌طور که قبلاً گفته شد، اساس ساده‌سازی توابع بول برمبنای فاکتورگیری و حذف متغیرهاست. اگر در دو جملهٔ یک تابع استاندارد بول فقط یک متغیر تغییر کند، آن متغیر را می‌توان حذف نمود: مثلاً در دو جملهٔ $ABC + AB\overline{C}$، فقط متغیر C تغییر کرده است. پس این متغیر را می‌توان حذف کرد؛ زیرا داریم:

$$Y = ABC + AB\overline{C} = AB(C + \overline{C}) = AB.1 = AB$$

اساس کار نقشهٔ کارنو نیز بر مبنای فاکتورگیری و حذف متغیرها برای ساده‌تر شدن مدار منطقی است. در حقیقت، در نقشهٔ کارنو جملاتی را که باید از آنها فاکتور

گرفت، به سرعت مشخص می‌شوند و عمل فاکتورگیری تقریباً به صورت گرافیکی انجام می‌پذیرد.

مثال ۱۹ـ۳: تابع زیر را ساده کنید.

$$F=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B+AB$$

ابتدا جدول صحت تابع فوق را مانند جدول ۱۴ـ۳ رسم می‌کنیم.

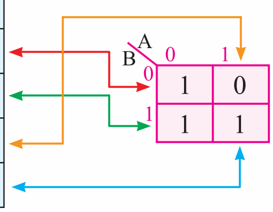
جدول ۱۴ـ۳ـ جدول صحت مثال ۱۹ـ۳

A	B	F	
0	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	1	1	$\overline{A}\cdot B$
1	0	0	
1	1	1	$A\cdot B$

این جدول صحت چهار حالت دارد (2^2). در هر ردیف جدول، حالت‌های ورودی و خروجی به ازای آن ورودی‌ها نشان داده شده است. این جدول را می‌توان به فرم دیگری نیز نشان داد؛ به طوری که مفهوم همین جدول صحت را دربرداشته باشد. جدول ۱۵ـ۳ فرم تغییر یافتهٔ جدول صحت است که در این جا به دلیل داشتن دو متغیر به صورت 2^2 یعنی ۴ خانه‌ای (سلول) رسم شده است.

جدول ۱۵ـ۳ـ فرم تغییر یافتهٔ جدول صحت مربوط به مثال۱۹ـ۳

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



این جدول جدید به‌جدول کارنو یا نقشهٔ کارنو[۱] (Karnaugh map) مشهور است. کارنو براساس ریاضیات تدوین شده توسط بول، دانشمند انگلیسی، جدول یا نقشهٔ کارنو را طراحی کرد.

نقشهٔ کارنو دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر است:

الف) هر خانهٔ آن مربوط به یک حالت ورودی یا به عبارت دیگر یک جمله از تابع استاندارد بول است.

ب) در دو خانهٔ مجاور در جهت افقی یا عمودی همواره دو جمله‌ای قرار می‌گیرند که فقط در یک متغیر با هم اختلاف دارند.

همان‌طور که در قسمت اول این مبحث (۴ـ۳) دیدیم اگر در دو جملهٔ یک تابع استاندارد بول فقط یک متغیر تغییر کند، آن متغیر حذف می‌شود.

مثلاً در ستون اول جدول کارنو از سمت چپ عبارت $\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B$ را داریم. چون $\overline{A}$ بین دو عبارت مشترک است، متغیرهای B و $\overline{B}$ حذف می‌شوند و جواب $\overline{A}$ خواهد شد.

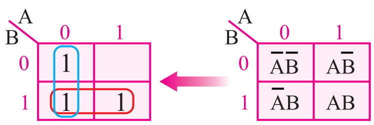
$$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B=\overline{A}(\overline{B}+B)=\overline{A}.1=\overline{A}$$

در نقشهٔ کارنو چون از هر خانه به خانهٔ مجاور فقط یک متغیر تغییر می‌کند، فوراً می‌توان تشخیص داد که از کدام جملات (که به ازای یک شدن آنها تابع یک می‌شود) باید فاکتور گرفت.

نقشهٔ کارنو مثال ۱۹ـ۳ را در این جا دوباره رسم می‌کنیم.

قسمت یک‌ها را طبق جدول۱۶ـ۳ انتخاب می‌کنیم و دور آنها حلقه رسم می‌کنیم.

جدول ۱۶ـ۳ـ نقشهٔ کارنو مثال ۱۹ـ۳



$$\overline{A}B+AB=B(\overline{A}+A)=B$$

این دو جمله که به‌ازای آنها تابع یک می‌شود، در دو خانهٔ مجاور قرار گرفته‌اند؛ بنابراین، آنها فقط در یک متغیر اختلاف دارند.

$$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A}B=\overline{A}\left[\overline{B}+B\right]=\overline{A}$$

ستون اول سمت چپ جدول ۱۶ـ۳ را مجدداً مطالعه

۱ـ درکتاب مدارهای منطقی تالیف موریس مانو و کتاب توخیم همه جا از نقشهٔ کارنو استفاده شده است.

می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده شد در این ستون به دلیل غیرمشترک بودن $\overline{B}$ و B جواب $\overline{A}$ است.

یعنی با یک نگاه می‌فهمیم که پاسخ آن ستون چیست. در مورد ردیف پایین نیز با یک نگاه در می‌یابیم که $\overline{A}$ و A غیر مشترک است پس پاسخ این ردیف نیز B خواهد بود.

مقدار تابع خروجی از مجموع حاصل ردیف پایین و ستون سمت چپ به‌دست می‌آید.

$$F=\overline{A}+B$$

می‌توانیم مسئله را به شکل دیگری بیان کنیم و آن این‌که بگوییم هنگامی که از یک خانه به خانهٔ مجاور (در حلقهٔ محصور شدهٔ یک‌ها) می‌رویم، متغیری که تغییر می‌کند، حذف می‌شود و سایر متغیرها به جای خود باقی می‌مانند در ستون سمت چپ متغیر $\overline{A}$ در هر دو خانه ثابت مانده است.

به‌عبارت دیگر، وقتی از خانهٔ $\overline{A}B$ به خانهٔ AB می‌رویم، مقدار A تغییر می‌کند و به همین دلیل حذف می‌شود. پس جواب نهایی مسئله در آن ستون به صورت B است.

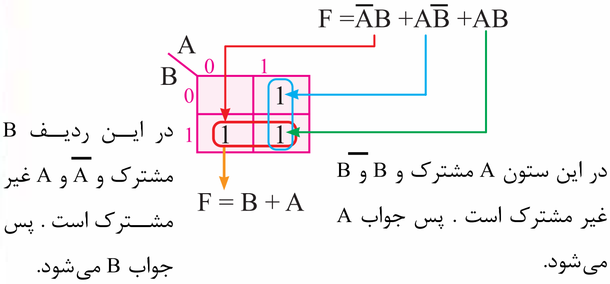
اگر خوب توجه کنید، می‌بینید که هنگام ساده‌سازی، جملهٔ $\overline{A}B$ دو بار نوشته شده است یا در نقشهٔ کارنو دور آن دو بار خط کشیده‌شده است؛ یعنی، تابع $F=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B+AB$ به‌صورت $F=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B+AB+\overline{A}B$ نوشته شده است. طبق قانون جبر بول (A+A=A) این کار اشکال منطقی ندارد و تغییری در جواب مسئله ایجاد نمی‌کند.

یعنی، این بار به‌جای $\overline{A}B$ نوشته‌ایم: $\overline{A}B+\overline{A}B$؛ زیرا اگر $\overline{A}B=۰$ باشد، ۰=۰+۰ و اگر $\overline{A}B=1$ باشد ۱= ۱ OR ۱ است. پس حاصل $\overline{A}B+\overline{A}B$ با خود $\overline{A}B$ یکی است.

مثال ۲۰ــ۳: تابع $F=\overline{A}B+A\overline{B}+AB$ را با استفاده از نقشهٔ کارنو ساده کنید.

چون این تابع فقط دو متغیر دارد، پس جدول کارنو دارای چهار (۴=۲^۲=۲^(تعداد متغیرها))خانه است. جدول ۱۷ــ۳ نقشهٔ کارنوی این مثال را نشان می‌دهد.

جدول ۱۷ــ۳ــ نقشهٔ کارنوی مثال ۲۰ــ۳



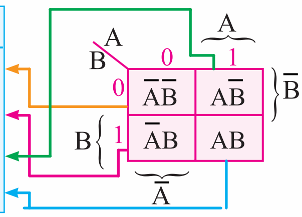
تابع خروجی از مجموع پاسخ های ردیف یک‌ها و ستون یک‌ها به دست می آید.

مشخصات جدول کارنو را به صورت‌های دیگری نیز نشان می‌دهند.

جدول ۱۸ــ۳ شمارهٔ هر خانه را با توجه به ردیف جدول صحت نشان می‌دهد.

جدول۱۸ــ۳ــ جدول صحت دو متغیره و نقشهٔ کارنوی آن

شماره سطر	A	B	Y
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

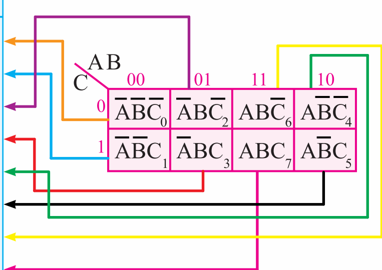


نقشهٔ کارنو برای توابع سه متغیر باید دارای ۸(۸=۲^۳) خانه باشد. به عبارت دیگر، سه متغیر می‌توانند هشت حالت مختلف را ایجاد کنند.

جدول ۱۹ــ۳ جدول صحت یک تابع سه متغیره همراه با جدول کارنوی مربوط به آن با ذکر شمارهٔ سطر در جدول صحت و شمارهٔ خانهٔ نظیر آن در جدول کارنو را نشان می‌دهد.

جدول ۱۹ــ۳ــ جدول صحت و نقشهٔ کارنو یک تابع سه متغیره

شماره سطر	A	B	C	F
0	0	0	0	
1	0	0	1	
2	0	1	0	
3	0	1	1	
4	1	0	0	
5	1	0	1	
6	1	1	0	
7	1	1	1	



در بعضی از مراجع جدول کارنو را به‌صورت جدول ۲۰ـ۳ نشان می‌دهند. هر آکولاد مشخص کنندهٔ محدوده‌ای است که متغیر مورد نظر در آن خانه‌ها وجود دارد.

جدول ۲۰ـ۳ـ جدول کارنوی هشت خانه‌ای

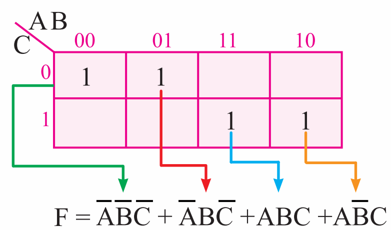
	$\bar{A}$		A		
$C \backslash AB$	00	01	11	10	
0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$	$\bar{C}$
1	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	ABC	$A\bar{B}C$	C
	$\bar{B}$	B		$\bar{B}$	

اگر به نقشهٔ کارنو خوب دقت کنید، می‌بینید که از هر خانه به خانهٔ مجاور در جهت افقی یا عمودی فقط یک متغیر جملات تغییر می‌کند.

مثال ۲۱ـ۳: تابع $F=\bar{A}B\bar{C}+ABC+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C$ را به کمک نقشهٔ کارنو ساده کنید.

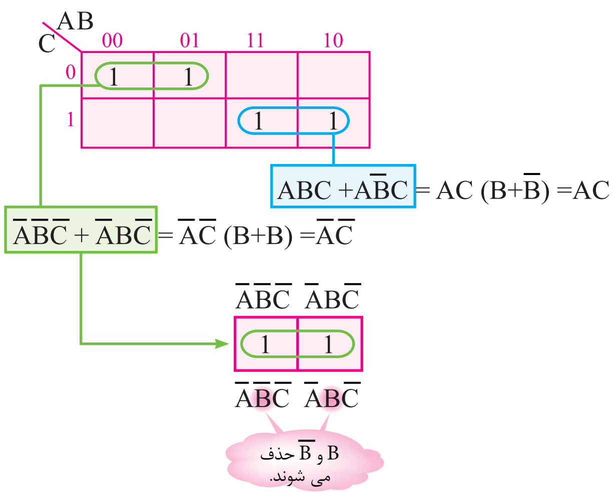
تابع F زمانی یک است که یکی از چهار جملهٔ داده شده یک باشد. توجه داشته باشید که هیچ گاه امکان ندارد دو جمله به‌طور هم زمان یک شوند. در نقشهٔ کارنو با توجه به جدول ۲۰ـ۳ در خانه‌ای که یک بودن جملهٔ آن باعث می‌شود F=۱ شود در جدول ۲۱ـ۳ عدد یک را قرار می‌دهیم و تابع خروجی را مشخص می‌کنیم.

جدول ۲۱ـ۳ـ نقشهٔ کارنوی مثال ۲۱ـ۳



همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد، اساس ساده‌سازی توابع جبر بول، فاکتورگیری و حذف متغیرهاست. نقشهٔ کارنو شیوه‌ای جدید برای ساده‌سازی ارائه نمی‌دهد بلکه جملاتی را که باید از آنها فاکتور گرفت، به نحوی مرتب (Sort) می‌کند. لذا دور جملاتی را که باید فاکتور بگیریم، خط می‌کشیم و عمل فاکتورگیری را معمولاً به صورت تصویری و در ذهن خود انجام می‌دهیم. بدین‌ترتیب، هنگامی‌که از یک خانه به خانهٔ مجاور می‌رویم، متغیری را که تغییر می‌کند حذف می‌کنیم و متغیرهایی را که در حلقهٔ محصور شده بدون تغییر می‌مانند، به صورت AND می‌نویسیم. مثلاً در جدول ۲۲ـ۳ در حلقهٔ (۱) وقتی از یک خانه به خانهٔ مجاور می‌رویم B تغییر می‌کند ولذا حذف می‌شود. در این دو خانه $\bar{A}$ و $\bar{C}$ تغییر نکرده‌اند، بنابراین، دو متغیر یاد شده را به‌صورت $(\bar{A}\bar{C})$AND نمایش می‌دهیم.

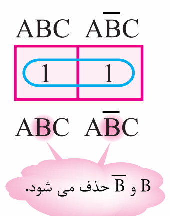
جدول ۲۲ـ۳ـ ساده‌سازی توابع سه متغیرهٔ مثال ۲۱ـ۳



در حلقهٔ دوم، وقتی از یک خانه به خانهٔ مجاور می‌رویم، فقط متغیر B تغییر می‌کند و بنابراین حذف می‌شود. متغیرهای A و C در این دو خانه تغییر نمی‌کنند؛ بنابراین، آنها را به صورت AC نشان می‌دهیم.

جدول ۲۳ـ۳ حلقهٔ دوم جدول کارنو مثال ۲۱ـ۳ را نشان می‌دهد.

جدول ۲۳ـ۳ـ حلقهٔ دوم نقشهٔ کارنو مثال ۲۱ـ۳



بدین ترتیب، تابع ساده شده به‌صورت زیر در می‌آید.

$$F = \overline{A}\,\overline{C} + AC = \overline{A \oplus C}$$

مشترکات حلقهٔ (۱)　　مشترکات حلقهٔ (۲)

تمرین کلاسی ۲۳ــ۳: تابع

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C}$$

را به کمک جدول کارنو ساده کنید.

تمرین کلاسی ۲۴ــ۳: تابع مین‌ترم F را به کمک جدول کارنو ساده کنید.

$F = \Sigma_m (m_۱, m_۲, m_۵, m_۶, m_۷)$

تمرین کلاسی ۲۵ــ۳: عبارت خروجی تابع F جدول کارنو ۲۴ــ۳ را بنویسید و در صورت ساده شدن آن را به‌ساده‌ترین شکل بنویسید.

جدول ۲۴ــ۳ــ جدول کارنوی تمرین کلاسی ۲۵ــ۳

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	1	1

توجه داشته باشید که با توجه به تعداد متغیرها فقط دور دو عدد (۱) یا چهار عدد (۱) یا هشت عدد (۱) می‌توان خط کشید و آنها را ساده کرد؛ زیرا فاکتورگیری فقط از دو یا چهار یا هشت جمله امکان‌پذیر است و تنها در این شرایط است که متغیرها حذف می‌شوند. به‌عبارت دیگر تعداد اعداد یک که در جدول کارنو دسته‌بندی می‌شوند باید توانی از ۲ باشند.

برای مثال، اگر سه جملهٔ $\overline{A}BC + ABC + A\overline{B}C$ را داشته باشیم، هریک از این جملات نسبت به جملهٔ قبلی فقط در یک متغیر اختلاف دارد، اگر بخواهیم فاکتورگیری را انجام دهیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

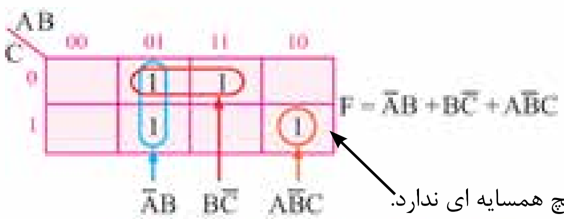
$$F = \overline{A}BC + ABC + A\overline{B}C = BC(\overline{A} + A) + A\overline{B}C \Rightarrow$$

$$F = BC + A\overline{B}C$$

از دو جملهٔ $BC + A\overline{B}C$ دیگر نمی‌توان فاکتورگیری کرد. پس هیچ گاه دور سه یا ۵ عدد یک خط نکشید. فقط دور دو عدد یک که در مجاورت یکدیگر باشند (جمله‌های آن‌ها فقط در یک متغیر اختلاف داشته باشد.) یا چهار عدد یک که همه در مجاورت یکدیگر قرار گرفته باشند، می‌توان خط کشید. در جدول‌های ۲۵ــ۳ تا ۲۸ــ۳ نمونه‌هایی از این نوع نشان داده شده است.

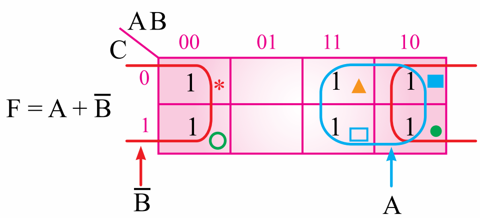
الف) $f = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C$

جدول ۲۵ــ۳ــ ساده‌سازی توابع سه متغیره



ب) $F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$

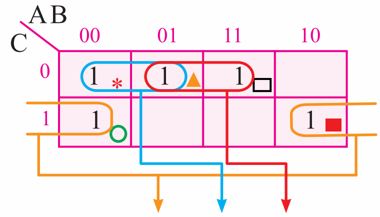
جدول ۲۶ــ۳ــ ساده‌سازی توابع سه متغیره



توجه: دوخانه سمت راست و دوخانهٔ سمت چپ مجاورند؛ زیرا جمله‌های مندرج در این خانه‌ها فقط در دو متغیر اختلاف دارند و متغیر $\bar{B}$ در هر چهار خانه مشترک است.

پ) $F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}C$

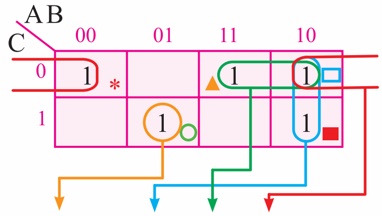
جدول ۲۷ـ۳ـ ساده‌سازی توابع سه متغیره



$F = \bar{B}C + \bar{A}\bar{C} + B\bar{C}$

ت) $F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$

جدول ۲۸ـ۳ـ ساده‌سازی توابع سه‌متغیره



$F = \bar{A}BC + A\bar{B} + A\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$

۱ـ۴ـ۳ـ ساده‌سازی توابع چهار متغیره به کمک نقشهٔ کارنو:

کمک نقشهٔ کارنو: برای ساده‌سازی توابع چهار متغیره با نقشهٔ کارنو، به یک جدول ۱۶ خانه‌ای ($۱۶=۲^۴$) نیاز داریم. این جدول در جدول ۲۹ـ۳ رسم شده است. در این جدول مشخصات متغیرها در هر خانهٔ جدول نشان داده شده است.

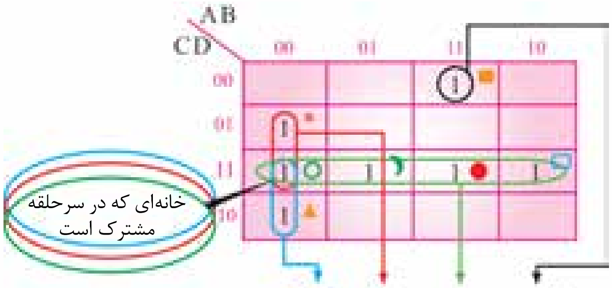
جدول ۲۹ـ۳ـ نقشهٔ کارنوی توابع چهار متغیره

CD \ AB	00	01	11	10	
00 ($\bar{C}$)	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ ۰	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ ۴	$AB\bar{C}\bar{D}$ ۱۲	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ ۸	$\bar{D}$
01 ($\bar{C}$)	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ ۱	$\bar{A}B\bar{C}D$ ۵	$AB\bar{C}D$ ۱۳	$A\bar{B}\bar{C}D$ ۹	D
11 (C)	$\bar{A}\bar{B}CD$ ۳	$\bar{A}BCD$ ۷	$ABCD$ ۱۵	$A\bar{B}CD$ ۱۱	D
10 (C)	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$ ۲	$\bar{A}BC\bar{D}$ ۶	$ABC\bar{D}$ ۱۴	$A\bar{B}C\bar{D}$ ۱۰	$\bar{D}$
	$\bar{B}$	B	B	$\bar{B}$	

مثال ۲۲ـ۳: تابع زیر را به کمک نقشهٔ کارنو ساده کنید.

$$f(A,B,C,D)=\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+A\bar{B}CD+ABCD+\bar{A}BCD+AB\bar{C}\bar{D}$$

جدول ۳۰ـ۳ـ جدول کارنو مربوط به مثال ۲۲ـ۳



$F = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}D + CD + AB\bar{C}\bar{D}$

همان‌طور که از نتایج جدول پیداست، هرقدر تعداد یک‌های محصور شده بیش‌تر باشد، جملهٔ استخراج شده ساده‌تر و تعداد متغیرهای آن کم‌تر است.

الف) زیرا وقتی فقط دور یک عدد یک خط می‌کشیم، جمله دارای چهار متغیر می‌شود.

ب) وقتی دور دو عدد یک خط می‌کشیم، جمله استخراج شده شامل سه متغیر می‌شود.

ج) وقتی دور چهار عدد یک خط بکشیم، جملهٔ استخراج شده شامل دو متغیر می‌شود.

د) درصورتی که هشت عدد یک در یک حلقه محصور شوند، جملهٔ استخراجی فقط یک متغیر را شامل می‌شود. لذا باید سعی کنیم در صورت امکان تعداد "یک" بیشتری را در داخل حلقهٔ محصور قراردهیم.

توجه داشته باشید که در این جدول ۱۶ خانه‌ای (مانند جداول ۸ خانه‌ای)، چهار خانهٔ سمت راست با چهار خانهٔ سمت چپ مجاور (همسایه) هستند و چهار خانهٔ پایین نیز باچهار خانهٔ بالا همسایه‌اند. در ضمن چهار خانهٔ گوشهٔ جدول نیز مجاور هستند.

در زیر چند مثال از توابع چهار متغیره را که به کمک نقشهٔ کارنو ساده شده‌اند، مشاهده می‌کنید.

مثال ۲۳ـ۳: تابع زیر را ساده کنید.

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D +$$
$$\overline{A}B\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD + ABC\overline{D}$$

جدول ۳۱ـ۳ـ نقشهٔ کارنوی مربوط به مثال ۲۳ـ۳

CD \ AB	00	01	11	10
00	1		1	
01		1	1	1
11				1
10	1		1	

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + AB\overline{D} + B\overline{C}D + A\overline{B}D$$

مثال ۲۴ـ۳: تابع زیر را ساده کنید.

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$$
$$+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D + ABCD$$
$$+ABC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D}$$

جدول۳۲ـ۳ـ نقشهٔ کارنوی مربوط به مثال ۲۴ـ۳

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	1
11			1	
10	1		1	1

$$F = \overline{B}\,\overline{D} + ABC + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{C}D$$

نکته: در جدول کارنو هیچ‌گاه به صورت مورب نمی‌توان از متغیر مشترکی فاکتورگیری کرد، جدول ۳۳ـ۳ این حالت را نشان می‌دهد.

جدول ۳۳ـ۳ـ خانه‌های مشترک مورب

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

موریس کارنو

متولد ۴ اکتبر ۱۹۲۴ در شهر نیویورک، فیزیکدان آمریکایی که نقشهٔ کارنوی او در جبربول مشهور است. او مطالعات خود را با فیزیک و ریاضیات در کالج شهر نیویورک آغاز کرد. پس از رفتن به دانشگاه ییل در سال ۱۹۴۹ ، موفق به کسب درجهٔ دکترا در رشتهٔ فیزیک در سال ۱۹۵۲ شد.

کارنو در آزمایشگاه‌های بل، جدول کارنو، کدگذاری PCM و نیز کدگذاری مدارهای مغناطیسی را گسترش داد. کارنو در سال ۱۹۷۶ به عنوان رئیس انجمن IEEE (انجمن بین‌المللی استانداردهای مهندسی الکترونیک) انتخاب شد.

مثال ۲۵ـ۳: مدای طرح کنید که دارای چهار کلید ورودی (چهار متغیر ورودی) باشد و دیود LED که در خروجی آن وصل شده است، مطابق جدول ۳۴ـ۳ متناسب با قطع و وصل کلیدهای ورودی، روشن و خاموش شود.

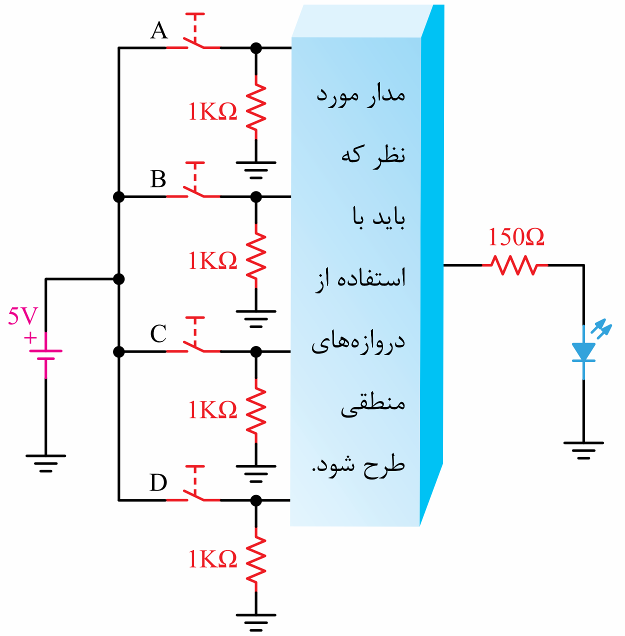
جدول ۳۴ـ۳ـ جدول صحت مربوط به مثال ۲۵ـ۳

A	B	C	D	F	LED
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	1	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	1	
1	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	
1	1	1	0	1	
1	1	1	1	0	

برای مثال، اگر هر چهار کلید باز باشند، دیود LED خاموش شود **یا** اگر تنها کلید D بسته و سایر کلیدها باز باشند، دیود LED روشن شود . سایر حالات روشن و خاموش تابع F را در جدول ملاحظه می‌کنید.

برای طراحی چنین مداری، می‌توان از رابطهٔ خروجی استفاده کرد و عمل فاکتورگیری بین متغیرها را انجام داد، تا به‌عبارت ساده‌ای رسید. یا از نقشهٔ کارنو و دسته‌بندی یک‌های نقشه به ساده کردن مدار پرداخت. در این مثال از نقشهٔ کارنو استفاده شده است. شما می‌توانید با فاکتورگیری بین متغیرهای رابطهٔ خروجی نیز به این مرحله برسید. این فاکتورگیری را برای مثال ۲۵ـ۳ تجربه کنید.

شکل ۱۹ـ۳ مدار الکتریکی مثال ۲۵ـ۳ را به‌صورت بلوکی نشان می‌دهد.



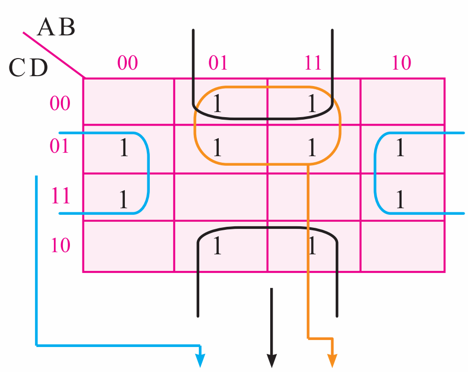
شکل ۱۹ـ۳ـ مدار الکتریکی مربوط به مثال ۲۵ـ۳

با توجه به جدول و درنظر گرفتن حالت فعال یا روشن شدن دیود LED، رابطهٔ خروجی به صورت زیر در می‌آید.

$$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}$$
$$+A\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}CD+AB\overline{C}\,\overline{D}+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}$$

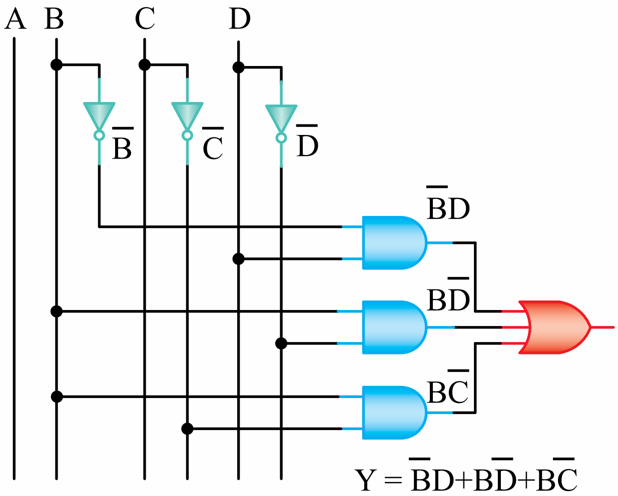
جدول ۳۵ـ۳ را رسم می‌کنیم و تابع سادهٔ شدهٔ خروجی آن را به‌دست می‌آوریم.

جدول ۳۵ـ۳ـ نقشهٔ کارنوی مربوط به مثال ۲۵ـ۳



$$F=\overline{B}D+B\overline{D}+B\overline{C}$$

با توجه به تابع خروجی F می‌توانیم مدار مورد نظر را ترسیم کنیم.



شکل ۲۰ــ۳ــ مدار منطقی مربوط به مثال ۲۵ــ۳

در شکل ۲۰ــ۳ مدار منطقی که براساس ساده‌سازی از روی جدول کارنو ۳۵ــ۳ به دست آمده است را مشاهده می‌کنید. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید کلید A هیچ‌گونه تأثیری در رفتار خروجی مدار ندارد، در این مورد توضیح دهید.

۵ــ۳ــ الگوی پرسش

۱ــ آیا مدار دیگری برای مثال ۲۵ــ۳ می‌توان طراحی کرد؟ در صورت مثبت بودن جواب آن را طراحی کنید.

۲ــ با توجه به جدول صحت ۳۶ــ۳ نقشهٔ کارنوی مربوطه را رسم کنید.

جدول ۳۶ــ۳ــ مربوط به سؤال ۲

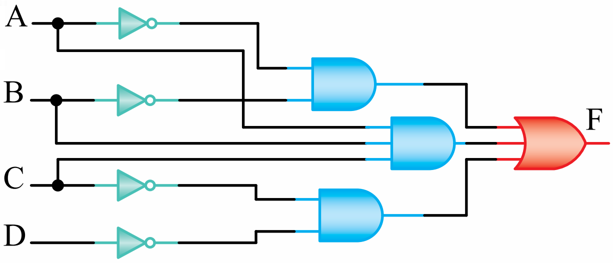
A	B	C	F	LED
0	0	0	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

۳ــ برای نقشهٔ کارنوی ۳۶ــ۳ رابطهٔ خروجی را نوشته و پس از ساده‌سازی مدار آن را طراحی کنید.

۴ــ تابع F را با استفاده از جدول کارنو ساده نمایید و مدار آن را رسم کنید.

$$F(A,B,C) = \Sigma_m (۰,۱,۳,۶)$$

۵ــ نقشهٔ کارنو و رابطهٔ خروجی مدار شکل ۲۱ــ۳ را بنویسید.



شکل ۲۱ــ۳ــ مربوط به سؤال ۵

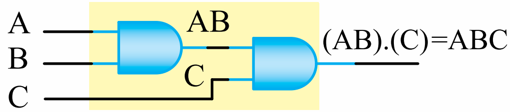
۶ــ تابع را با استفاده از جدول کارنو به ساده‌ترین شکل بنویسید.

$$F (A,B,C,D) = \Sigma_m (۱,۳,۶,۱۰,۱۱,۱۳)$$

۶ــ۳ــ افزایش ظرفیت ورودی‌های دروازه‌های منطقی

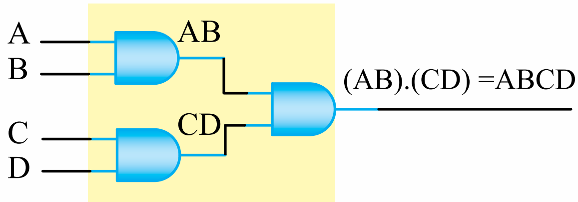
هرچند که در عمل دروازه‌های منطقی تا هشت ورودی نیز ساخته می‌شوند ولی گاهی به بیش از هشت ورودی نیاز داریم یا به دروازه‌های منطقی با ورودی حتی کم‌تر از هشت نیازمندیم ولی در دسترس نیستند در هر یک از این شرایط، می‌توان با استفاده از دروازه‌های منطقی موجود یک دروازهٔ منطقی با تعداد ورودی‌های دلخواه ساخت. در این قسمت به شرح روش افزایش تعداد ورودی‌های بعضی از دروازه‌های منطقی می‌پردازیم.

۱ــ۶ــ۳ــ افزایش تعداد ورودی‌های دروازهٔ منطقی AND: فرض کنید یک سری دروازه‌های منطقی AND با دو ورودی در دسترس داریم و در عمل، به یک دروازهٔ AND با سه ورودی نیازمندیم. مدار شکل ۲۲ــ۳ این نیاز را برآورده می‌کند.



شکل ۲۲ـ۳ـ نحوهٔ ساخت دروازهٔ AND با سه ورودی با استفاده از دو دروازهٔ AND با دو ورودی

شکل ۲۳ـ۳ معادل دروازهٔ منطقی AND با چهار ورودی را با استفاده از سه دروازهٔ منطقی AND با دو ورودی نشان می‌دهد.

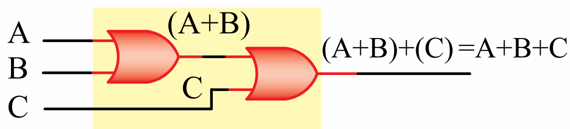


شکل ۲۳ـ۳ـ معادل دروازهٔ منطقی AND با چهار ورودی با استفاده از سه دروازهٔ منطقی AND با دو ورودی

به همین شیوه می‌توان یک دروازهٔ منطقی با هر تعداد ورودی ساخت.

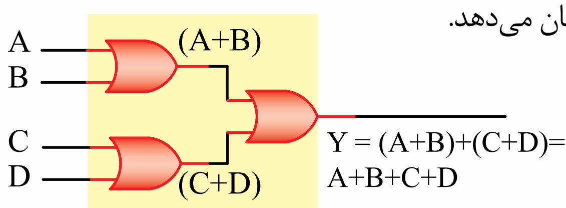
۲ـ۶ـ۳ـ افزایش تعداد ورودی‌های دروازهٔ منطقی

OR: برای افزایش تعداد ورودی‌های دروازهٔ منطقی OR، می‌توانیم از تعداد بیش‌تری دروازهٔ منطقی OR با تعداد ورودی کمتر استفاده کنیم. برای مثال، شکل ۲۴ـ۳ معادل یک دروازهٔ منطقی OR با سه ورودی را با استفاده از دو دروازهٔ منطقی OR با دو ورودی نشان می‌دهد.



شکل ۲۴ـ۳ـ نحوهٔ ساخت دروازهٔ منطقی OR با سه ورودی با استفاده از دو دروازهٔ منطقی OR با دو ورودی

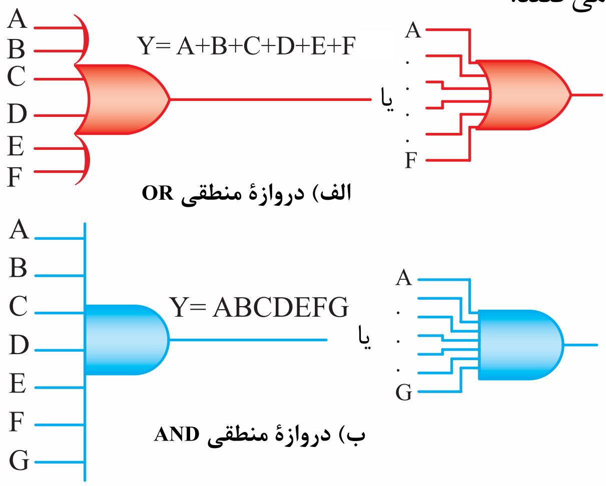
شکل ۲۵ـ۳ معادل یک دروازهٔ منطقی OR با چهار ورودی را با استفاده از سه دروازهٔ منطقی OR با دو ورودی نشان می‌دهد.



شکل ۲۵ـ۳ـ نحوهٔ ساختن دروازهٔ منطقی OR با چهار ورودی با استفاده از دروازه‌های منطقی OR با دو ورودی

به همین روش می‌توان دروازهٔ منطقی OR با هر تعداد ورودی ایجاد کرد.

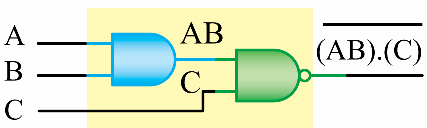
اگر تعداد ورودی‌های یک دروازهٔ منطقی زیاد شوند، معمولاً نماد آن دروازهٔ منطقی را در مقایسه با دروازهٔ منطقی معمولی بزرگ‌تر رسم نمی‌کنند بلکه آن را به اندازهٔ استاندارد به‌صورت شکل ۲۶ـ۳ـ الف و ب رسم می‌کنند.



شکل۲۶ـ۳ـ نمادهای دروازه‌های منطقی AND و OR با ورودی‌های زیاد

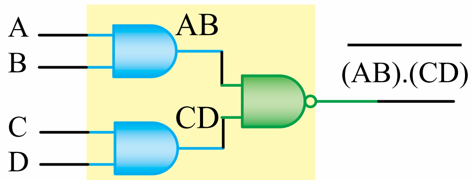
۳ـ۶ـ۳ـ افزایش تعداد ورودی‌های دروازهٔ منطقی

NAND: با استفاده از دروازه‌های منطقی AND و NAND می‌توان یک دروازهٔ منطقی NAND را با هر تعداد ورودی ساخت. شکل ۲۷ـ۳ یک دروازهٔ منطقی NAND با سه ورودی را با استفاده از یک دروازهٔ منطقی AND و یک دروازهٔ منطقی NAND نشان می‌دهد.



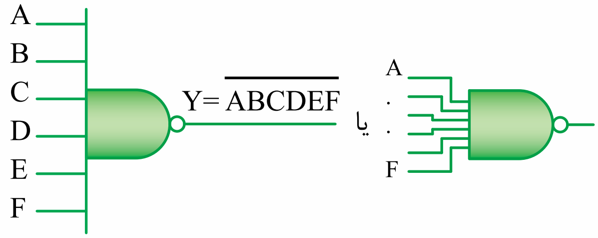
شکل ۲۷ـ۳ـ دروازهٔ منطقی NAND با سه ورودی با استفاده از دروازهٔ منطقی AND و NAND

شکل ۲۸ـ۳ یک دروازهٔ منطقی NAND با چهار ورودی را نشان می‌دهد. در این مدار از یک دروازهٔ منطقی NAND با دو ورودی و دو دروازهٔ منطقی AND استفاده شده است.



شکل ۲۸ـ۳ـ دروازۀ منطقی NAND با چهار ورودی با استفاده از دروازه‌های منطقی AND و NAND با دو ورودی

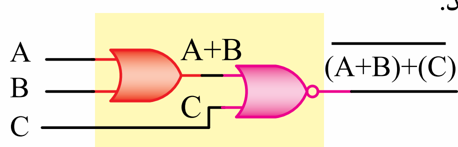
به همین روش، می‌توان دروازۀ منطقی NAND با هر تعداد ورودی ساخت. شکل ۲۹ـ۳ نمادهای دروازۀ منطقی NAND با شش ورودی را نشان می‌دهد.



شکل ۲۹ـ۳ـ نمادهای دروازۀ منطقی NAND با ورودی‌های زیاد

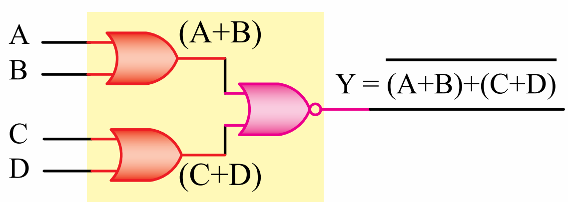
۴ـ۶ـ۳ـ افزایش تعداد ورودی‌های دروازۀ منطقی NOR:

۴ـ۶ـ۳ـ افزایش تعداد ورودی‌های دروازۀ منطقی NOR: با استفاده از دروازه‌های منطقی OR و NOR می‌توان یک دروازۀ منطقی NOR با هر تعداد ورودی ساخت. شکل ۳۰ـ۳ یک دروازۀ منطقی NOR با سه ورودی را که با استفاده از یک دروازۀ منطقی OR و یک دروازۀ منطقی NOR ساخته شده است، نشان می‌دهد.



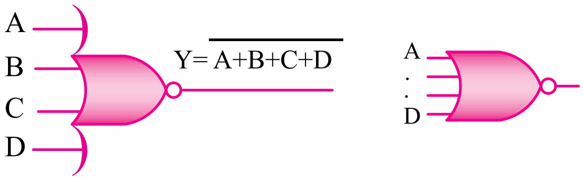
شکل ۳۰ـ۳ـ دروازۀ منطقی NOR با سه ورودی که با استفاده از دروازه‌های منطقی OR و NOR ساخته شده است.

شکل ۳۱ـ۳ یک دروازۀ منطقی NOR با چهار ورودی را که با استفاده از دروازه‌های منطقی OR و NOR با دو ورودی ساخته شده‌اند را نشان می‌دهد.



شکل ۳۱ـ۳ـ ایجاد دروازۀ منطقی NOR با چهار ورودی با استفاده از دروازه‌های منطقی OR و NOR با دو ورودی

به همین روش، می‌توان دروازۀ منطقی NOR را با هر تعداد ورودی ساخت. شکل ۳۲ـ۳ نمادهای دروازۀ منطقی NOR با چهار ورودی (یا بیش‌تر) را نشان می‌دهد.

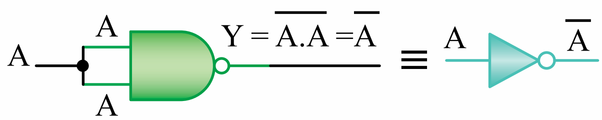


شکل ۳۲ـ۳ـ نمادهای دروازۀ منطقی NOR با چهار ورودی

۷ـ۳ـ ساخت دروازه‌های منطقی مختلف با استفاده از گیت NAND

در مدارهای منطقی، دروازۀ منطقی NAND به‌عنوان دروازۀ منطقی پایه محسوب می‌شود. بنابراین، با استفاده از این دروازۀ منطقی می‌توان سایر دروازه‌های منطقی را ساخت. در این قسمت نحوۀ ساخت سایر دروازه‌های منطقی به کمک دروازۀ منطقی NAND، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

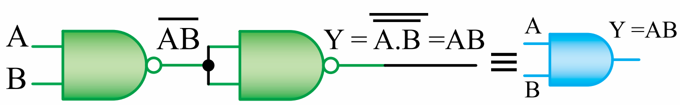
۱ـ۷ـ۳ـ ایجاد دروازۀ منطقی NOT(نه): اگر تمامی ورودی‌های دروازۀ منطقی NAND را به یکدیگر وصل کنیم، یک دروازۀ منطقی NOT حاصل می‌شود، شکل ۳۳ـ۳ دروازۀ منطقی NOT را با استفاده از گیت NAND نشان می‌دهد.



شکل ۳۳ـ۳ـ ساخت دروازه منطقی NOT با استفاده از NAND

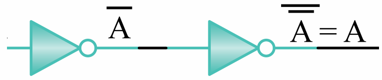
۲ـ۷ـ۳ـ ساخت دروازۀ منطقی AND: به کمک دو عدد دروازه منطقی NAND می‌توان یک دروازه منطقی AND ساخت.

شکل ۳۴ـ۳ ساخت دروازۀ منطقی AND را با کمک NAND نشان می‌دهد.



شکل ۳۴ـ۳ـ ساخت دروازۀ منطقی AND با استفاده از NAND

۳ـ۷ـ۳ـ تولید دروازهٔ منطقی OR: می‌دانیم که $\overline{\overline{A}}=A$ ($\overline{\overline{A}}$ می‌خوانیم A نات نات) است، زیرا طبق شکل ۳ـ۳۵ از معکوس هر متغیر NOT شده خودمتغیر به‌وجود می‌آید.

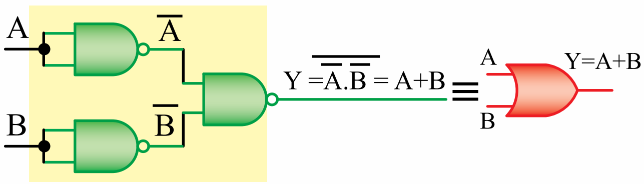


شکل ۳۵ـ۳ـ معکوس هر متغیر NOT شده مساوی خود متغیراست.

طبق قضیه دمورگان داریم:

$$Y=A+B=\overline{\overline{A+B}}+\overline{\overline{\overline{A}.\overline{B}}}$$

در شکل ۳۶ـ۳ ایجاد دروازهٔ منطقی OR را با استفاده از قضیهٔ دمورگان مشاهده می‌کنید.

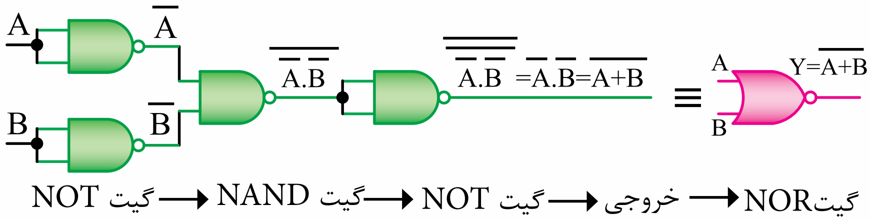


شکل ۳۶ـ۳ـ ساخت دروازهٔ منطقی OR با استفاده از NAND

۳ـ۷ـ۴ـ دروازهٔ منطقی NOR: با استفاده از قوانین (قضیه‌های) دمورگان می‌توانیم بنویسیم

$$Y=\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}=\overline{\overline{\overline{A}.\overline{B}}}$$

یعنی اگر دو گیت NOT را با هم ANDکنیم، سپس آنها را دو بار NOT کنیم، حاصل گیت NOR خواهد بود، شکل ۳ـ۳۷ ساخت دروازهٔ منطقی NOR را نشان می‌دهد.



شکل ۳۷ـ۳ـ ساخت دروازهٔ منطقیNOR با استفاده از NAND

۳ـ۷ـ۵ـ دروازهٔ منطقی OR انحصاری XOR: با توجه به رابطهٔ منطقی XOR، آن را به‌صورت جملات NAND درمی‌آوریم؛ زیرا باید با دروازهٔ منطقی NAND ساخته شود.

تابع گیت XOR $\quad Y=A\oplus B=\overline{A}B+A\overline{B}$

برای این‌که تابع با گیت‌های NAND اجرا شود تابع را به‌صورت زیر تغییر می‌نویسیم:

$$Y=\overline{A}B+A\overline{B} \qquad (۱)$$

می‌دانیم صفر در جمع یک عضو خنثی است

$$\overline{A}B=\overline{A}B+0$$

به‌جای صفر مقدار می‌گذاریم و از عامل مشترک فاکتور می‌گیریم.

$$\overline{A}B+0=\overline{A}B+B\overline{B}=B(\overline{A}+\overline{B})$$

طبق رابطهٔ دمورگان داریم:

$$B(\overline{A}+\overline{B})=B(\overline{AB}) \qquad (۲)$$

برای رابطهٔ $A\overline{B}$ نیز مشابه بالا عمل می‌کنیم.

$$A\overline{B}=A\overline{B}+0=A\overline{B}+A\overline{A}=A(\overline{B}+\overline{A})$$

طبق رابطهٔ دمورگان داریم:

$$A(\overline{B}+\overline{A})=A(\overline{AB}) \qquad (۳)$$

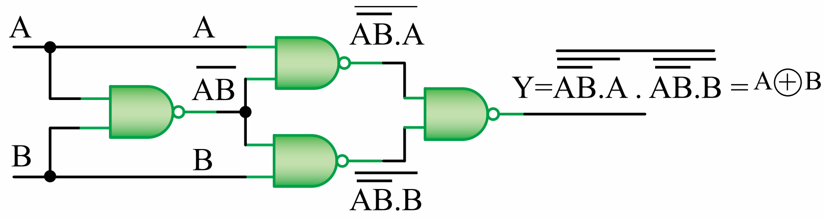
مقادیر رابطه (۲) و (۳) را در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم.

$$\overline{A}B+A\overline{B}=B(\overline{AB})+A(\overline{AB})$$

این تابع را دو بار نفی می‌کنیم.

$$\overline{\overline{\overline{A}B+A\overline{B}}}=\overline{\overline{B(\overline{AB})-B(\overline{AB})}}$$

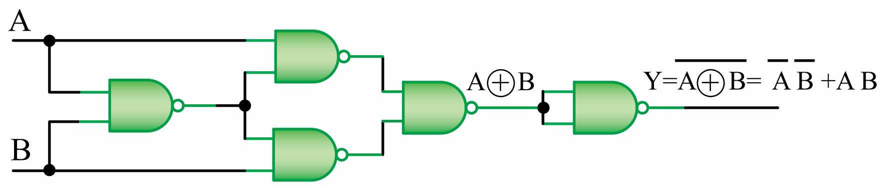
همان‌طور که ملاحظه می‌شود با استفاده از قانون دمورگان نتیجه نهایی به‌دست می‌آید و تابع با استفاده از گیت NAND مشابه شکل ۳ـ۳۸ خواهد شد.



شکل ۳۸ـ۳ـ ساخت دروازهٔ منطقی OR انحصاری با استفاده از NAND

۶ـ۷ـ۳ـ دروازهٔ منطقی NOR انحصاری (XNOR):

برای ساخت این دروازهٔ منطقی با استفاده از دروازه‌های منطقی NAND، کافی است خروجی دروازهٔ منطقی XOR را که با استفاده از گیت NAND ساخته شده است NOT کنیم. در شکل ۳۹ـ۳ دروازهٔ منطقی XNOR را با استفاده از دروازهٔ منطقی NAND مشاهده می‌کنید.

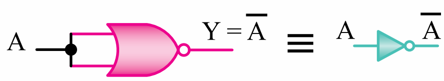


شکل ۳۹ـ۳ـ ساخت دروازهٔ منطقی NOR انحصاری با استفاده از NAND

۸ـ۳ـ ساخت دروازه‌های منطقی مختلف با استفاده از گیت NOR

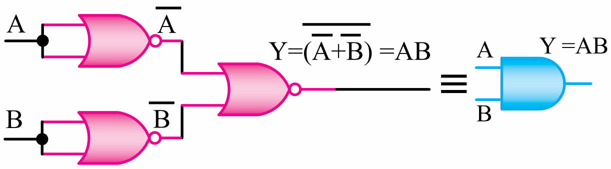
در مدارهای منطقی دروازهٔ منطقی NOR، نیز دروازهٔ منطقی پایه محسوب می‌شود. بنابراین، با این دروازهٔ منطقی می‌توان سایر دروازه‌های منطقی را ساخت. در این قسمت نحوهٔ ساخت سایر دروازه‌های منطقی به کمک دروازهٔ منطقی NOR را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱ـ۸ـ۳ـ ساخت دروازهٔ منطقی NOT(نه): اگر تمامی ورودی‌های دروازهٔ منطقی NOR را به یکدیگر وصل کنیم، یک دروازهٔ منطقی NOT به‌دست می‌آید. شکل ۴۰ـ۳ این گیت را نشان می‌دهد.



شکل ۴۰ـ۳ـ ساخت دروازهٔ منطقی NOT با استفاده از NOR

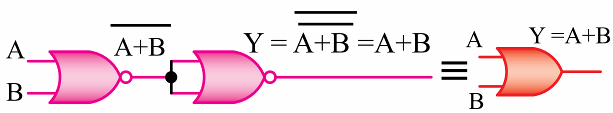
۲ـ۸ـ۳ـ ایجاد دروازه منطقی AND: به کمک سه عدد دروازهٔ منطقی NOR می‌توان یک دروازهٔ منطقی AND مطابق شکل ۴۱ـ۳ ساخت:



شکل ۴۱ـ۳ـ ساخت دروازهٔ منطقی AND با استفاده از NOR

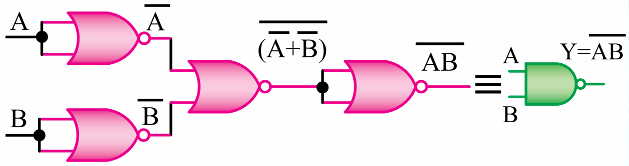
تحلیل این مدار بر عهدهٔ هنرجویان واگذار می‌شود.

۳ـ۸ـ۳ـ تولید دروازهٔ منطقی OR: با کمک دو عدد دروازهٔ منطقی NOR می‌توان یک دروازهٔ منطقی OR مطابق شکل ۴۲ـ۳ ساخت. زیرا اگر هر تابع دو بار NOT شود خود تابع به‌دست می‌آید.



شکل ۴۲ـ۳ ساخت دروازهٔ منطقی OR با استفاده از NOR

۴ـ۸ـ۳ـ دروازهٔ منطقی NAND: در شکل ۴۳ـ۳ چگونگی ساخت دروازهٔ منطقی NAND را با استفاده از دروازهٔ منطقی NOR مشاهده می‌کنید.



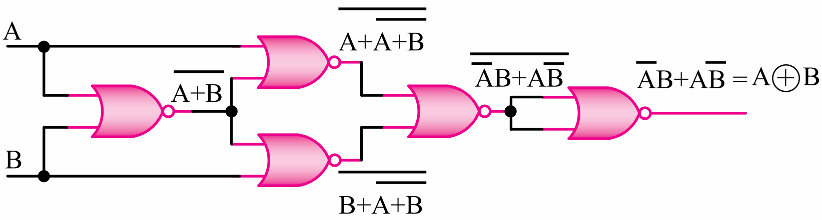
شکل ۴۳ــ۳ــ ساخت دروازهٔ منطقی NANDبا استفاده از NOR

همان‌طور که مشاهده می‌شود ابتدا با استفاده از دروازهٔ NOR، دو دروازهٔ NOT تشکیل می‌دهیم. سپس خروجی‌ها را مجدداً NOR می‌کنیم، خروجی را دوباره NOT می‌کنیم و خروجی نهایی گیت NAND خواهد شد.

۵ــ۸ــ۳ــ دروازهٔ منطقی XOR: می‌دانیم رابطهٔ منطقی XOR به صورت زیر است.

$$Y = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

و مدار ساخته‌شده در شکل ۳۸ــ۳ را با گیت‌های NOR مطابق شکل ۴۴ــ۳ رسم می‌کنیم.

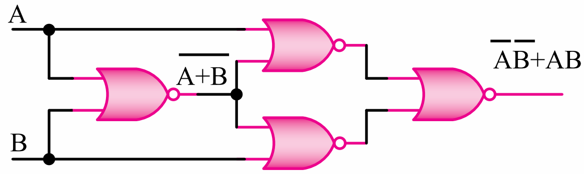


شکل ۴۴ــ۳ ساخت دروازهٔ منطقی XOR با استفاده از NOR

۶ــ۸ــ۳ــ دروازهٔ منطقی XNOR: می‌دانیم رابطه XNOR به صورت زیر است:

$$Y = \overline{A \oplus B} = \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

از شکل مدار ۴۴ــ۳ استفاده می‌کنیم و با حذف آخرین NOT مدار XNOR شکل ۴۵ــ۳ طراحی می‌شود.



شکل ۴۵ــ۳ــ ساخت دروازهٔ منطقی XNOR با استفاده از NOR

تمرین کلاسی ۲۶ــ۳: برای به‌دست آوردن رابطهٔ نهایی شکل ۴۴ــ۳ خروجی هر گیت را جداگانه بنویسید و به رابطهٔ نهایی برسید.

تمرین کلاسی ۲۷ــ۳: برای به‌دست آوردن رابطهٔ نهایی شکل ۴۵ــ۳ خروجی هر یک از گیت‌ها را جداگانه بنویسید و به رابطهٔ نهایی برسید.

۹ــ۳ــ مقدمه‌ای بر مدارهای ترکیبی

۱ــ۹ــ۳ــ تنظیم جدول صحت از روی داده‌های مسئله

مسئله: همان‌گونه که در این فصل گفته شد، هر تابع منطقی را می‌توان به صورت یک جملهٔ مجموع حاصل‌ضرب‌ها یا یک جملهٔ حاصل‌ضرب جمع‌ها بیان کرد. در حالت اول، جملهٔ حاصل ضرب متناظر با هر حالت ورودی را که تابع خروجی به‌ازای آن «۱» می‌شود می‌نویسیم و سپس کلیهٔ این جمله‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال ۲۶ــ۳: تابع خروجی جدول ۳۷ــ۳ را بنویسید.

جدول ۳۷ـ۳ـ جدول‌صحت مثال ۲۶ـ۳

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	1	$\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	1	$\bar{A}BC$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\bar{B}C$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

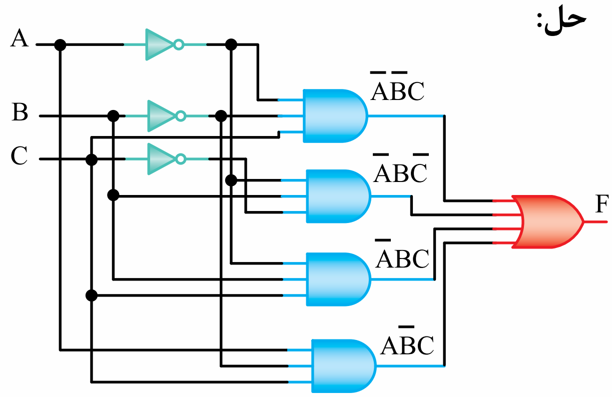
حل: با توجه به جدول ۳۷ـ۳ جملهٔ مربوط به سطری که خروجی «یک» است، را می‌نویسیم.

$$F=\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C$$

برای اجرای تابع به مجموعه‌ای از دروازه‌های منطقی AND نیاز داریم. خروجی هرکدام از این دروازه‌ها متناظر با یک جملهٔ حاصل‌ضرب است و سرانجام، باید خروجی همهٔ این دروازه‌ها را با یکدیگر OR کنیم.

مثال ۲۷ـ۳: مدار تابع خروجی مثال ۲۶ـ۳ را با استفاده از گیت‌های منطقی طراحی کنید.

حل:



شکل ۴۶ـ۳ـ مدار مثال ۲۷ـ۳

البته فراموش نکنید که برای کاهش تعداد دروازه‌ها، می‌توانیم در صورت امکان ابتدا تابع را به روش جبری یا با استفاده از جدول کارنو ساده کنیم و سپس تابع ساده شده را با دروازه‌های AND و OR کم‌تری اجرا کنیم.

مثال ۲۸ـ۳: تابع خروجی مدار مثال ۲۷ـ۳ را ساده کنید و سپس مدار تابع ساده شده را ترسیم کنید.

حل:

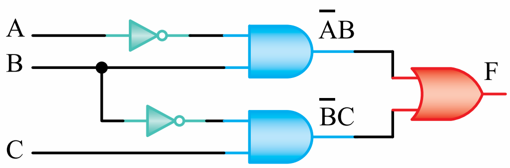
$$F=\underset{۱}{\bar{A}\bar{B}C}+\underset{۲}{\bar{A}B\bar{C}}+\underset{۳}{\bar{A}BC}+\underset{۴}{A\bar{B}C}$$

از جمله‌های اول و چهارم عامل مشترک $\bar{B}C$ و از جمله‌های دوم و سوم عامل مشترک $\bar{A}B$ را فاکتورگیری می‌کنیم.

$$F=\bar{B}C(\overset{1}{\cancel{\bar{A}+A}})+\bar{A}B(\overset{1}{\cancel{\bar{C}+C}})$$

$$F=\bar{B}C+\bar{A}B$$

مدار خروجی F را طراحی و رسم می‌کنیم.



شکل ۴۷ـ۳ـ مدار ساده‌شدهٔ مثال ۲۸ـ۳

برای بیان تابع به صورت حاصل ضرب جمع‌ها باید جملهٔ مجموع متناظر با هر حالت «۰» تابع را بنویسیم. سپس کلیهٔ جملات را در یک‌دیگر ضرب می‌کنیم. البته در صورت امکان باید تابع F ساده شده و درنهایت تابع ساده‌شده را به‌صورت AND–OR به اجرا در آوریم.

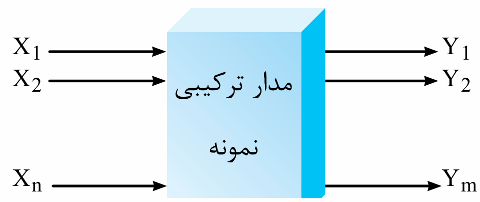
در این فصل، ابتدا روش آنالیز و طرح مدارهای ترکیبی را به‌صورت عام بیان می‌کنیم و سپس به تفکیک و با تفصیل بیشتر به بررسی مدارهای ترکیبی با کاربری عمومی می‌پردازیم.

تمرین کلاسی ۲۸ـ۳: تابع خروجی مثال ۲۶ـ۳ را با استفاده از جدول کارنو ساده کنید و با مدار به‌دست آمده در مثال ۲۸ـ۳ مقایسه کنید.

تمریـــن کلاسی ۲۹ـ۳: تابع ماکس‌تـــرم خروجـی مثـــال ۲۶ـ۳ را بنویسید و پس از ساده‌کـــردن تابع خروجی با استفاده از جدول کارنو مدار آن را طراحی و ترسیم کنید.

۲ـ۹ـ۳ـ تعریف مدار ترکیبی: مدار ترکیبی به مداری اطلاق می‌شود که وضعیت خروجی‌های آن در هر لحظه منحصراً به وضعیت ورودی‌های آن، در همان لحظه بستگی دارد. در چنین مداری، هیچ خروجی‌ای به هیچ ورودی‌ای از مدار برگشت داده نمی‌شود.

در شکل ۴۸ـ۳ بلوک دیاگرام یک مدار ترکیبی نشان داده شده است. یادآوری می‌شود که در فصل چهارم در ارتباط با مدارهای ترکیبی ویژهٔ کاربردی به‌طور مفصل بحث خواهد شد.

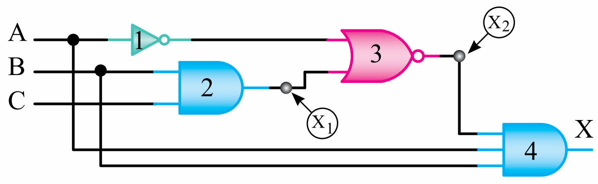


شکل ۴۸ـ۳ـ بلوک دیاگرام یک مدار ترکیبی

۳ـ۹ـ۳ـ آنالیز مدارهای ترکیبی: برای بررسی رفتار یک مدار ترکیبی، باید پاسخ مدار را به همهٔ حالت‌های ورودی آن به‌دست آوریم. می‌دانید که اگر مداری n ورودی مختلف داشته باشد دارای 2^nحالت متفاوت است. برای به‌دست آوردن پاسخ کلّی مدار، نخست باید تابع منطقی هر یک از خروجی‌های آن را بر حسب متغیرهای ورودی در فرم مجموع حاصل‌ضرب‌ها یا حاصل‌ضرب جمع‌ها به‌دست آوریم.

سپس به روش جبری یا به کمک جدول کارنو صورت نرمال تابع را مشخص کنیم و در نهایت به کمک آن «جدول صحّت» مدار را تشکیل دهیم.

مثال ۲۹ـ۳: در مدار شکل ۴۹ـ۳ نخست تابع خروجی X را بر حسب متغیرهای A،Bو C به‌صورت مجموع حاصل‌ضرب‌ها به‌دست آورید و سپس جدول صحت مدار را رسم کنید.



شکل ۴۹ـ۳ـ مدار مربوط به مثال ۲۹ـ۳

حل:

مطابق شکل ورودی‌های دروازهٔ AND شمارهٔ ۴، متغیرهای A، B و تابع x_2است. بنابراین، خروجی X برابر است با:

$$X=ABx_2$$

از طرف ورودی‌های دروازهٔ NOR شمارهٔ ۳، متغیر $\overline{A}$ و تابع x_1 است . بنابراین خروجی این دروازه برابر است با:

$$x_2=\overline{(\overline{A}+x_1)}=A\overline{x_1}$$

چون x_1=BC است، در نتیجه داریم:

$$x = AB\,x_2$$

$$\downarrow$$

$$= AB \quad A\overline{x_1} = AB \quad \overline{x_1}$$

$$\downarrow$$

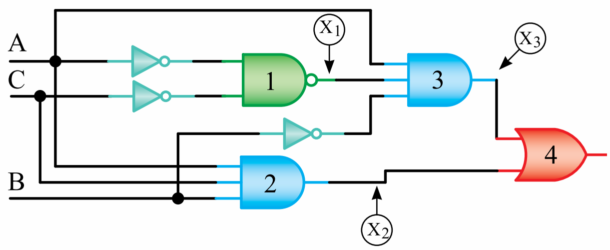
$$= AB \quad \overline{BC} = AB\ (\overline{B}+\overline{C}) = AB\overline{C}$$

یعنی، خروجی مدار فوق فقط در حالتی که A=۱ ، B=۱ و C=۰ باشد برابر با «۱» می شود (مین‌ترم سطر شمارهٔ ۶). جدول صحّت مدار را در جدول ۳۸ـ۳ ملاحظه می‌کنید.

جدول ۳۸ـ۳ـ جدول صحت مربوط به مثال ۲۹ـ۳

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

مثال ۳۰ـ۳: مدار شکل ۵۰ـ۳ را تجزیه و تحلیل کنید. سپس آن را در فرم NAND_NAND (همه گیت‌ها NAND باشند) اجرا کنید.



شکل ۵۰ـ۳ـ مدار مربوط به مثال ۳۰ـ۳

حل: با توجه به شکل ۵۰ـ۳ مدار مقادیر $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$ را با توجه به ورودی‌ها و گیت‌های موجود به‌دست می‌آوریم.

$X_۱=\overline{\overline{A}.\overline{C}}=A+C$

و

$X_۳=A.x_۱.\overline{B}=A(A+C)\overline{B}=A\overline{B}+AB\overline{C}$

یا

$x_۳=A\overline{B}(۱+C)=A\overline{B}$

و

$X_۲ = ABC$

پس از تعیین مقادیر $X_۲$، $X_۳$ می‌توانیم تابع خروجی Z را به‌دست آوریم:

یا

$Z = X_۲ + X_۳$

$Z = ABC + A\overline{B}$

جملهٔ ABC یک جملهٔ نرمال است ولی جملهٔ $A\overline{B}$ را باید به‌صورت نرمال بیان کنیم، برای نرمال کردن $A\overline{B}$ از اتحادها استفاده می‌کنیم.

$A\overline{B}=A\overline{B}\times ۱$

$A\overline{B} = A\overline{B}(\overline{C}+C)$

$A\overline{B} = A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$

مقادیر معادل $A\overline{B}$ را در تابع Z قرار می‌دهیم:

$Z = ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$

مطابق جدول صحت شمارهٔ سطر هر یک از جمله‌های تابع Z را مشخص می‌کنیم.

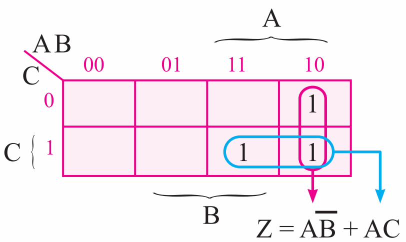
$Z = \underbrace{ABC}_{\text{سطر ۷}} + \underbrace{A\overline{B}\,\overline{C}}_{\text{سطر ۴}} + \underbrace{A\overline{B}C}_{\text{سطر ۵}}$

در نتیجه می‌توانیم تابع Z را به صورت زیر هم بنویسیم.

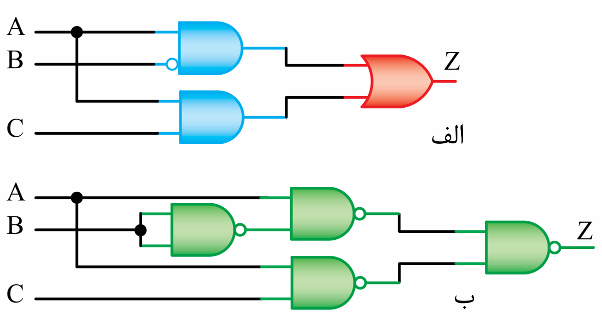
$Z = \Sigma_m (m_۷, m_۴, m_۵)$

برای اجرای این تابع با دروازه‌های منطقیNAND، ابتدا باید آن را ساده کنیم. با استفاده از جدول کارنو، نتیجه می‌شود:

جدول ۳۹ـ۳ـ جدول کارنو مربوط به مثال ۳۰ـ۳



و ساده‌ترین مدار این تابع به شکل ۵۱ـ۳ـ الف یا معادل NAND-NAND آن، شکل ۵۱ـ۳ـ ب قابل اجراست.



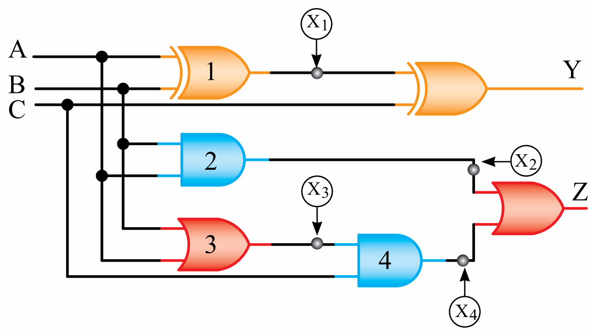
شکل ۵۱ـ۳ـ مدارهای مربوط به مثال ۳۰ـ۳

> **جهت دانش‌آموزان علاقه‌مند:** آیا می‌توانید با توجه به جمله‌های استاندارد یک تابع منطقی شمارهٔ سطر مربوط به هر جمله را بنویسید. تحقیق و تلاش کنید و نتیجه را به کلاس ارائه نمایید.

> **جهت دانش‌آموزان علاقه‌مند:** آیا می‌دانید بین شمارهٔ سطر جدول صحت یک تابع منطقی و اعداد باینری چه رابطه‌ای است؟ تحقیق کنید و نتیجه را به کلاس ارائه نمایید.

ممکن است یک مدار ترکیبی بیش از یک خروجی داشته باشد. برای به‌دست آوردن جدول صحّت این گونه مدارها باید تابع منطقی هر یک از خروجی‌ها را، مستقل از بقیّه به‌دست آوریم. سپس با توجّه به توابع منطقی به‌دست آمده، جدول صحّت مدار را رسم کنیم.

مثال ۳۱ــ۳: در شکل ۵۲ــ۳ هر یک از توابع Y و Z را برحسب متغیرهای A، B و C در فرم مجموع حاصل‌ضرب‌ها به‌دست آورید، سپس جدول صحّت مدار را رسم کنید.



شکل ۵۲ــ۳ــ مدار مثال ۳۱ــ۳

حل: با توجه به شکل ۵۲ــ۳ می‌توانیم بنویسیم:

برای حل مسئله باید مقادیر x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 را به‌دست آوریم تا توابع Y و Z قابل دسترسی باشد.

$$X_1 = A \oplus B \;,\; Y = x_1 \oplus C$$

یا

$$Y = A \oplus B \oplus C$$

(چرا؟)

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

یا

$$Y = \Sigma m\,(1,2,4,7)$$

و

$$Z = x_2 + x_4$$

که چون $x_2=AB$ و $x_4=Cx_3$ است، خواهیم داشت:

$$Z = AB + Cx_3$$

اگر در تابع فوق به جای x_3 معادل آن یعنی $x_3 = A+B$ را جایگزین کنیم، مقدار Z برابر است با:

$$Z = AB + C(A+B) = AB + AC + BC$$

و در نهایت پس از نرمال کردن تابع خواهیم داشت.

$$Z = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

(تابع نرمال را اثبات کنید.)

که در این تابع جملات ۳، ۵، ۶ و ۷ وجود دارد.

$$Y = \Sigma m\,(3,5,6,7)$$

حاصل عملیات فوق را در جدول صحت ۴۰ــ۳ مشاهده می‌کنید.

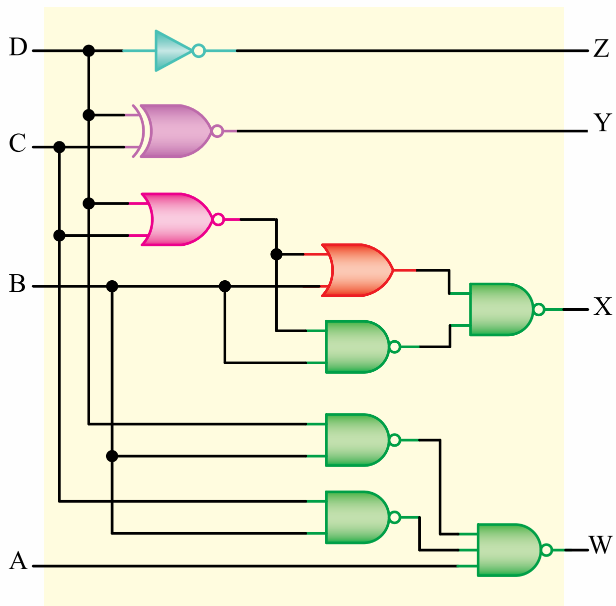
جدول ۴۰ــ۳ــ جدول صحت مربوط به مثال ۳۱ــ۳

شماره‌های سطر	A	B	C	Y	Z
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1

تمرین کلاسی ۳۰ـ۳: جدول صحت مدار شکل ۵۳ـ۳ را برای حالت‌های داده شده در جدول ۴۱ـ۳ تکمیل کنید.

جدول ۴۱ـ۳ـ جدول صحت تمرین کلاسی ۳۰ـ۳

شماره‌های سطر	A	B	C	D	W	X	Y	Z
0	0	0	0	0	.	.	.	.
1	0	0	0	1	.	.	.	.
2	0	0	1	0	.	.	.	.
3	0	0	1	1	.	.	.	.
4	0	1	0	0	.	.	.	.
5	0	1	0	1	.	.	.	.
6	0	1	1	0	.	.	.	.
7	0	1	1	1	.	.	.	.
8	1	0	0	0	.	.	.	.
9	1	0	0	1	.	.	.	.



شکل ۵۳ـ۳ـ مدار مربوط به تمرین کلاسی

۴ـ۹ـ۳ـ طراحی مدارهای ترکیبی ساده: برای طراحی یک مدار ترکیبی، باید به ترتیب زیر عمل کنیم.

الف) جدول صحت مدار را براساس عملکرد تعریف شده برای مدار به‌دست آوریم. اگر این گام را که گامی اساسی برای طراحی یک مدار ترکیبی است، درست برداریم دنبال کردن مراحل بعدی تا اجرای سخت‌افزاری مدار از یک روند منطقی کاملاً روشن و معیّن تبعیّت می‌کند.

ب) به کمک جدول صحّت مدار هر یک از توابع خروجی آن را در فرم مجموع حاصل‌ضرب‌ها (یا حاصل ضرب جمع‌ها) بیان می‌کنیم.

پ) هر یک از توابع فوق را به روش جبری یا با استفاده از جدول کارنو ساده می‌کنیم.

ت) هر یک از توابع ساده شده را به‌صورت یک ترکیب OR_AND یا NAND_NAND اجرا می‌کنیم.

مثال ۳۲ـ۳: مداری با سه ورودیA، B،C و یک خروجی Y طرح کنید که در حالت‌هایی که اکثریت نسبی ورودی‌ها یک باشد، خروجی آن یک شود. مدار را در ساده‌ترین فرم مجموع حاصل‌ضرب‌ها اجرا کنید.

حل: با توجه به صورت مسئله، خروجی مدار در حالت‌هایی که دست‌کم دو ورودی آن در حالت یک باشد، یک می‌شود؛ بنابراین، جدول صحّت آن به‌صورت جدول ۴۲ـ۳ بیان می‌گردد.

جدول ۴۲ـ۳ـ جدول صحت مربوط به مثال ۳۲ـ۳

شماره‌های سطر	A	B	C	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

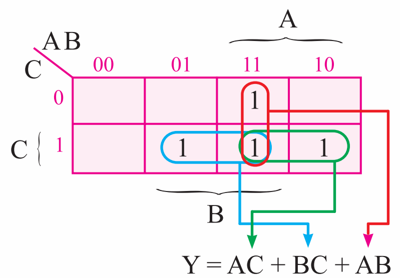
یعنی، تابع Y در فرم نرمال مجموع حاصل ضرب‌ها برابر است با:

$$Y = \Sigma m\ (۳,۵,۶,۷)$$

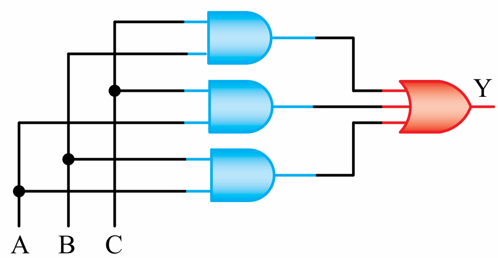
$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

که فرم ساده‌شدهٔ آن با توجه به نقشهٔ کارنو ۴۳ـ۳ شامل جملهٔ AC, AB و BC است.

جدول ۴۳ـ۳ـ جدول کارنو مثال ۳۲ـ۳



و مدار آن شامل سه دروازهٔ AND با دو ورودی و یک دروازهٔ OR با سه ورودی مطابق شکل ۵۴ـ۳ است.



شکل ۵۴ـ۳ـ مدار مربوط به مثال ۳۲ـ۳

۱۰ـ۳ـ الگوی پرسش

۱ـ مداری طراحی کنید که :

الف) دارای سه ورودی A , B و C باشد.

ب) چنان‌چه C=۰ باشد A در خروجی ظاهر شود.

پ) چنان‌چه C=۱ باشد B در خروجی ظاهر شود.

ابتدا جدول صحت و رابطهٔ خروجی را به دست آورید. سپس مدار را با توجه به رابطهٔ خروجی طراحی کنید.

۲ـ در درون اتاق کلیدی نصب شده است و در بیرون آن نیز کلیدی دیگر قرار دارد. وضعیت کلید اول توسط مسئول اتاق و کلید دوم توسط کسی که می‌خواهد وارد اتاق شود تغییر می‌کند. مداری طراحی کنید که اگر وضعیت این دو کلید با یکدیگر اختلاف دارند، مسئول اتاق با خبر شود.

حل یک مثال جهت راهنمایی هنرجویان

مثال ۳۳ـ۳: سه نفر به نام‌های A , B و C در یک آزمایشگاه کار می‌کنند. به لحاظ شرایط امنیتی، این سه باید تحت شرایط خاصی وارد شوند. برای این منظور هریک دارای کلید خاصی می‌باشند و درب اتاق آزمایشگاه هنگامی باز می‌شود که شرایط لازم زیر برقرار باشد. مداری طراحی نمایید که به وسیلهٔ آن شرایط زیر کنترل شده و در صورت مجاز بودن درب باز شود.

الف) A , B و C به تنهایی می‌توانند در اتاق باشند.

ب) A و B یا A و C می‌توانند با هم در اتاق باشند. ولی B و C فقط در حضور A می‌توانند در اتاق باشند.

پ) غیر از این سه، شخص دیگری حق ورود ندارد.

حل: برای پاسخ دادن به این‌گونه سؤالات ابتدا جدول صحت تابع خروجی را با توجه به شرایط مطرح شده رسم می‌کنیم. این تابع سه ورودی دارد.

جدول ۴۵ـ۳ـ جدول صحت مثال ۳۳ـ۳

A	B	C	Y	
0	0	0	0	شرط پ
0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$ شرط الف
0	1	0	1	$\overline{A}B\overline{C}$ شرط الف
0	1	1	0	قسمت دوم شرط ب
1	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}$ شرط الف
1	0	1	1	$A\overline{B}C$ قسمت اول شرط ب
1	1	0	1	$AB\overline{C}$ قسمت اول شرط ب
1	1	1	1	ABC قسمت دوم شرط ب

تابع خروجی را می‌نویسیم.

$$F = \underbrace{\overline{A}\,\overline{B}C}_{۱} + \underbrace{\overline{A}B\overline{C}}_{۲} + \underbrace{A\overline{B}\,\overline{C}}_{۴} + \underbrace{A\overline{B}C}_{۵} + \underbrace{AB\overline{C}}_{۶} + \underbrace{ABC}_{۷}$$

از عوامل مشترک فاکتورگیری می‌کنیم.

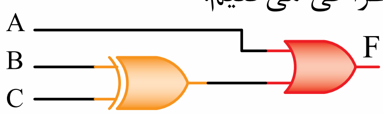
$$F=\underbrace{\bar{B}C\overset{۱}{\cancel{(\bar{A}+A)}}}_{\text{۵ و ۱}}+\underbrace{B\bar{C}\overset{۱}{\cancel{(\bar{A}+A)}}}_{\text{۶ و ۲}}+\underbrace{A\bar{B}\overset{۱}{\cancel{(\bar{C}+C)}}}_{\text{۵ و ۴}}+\underbrace{AB\overset{۱}{\cancel{(\bar{C}+C)}}}_{\text{۷ و ۶}}$$

$$F=\underbrace{\bar{B}C}_{۱}+\underbrace{B\bar{C}}_{۲}+\underbrace{A\bar{B}}_{۳}+\underbrace{AB}_{۴}$$

جمله‌های ۱ و ۲ گیت XOR را تشکیل می‌دهند و از جمله‌های ۳ و ۴ از عامل A فاکتورگیری می‌کنیم.

$$F=B\oplus C+A\overset{۱}{\cancel{(\bar{B}+B)}}=B\oplus C+A$$

مدار را طراحی می‌کنیم.



شکل ۵۵ـ۳ـ مدار مربوط به مثال ۳۳ـ۳

جهت هنرجویان علاقه‌مند: برای کنترل چراغ راهنمایی یک چهار راه از یک مرکز فرماندهی دستور تغییر رنگ چراغ‌ها داده می‌شود. این دستور توسط دو کلید فرمان و چند رشته سیم به چهار راه می‌رسد. هدف طراحی مداری است که توسط آن سیگنال‌های رسیده به چراغ راهنمایی، چراغ‌ها را به ترتیب زیر روشن یا خاموش نماید.

*چراغ A هنگامی سبز یا زرد است که چراغ B قرمز باشد.

* چراغ B هنگامی سبز یا زرد است که چراغ A قرمز باشد.

جهت راهنمایی برای حل تمرین جدول صحت مدار را رسم کرده‌ایم. توجه داشته باشید که در این مدار شش خروجی (چراغ راهنمایی) داریم (جدول ۴۴ــ۳).

جدول صحت ۳۴ـ۳ـ جدول صحت مدار چراغ راهنمایی

کلیدهای فرمان		چراغ‌های سمت A			چراغ‌های سمت B		
X	Y	A_R	A_Y	A_G	B_R	B_Y	B_G
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0

A_R: چراغ قرمز سمت A
A_G: چراغ سبز سمت A
B_Y: چراغ زرد سمت B
A_Y: چراغ زرد سمت A
B_R: چراغ قرمز سمت B
B_G: چراغ سبز سمت B

توجه داشته باشید که چراغ‌های قرمز سمت A و سمت B هیچگاه با هم روشن نیستند.

۱۱ــ۳ــ استفاده از نرم‌افزار

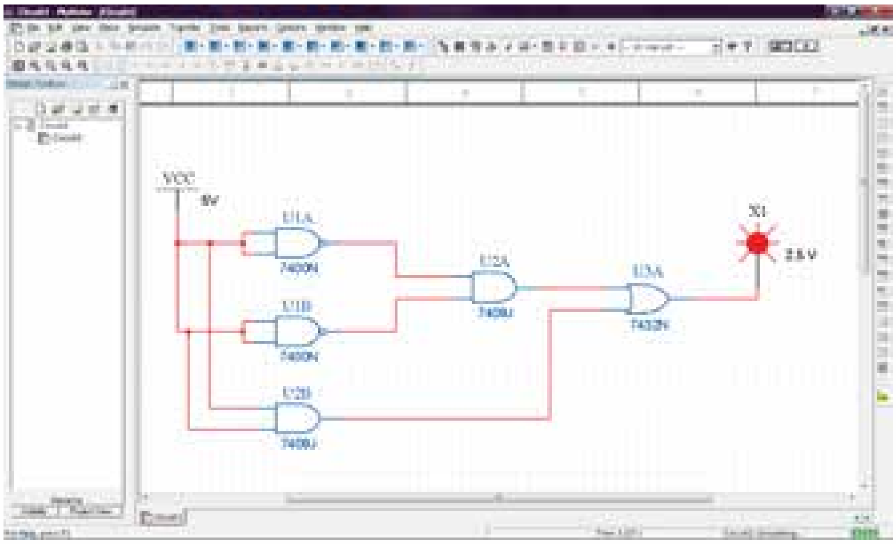
با استفاده از نرم‌افزار مولتی سیم، مدارهای شکل ۵۶ــ۳ الف و ب را ببندید و پس از راه‌اندازی، صحت آن را تجربه کنید. برای اجرای نرم‌افزاری، ابتدا باید جدول صحت مدارها را رسم کنید و پس از مشخص کردن وضعیت خروجی، مدار را با آزمایشگاه مجازی، شبیه‌سازی کنید. پیشنهاد می‌شود مثال ۳۳ـ۳ را با استفاده از دستگاه شبیه‌ساز مولتی‌سیم Logic converter اجرا کنید.

نکتهٔ ۱: برای مدارهای منطقی باید از زمین DGND که نمادی به شکل دارد استفاده کنید.

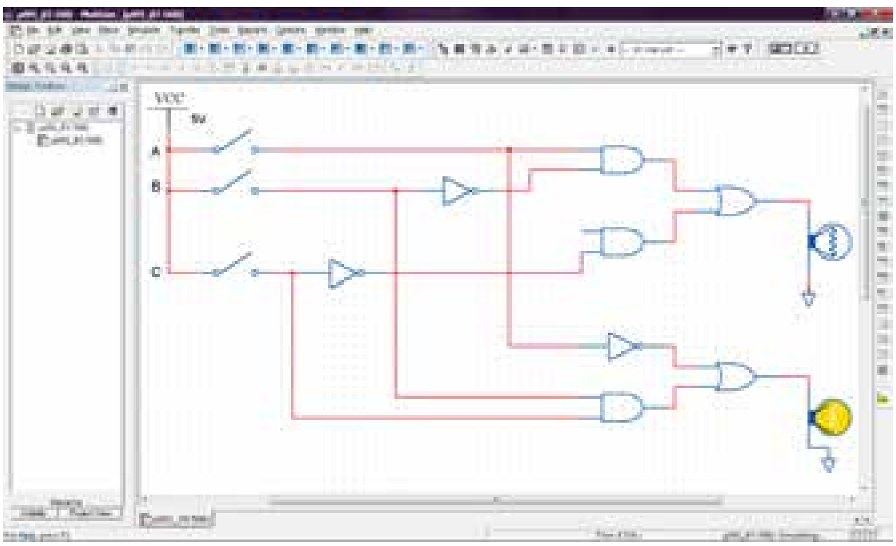
نکتهٔ ۲: برای استفاده از پروب خروجی که در مدار الف استفاده شده است نیازی به اتصال زمین ندارید.

نکتهٔ ۳: برای استفاده از لامپ یا LED در خروجی مدار باید یک سر لامپ یا کاتد LED را به زمین منطقی اتصال دهید.

الف)



ب)



شکل ۵۶ـ۳ـ مدارهای منطقی با استفاده از نرم‌افزار مولتی سیم

۱۲ــ۳ــ الگوی پرسش

۱ــ توابع زیر را به کمک روابط جبربول ســاده کنید.

الف)

$$F(A,B,C)=\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+ABC+A\bar{B}C$$

ب) $$F(A,B,C,D)=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}CD+ABCD+\bar{A}B\bar{C}D+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}$$

پ) $$F(A,B,C,D)=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+AB\bar{A}\bar{A}+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}BC\bar{D}$$

۲ــ توابع زیر را به کمک نقشهٔ کارنو ساده کنید.

الف) $F(A,B,C) = \Sigma_m\ (0,1,5,6,7)$

ب) $F(A,B,C,D) = \Sigma_m(0,2,5,7,9,11,12,14,15)$

پ) $F(A,B,C,D) = \Sigma_m\ (2,5,6,7,9,10,11,15)$

۳ــ تابع زیر را به کمک نقشهٔ کارنــو ســاده کنید.

الف) $F(A,B,C) = \Pi_M\ (0,2,4,6)$

ب) $F(A,B,C,D) = \Pi_M\ (0,1,4,7,9,11,13,14)$

۴ــ تابع زیر را به فــرم استانــدارد بــول (عبارت‌هــای مین‌ترم) در آورید.

$$F(A,B,C,D)=AB\bar{C}+A\bar{D}+ABC$$

۵ــ تابــع زیر را به فــرم استانــدارد بول(عبارت‌هــای ماکس‌ترم) در آورید.

$$F(A,B,C)=AB+\bar{C}$$

۶ــ توابع زیر را ابتدا ساده کنیــد و سپس به کمــک دروازه‌های منطقی رسم نمایید.

الف) $F(A,B,C) = \Sigma_m\ (0,1,2,3,5,7)$

ب) $F(A,B,C,D) = \Sigma_m\ (2,4,6,8,10,12,13,14)$

۷ــ تابع زیر را بعد از ساده نمودن به کمک دروازهٔ منطقی NAND رسم کنید.

$F(A,B,C) = \Sigma_m\ (1,2,3,5,7)$

۸ــ ساده‌ترین عبارت استخراجی از نقشه‌های کارنوی جدول ۴۶ــ۳ الف، ب، پ و ت را بنویسید.

جدول ۴۶ــ۳ــ نقشهٔ کارنوی الگوی پرسش

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1		1
1		1	1	1

الف

C \ AB	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	1

ب

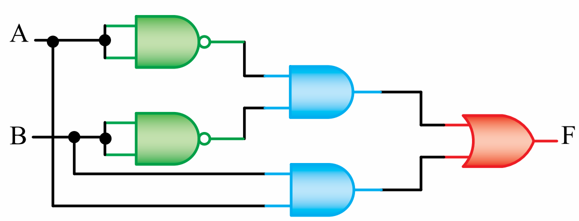
CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	1
11	1		1	1
10	1			1

پ

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		
11		1	1	
10		1	1	

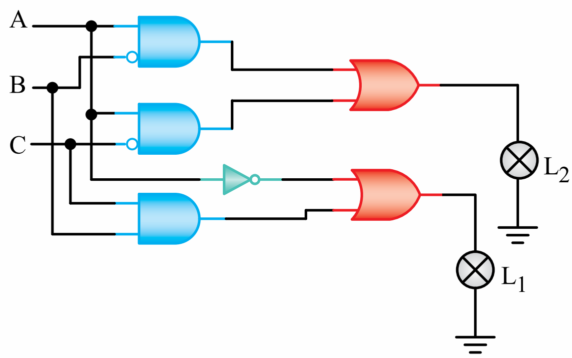
ت

۹ــ در مدار شکل ۵۷ــ۳ پس از به‌دست آوردن رابطهٔ خروجی و ساده‌کردن آن، چه مدار ساده‌ای را می‌توان جایگزین کرد؟



شکل ۵۷ ــ۳ــ مدار مربوط به سؤال ۹

۱۰ــ در مدار شکل ۵۸ــ۳ به‌ازاء کدام حالت ورودی‌ها لامپ L_1 خاموش و لامپ L_2 روشن می‌شود؟



شکل ۵۸ــ۳ــ مدار مربوط به سؤال ۱۰

۱۱ــ در مدار شکل ۵۹ــ۳ شرایط زیر برقرار است.

الف) Z_1 موقعی یک است که $C=0$ و $A=B=1$ یا $B=0$ و $A=C=1$ باشد.

ب) Z_2 موقعی یک است که $C=1$ و $B=1$ و $A=0$ یا $C=1$ و $B=0$ و $A=1$ باشد.

پ) در بقیه‌حالت‌ها $Z_1=Z_2=0$ است.

شکل ۵۹ــ۳ــ مدار سؤال ۱۱

مدار منطقی این مدار ترکیبی را رسم کنید.

۱۲ــ مداری طراحی کنید که وقتی به ورودی آن از صفر تا ۱۵ داده می‌شود، در قبال اعدادی که بر چهار بخش پذیر هستند خروجی (۱) شود.

نقشهٔ کارنوی مدار فوق را رسم کنید.

جهت هنرجویان علاقه‌مند

۱۳ــ مکمل تابع

$$F(A,B,C) = \Sigma_m (0,3,6,7)$$

را به‌صورت میان‌ترم بدســـت آورید و نتیجه را ساده کنید.

۱۴ــ یک مدار برای نتایج یـک مســـابقه با سـه نـفر شرکت کننده طراحی کرده‌ایم که در آن نتیجهٔ بازی فقط به شرط حداقل دو جواب صحیح از سه جواب داده شده، امتیاز یک دارد. تابع منطقی حاصل از این خروجی مدار را با استفاده از جدول درستی بنویسید.