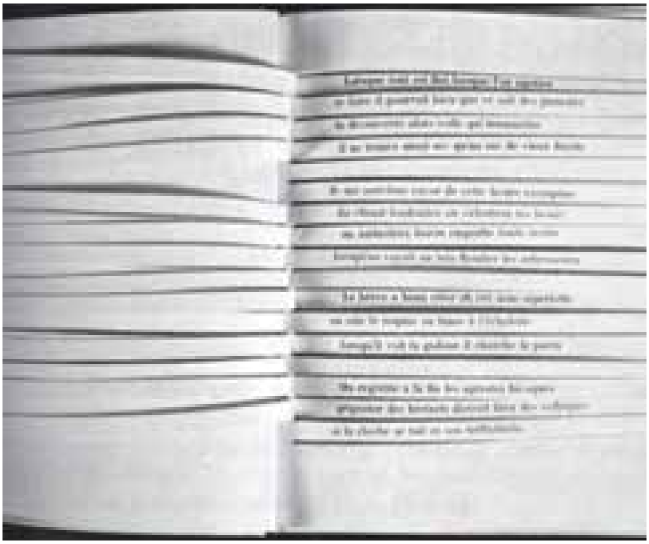
فصل سوم

ترکیبیات

کتاب شعری[1] شامل صدهزار میلیارد شعر است. هر شعر شامل ۱۴ بیت است و همگی فقط دریک روی صفحهٔ کاغذ نوشته شده‌اند (نه دو طرف آن).

هر صفحهٔ کاغذ به صورت نوارهای افقی بریده شده به طوری که روی هر نوار یک بیت شعر نوشته شده است. هر نوار به طور منفرد قابل برگرداندن است به گونه‌ای که ابیات شعرها به راه‌های مختلف قابل انتخاب باشند. صرف‌نظر از نوع انتخاب ابیات، هنوز اشعار به دست آمده از نظر اصول شعری، وزن و قافیه، درست و با معنی هستند. فکر می‌کنید کتاب باید شامل چند صفحه باشد تا بتواند صدهزار میلیارد شعر تولید کند؟



۱ــ کتاب شعر موسوم به Cent milliards de Poemes نوشتهٔ raymond queneau می‌باشد.

فصل سوم، ابزار مناسبی برای حل این مسأله و مسأله‌های جالب دیگری که همگی با **شمارش** سروکار دارند، به شما می‌دهد.

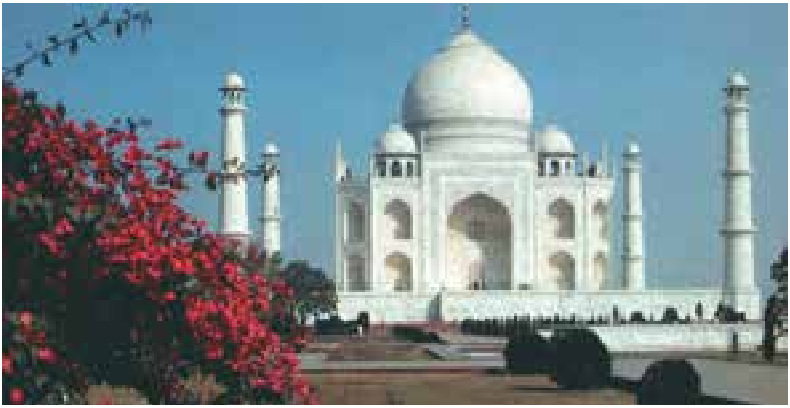
۱ــ۳ــ اصل اساسی شمارش

فعالیت ۱ــ۳

الف) به چند راه ممکن، می‌توانید هر یک از سه سؤال زیر را با یکی از جواب‌های داده شده **جور**[۱] کنید؟ (آزمون جورکردنی)

سؤال	جواب
۱ــ ایالت آگرا، در کدام کشور قرار دارد؟	بنگلادش
۲ــ شهر داکا در کدام کشور واقع است؟	هندوستان
۳ــ شهر لاهور در کدام کشور است؟	پاکستان

توجه: برای هر سؤال، تنها یک جواب درست وجود دارد. اگر آن جواب را برای سؤالی انتخاب کردید، دیگر نمی‌توانید آن را برای سؤال دیگری انتخاب کنید. درواقع، هر سؤال را باید با یک جواب، **جور** کنید.

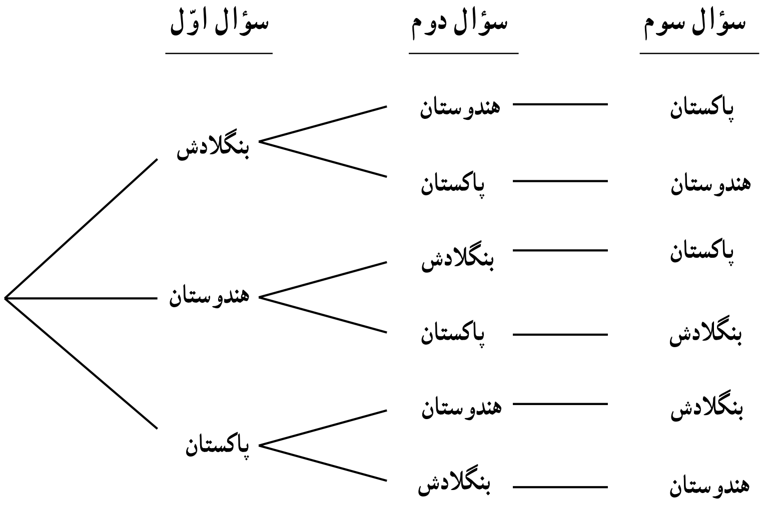


تاج محل ــ هندوستان

۱ــ Matching test

ب) در مجموع، چند راه ممکن برای پاسخگویی به سه سؤال بالا وجود دارد؟ چرا؟

برای پیدا کردن تعداد راه‌های ممکن، می‌توانید از نمودار زیر استفاده کنید :



اگر دقت کنید، این نمودار شبیه درختی با یک ریشه و شاخه‌های متعدّد است. به همین علّت، به **نمودار درختی** معروف است.

پ) این درخت، چند شاخه دارد؟

ت) دو شاخهٔ این درخت ؛ یعنی دو راه ممکن برای پاسخگویی به سه سؤال بالا، در جدول زیر، مشخّص شده است. سایر شاخه‌ها را مشخّص کنید و جدول را تکمیل نمایید.

جدول ۱

سؤال سوم	سؤال دوم	سؤال اول	راه‌های ممکن
پاکستان	هندوستان	بنگلادش	۱
هندوستان	پاکستان	بنگلادش	۲
	بنگلادش		۳
		هندوستان	۴
			۵
هندوستان			۶

ث) جواب قسمت (ب) و قسمت (ت) را با هم مقایسه کنید و نتیجه را بنویسید.

ج) یک آزمون **جورکردنی** با پنج سؤال تهیّه کنید. به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را با سؤال‌ها جور کنید؟

چ) تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به یک آزمون **جورکردنی** با ۱۰ سؤال را حدس بزنید (بدون رسم نمودار درختی). بگویید چگونه این حدس را زدید؟

ح) آیا می‌توانید از پاسخ خود به قسمت (چ)، یک نتیجهٔ کلّی بگیرید؟ توضیح دهید.

اصل اساسی شمارش: برای پیدا کردن تعداد راه‌های ممکن در یک تصمیم‌گیری چند مرحله‌ای، تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله از تصمیم‌گیری، درهم ضرب می‌شوند.

یا به بیانی دیگر؛

اصل اساسی شمارش: اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد (k،...،۳،۲،۱) و تعداد انتخاب‌های ممکن در مرحلهٔ اوّل n_1 ، در مرحلهٔ دوم n_2 ، ... و در مرحلهٔ kام، n_k باشد، تعداد انتخاب‌های ممکن در این تصمیم‌گیری، حاصلضرب تعداد انتخاب‌ها در هر مرحله یعنی $n_1n_2...n_k$ است.

تمرین

جدول زیر، تعداد راه‌های ممکن برای پاسخگویی به آزمون **جورکردنی** با تعداد سؤال‌های متفاوت را نشان می‌دهد.

این جدول را کامل کنید.

جدول ۲

تعداد سؤال‌های یک آزمون جورکردنی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌ها	۱	۲	۶				

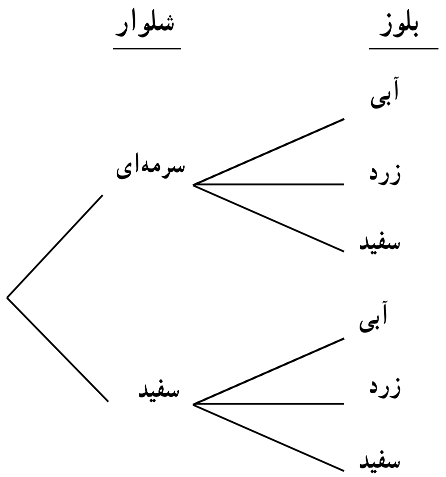
مثال

امیرحسین، دو شلوار به رنگ‌های سُرمه‌ای و سفید و سه بلوز به رنگ‌های آبی، زرد و سفید دارد. نمودار درختی انتخاب‌های ممکن امیرحسین را برای استفاده از لباس‌های خود، رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) امیرحسین، به چند شکل متفاوت می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند؟

ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چه عددهایی باید درهم ضرب شوند تا جواب قسمت (الف) به دست آید؟

حل: اوّل، نمودار درختی انتخاب‌های ممکن امیرحسین را برای استفاده از لباس‌های خود، رسم می‌کنیم.



الف) شاخه‌های نمودار درختی بالا، انتخاب‌های امیرحسین را نشان می‌دهند. آنها را به ترتیب می‌نویسیم به‌طوری که در هر پرانتز، اوّل شلوار و بعد، بلوز نوشته شود :

(بلوز ، شلوار)

(آبی ، سرمه‌ای)

(زرد ، سرمه‌ای)

(سفید ، سرمه‌ای)

(آبی ، سفید)

(زرد ، سفید)

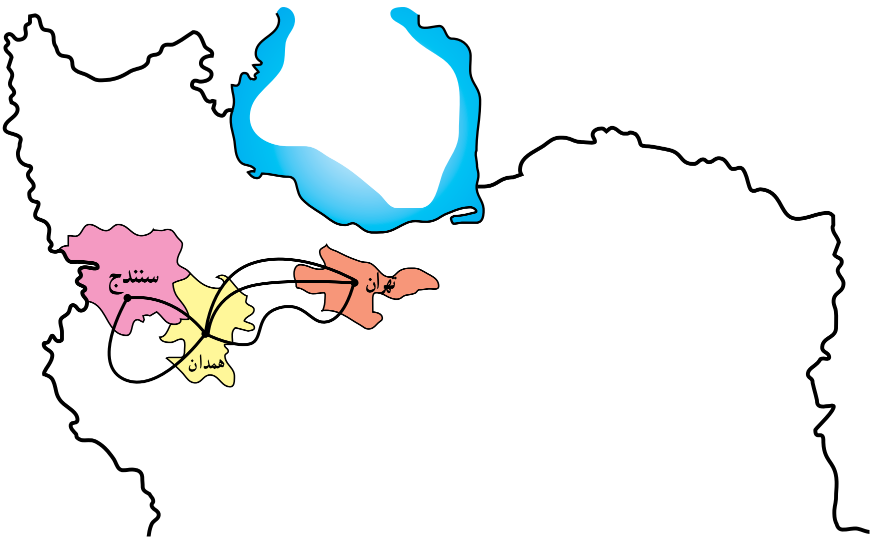
(سفید ، سفید)

پس امیرحسین، به ۶ شکل متفاوت می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند.

ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چون تعداد انتخاب‌های ممکن برای شلوارها ۲ و تعداد انتخاب‌های ممکن برای بلوزها ۳ است، پس تعداد راه‌های ممکن در این تصمیم‌گیری، $۶ = ۳ \times ۲$ است.

تمرین

نمودار زیر، راه‌های مختلف مسافرت زمینی از تهران به همدان و سپس سنندج را نشان می‌دهد :



با استفاده از اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن مسافرت زمینی از تهران به سنندج را نشان داده و بنویسید.

تمرین

از بین ۴ نوع مختلف سوپ، ۳ نوع ساندویچ، ۵ نوع نوشابه و ۴ نوع بستنی، چند ناهار مختلف که شامل یک نوع سوپ، یک نوع ساندویچ، یک نوع نوشابه و یک نوع بستنی باشد، می‌توان انتخاب کرد؟

فعالیت ۲ـ۳

الف) به سؤال‌های زیر که هر یک دارای دو گزینهٔ «درست ــ نادرست» هستند پاسخ دهید.

۱ــ درجهٔ حرارت، تابعی از زمان است.

☐ درست ☐ نادرست

۲ــ تابعِ نظیر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{2}+bx+c=0$ تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c$ است.

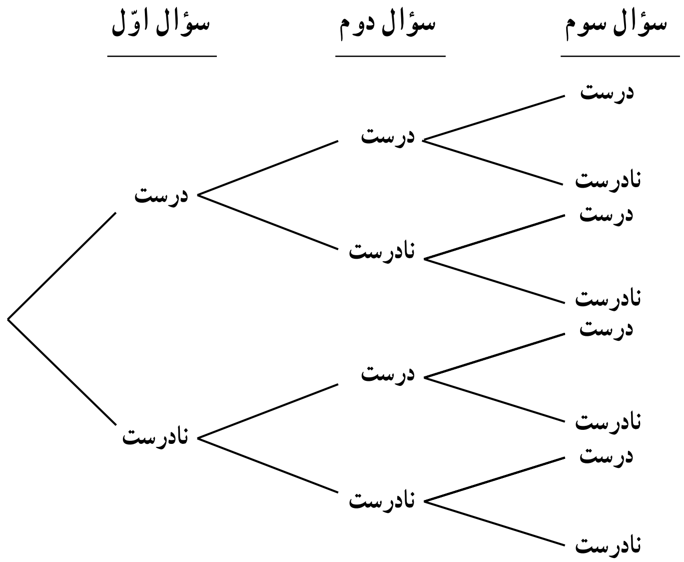
☐ درست ☐ نادرست

۳ــ اگر مقدار مبیّن معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{2}+bx+c=0$ صفر شود، معادله دارای دو جواب متمایز خواهد بود.

☐ درست ☐ نادرست

ب) برای هر یک از سؤال‌ها، چند جواب ممکن وجود دارد؟

نمودار درختی زیر، راه‌های ممکن پاسخگویی به این سه سؤال را نشان می‌دهد :



پ) دو شاخهٔ این درخت ؛ یعنی دو راه ممکن برای پاسخ‌گویی به سه سؤال بالا، در جدول ۳ مشخّص شده است. سایر شاخه‌ها را مشخّص کنید و جدول را تکمیل نمایید.

جدول ۳

راه‌های ممکن	جواب سؤال اول	جواب سؤال دوم	جواب سؤال سوم
۱	درست	درست	درست
۲	درست	درست	نادرست
۳	درست		درست
۴		نادرست	
۵			
۶	نادرست		
۷		نادرست	
۸	نادرست		

چون برای پاسخ دادن به هر سؤال، دو گزینه وجود دارد، پس طبق اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن برای پاسخگویی به سؤال‌های این آزمون، ضرب تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله از تصمیم‌گیری، یعنی $۸ = ۲ \times ۲ \times ۲$ است.

ت) اگر بخواهید به یک آزمون «درست ــ نادرست» با ۵ سؤال پاسخ دهید، به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را انتخاب کنید؟

ث) اگر بخواهید به یک آزمون «درست ــ نادرست» با ۱۰ سؤال پاسخ دهید، به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را انتخاب کنید؟

ج) فرق بین نمودار درختی این فعالیت، با نمودار درختی فعالیت ۱ــ۳ چیست؟ توضیح دهید.

چ) تفاوت بین **آزمون جورکردنی** با آزمون «**درست ــ نادرست**» چیست؟ تفاوت بین انتخاب راه‌های ممکن در این دو آزمون کدام است؟

مثال

با استفاده از **اصل اساسی شمارش**، نشان دهید چند جفت از حروف الفبای فارسی می‌توانیم داشته باشیم؟

حل: این تصمیم‌گیری، دارای دو مرحله است. مرحلهٔ اوّل، انتخاب یک حرف از ۳۲ حرف الفبای فارسی و مرحلهٔ دوم نیز، انتخاب یک حرف از ۳۲ حرف الفبای فارسی است. پس، در هر مرحله، ۳۲ انتخاب ممکن وجود دارد.

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{}}_{۳۲}\quad\underbrace{\boxed{}}_{۳۲}}^{\text{یک جفت حرف}}$$

بنابراین، طبق اصل اساسی شمارش، تعداد جفت حروف الفبای فارسی، برابر

$$۳۲\times۳۲=(۳۲^{۲})=۱۰۲۴$$

است.

تمرین

چند کلمهٔ سه حرفی با حروف الفبای فارسی، می‌توان درست کرد؟ (با معنی بودن کلمه‌ها مهّم نیست.)

مثال

در یک محله که پیش شمارهٔ سه رقمی آن مشخّص است (یعنی تغییر نمی‌کند)، چند راه ممکن برای شماره تلفن‌های ۷ رقمی وجود دارد؟

حل: ۷ جعبهٔ خالی زیر را برای ۷ رقم شماره تلفن‌ها در نظر می‌گیریم :

$$\underbrace{\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}}\ \ \underbrace{\boxed{}}_{۱۰}\ \underbrace{\boxed{}}_{۱۰}\ \underbrace{\boxed{}}_{۱۰}\ \underbrace{\boxed{}}_{۱۰}$$

چون پیش شماره تغییر نمی‌کند، پس فقط ۴ رقم آخر تغییر می‌کنند. برای هر رقم هم ۱۰ انتخاب ممکن وجود دارد. پس طبق اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن برای دادن شماره تلفن‌های ۷ رقمی با پیش شمارهٔ سه رقمی مشخّص (ثابت)، $۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰=۱۰/۰۰۰$ است.

تمرین

در یک آزمون دو گزینه‌ای «درست ــ نادرست» با ۲۵ سؤال، چند راه ممکن برای پاسخگویی به ۲۵ سؤال، وجود دارد؟

۲ــ۳ــ انتخاب‌های مستقل و وابسته

در آزمون‌های جورکردنی، انتخاب پاسخ برای هر سؤال، **وابسته** به انتخاب‌های انجام شده برای سایر سؤال‌ها است ؛ یعنی هر پاسخی که انتخاب شد، دیگر نمی‌توانیم آن را انتخاب کنیم و برای پاسخ به سؤال بعدی، تعداد انتخاب‌ها یکی کمتر از سؤال قبلی است.

امّا در آزمون «درست ــ نادرست»، انتخاب پاسخ‌ها برای هر سؤال **مستقل از هم** هستند ؛ یعنی پاسخ هر سؤال، مستقل از سؤال‌های قبل و بعد از آن، می‌تواند یکی از دو گزینهٔ «درست» یا «نادرست» باشد. پس تعداد انتخاب‌ها برای هر سؤال (هر مرحله) با هم برابر هستند.

تمرین

در تمام تمرین‌ها و مثال‌هایی که از شروع فصل سوم تا به حال داشته‌اید، مشخّص کنید که کدام انتخاب‌ها مستقل و کدام‌ها، وابسته هستند.

فعالیت ۳ــ۳

الف) آزمون ۴ سؤالی زیر را با دو گزینهٔ «درست» یا «نادرست» در نظر بگیرید :

سؤال ۱: $(a+b)^۲ = a^۲ + b^۲$

☐ درست ☐ نادرست

سؤال ۲: اگر $f(x) = ۲x^۲ + ۳$ باشد، آنگاه $f(x-۲) = ۲(x-۲)^۲ + ۳$

☐ درست ☐ نادرست

سؤال ۳: یک تابع توانی می‌تواند یک تابع خطی باشد.

☐ درست ☐ نادرست

سؤال ۴: اگر مبیّن معادلهٔ درجهٔ دوم منفی باشد، معادله دارای جواب حقیقی است.

☐ درست ☐ نادرست

ب) نمودار درختی راه‌های ممکن پاسخگویی به این آزمون چهار سؤالی دو گزینه‌ای را رسم کنید.

پ) طبق اصل اساسی شمارش، چه عددهایی باید درهم ضرب شوند تا جواب قسمت (ب) به دست آید؟

ت) جدول زیر را تکمیل کنید.

جدول ۴

تعداد سؤال‌های یک آزمون «درست ــ نادرست»	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰
تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌های این آزمون	۲	۴	۸				...	

ث) پس از تکمیل جدول، راه‌های مختلف پاسخگویی به سؤال‌های این نوع آزمون را، برحسب توان‌های ۲ بنویسید.

ج) آیا می‌توانید برای پیدا کردن راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌های آزمون «درست ــ نادرست»، شکل دیگری از اصل اساسی شمارش را بنویسید؟

اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد $(1,2,3,...,k)$ و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله، با هم برابر و مساوی n باشند، آنگاه تعداد انتخاب‌های ممکن در این تصمیم‌گیری، حاصل ضرب تعداد انتخاب‌ها در هر مرحله یعنی

$$\underbrace{n.n.n....n}_{\text{k بار}}$$

است که مساوی n^k می‌شود.

مثال

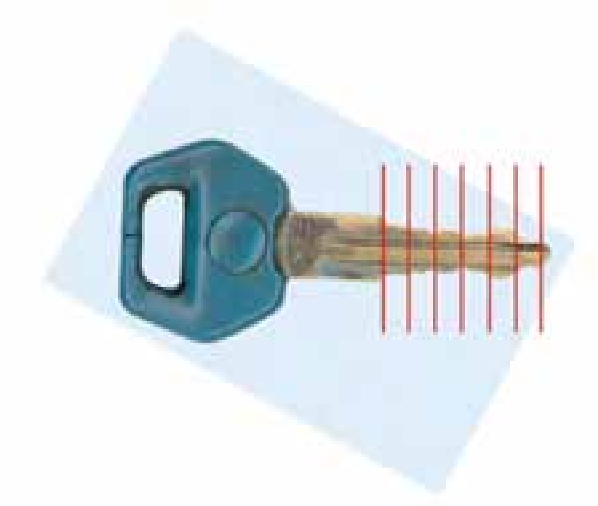
تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به یک آزمون «درست ــ نادرست» با ۱۵ سؤال چند تا است؟

حل: چون برای هر سؤال، دو پاسخ ممکن وجود دارد، پس تعداد راه‌های ممکن، $۲^{۱۵} = \underbrace{۲\times۲\times\cdots\times۲}_{۱۵\ \text{بار}}$ است.

مسایل

۱ــ سارا می‌خواهد همراه با خانوادهٔ خود، برای تعطیلات عیدنوروز به یکی از شهرهای یزد، کرمان، اهواز، مشهد یا ساری برود. آنها می‌توانند برای مسافرت، از خودرو سواری یا اتوبوس یا قطار استفاده کنند. تعداد راه‌های ممکن را که خانوادهٔ سارا می‌توانند برای انتخاب شهر و وسیلهٔ نقلیه داشته باشند، بنویسید.

۲ــ کلیدهایی با شکل‌های متفاوت، طوری طراحّی می‌شوند که برای هر قسمت آن‌ها، الگوهای مختلفی وجود دارد. کلیدهای پیکان ۶ قسمت دارند.



الف) قبلاً، برای هر قسمت دو الگو وجود داشت. در آن موقع، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان ممکن بود وجود داشته باشد؟

ب) در حال حاضر، پیکان از سه الگو برای هر قسمت استفاده می‌کند. به این ترتیب، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان وجود دارد؟

پ) اگر تعداد الگوها برای هر قسمت، به ۴ تا افزایش یابد، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان وجود خواهد داشت؟

۳ــ یک اداره، برای شمارهٔ کارت پرسنلی کارمندان خود، از یک کُد ۵ شماره‌ای و یک حرف به شکل زیر، استفاده می‌کند :

عدد　عدد　عدد　حرف　عدد

با این شرط که اولین رقم، نمی‌تواند صفر باشد، تعداد راه‌های ممکن برای شماره کارت‌های مختلف پرسنلی را پیدا کنید.

۳ــ۳ــ جایگشت[۱]

برای شرکت در یک میزگرد تلویزیونی مربوط به آیندهٔ شغلی فارغ‌التحصیلان رشتهٔ علوم انسانی، ۹ کارشناسِ متخصّص، به این برنامه، دعوت شده‌اند.

اولین کسی که می‌خواهد بنشیند، می‌تواند هر یک از ۹ صندلی دور میز را برای نشستن انتخاب کند. نفر دوم می‌تواند هر یک از ۸ صندلی باقی‌مانده را برای نشستن انتخاب کند. طبق اصل اساسی شمارش، این دو نفر به

۹×۸=۷۲

راه ممکن می‌توانند برای خود، جای نشستن انتخاب کنند.

به همین ترتیب

۹×۸×۷=۵۰۴

راه ممکن برای انتخاب جای نشستن سه نفر از کارشناسان، وجود دارد. با ادامهٔ این کار،

۹×۸×۷×۶×۵×۴×۳×۲×۱

راه ممکن، برای نشستن این ۹ نفر روی صندلی‌های دور میز، وجود دارد. توجّه کنید که انتخاب

۱ــ Permutation

جای نشستن هر نفر، **وابسته** به انتخاب‌های نفرات قبلی است، زیرا وقتی یک صندلی اشغال شد، نفر بعدی نمی‌تواند روی آن بنشیند. برای همین، هر نفر بعدی، یک انتخاب کمتر از نفر قبل از خودش دارد.

چنین طرز قرار گرفتنی، **جایگشت** نامیده می‌شود. یعنی، هر یک از راه‌های ممکن قرار گرفتن این ۹ نفر در کنار یکدیگر، یک جایگشت از آن ۹ نفر است که تعداد آن‌ها را با $\mathbf{P_9}$ نشان می‌دهیم.

تعریف

هر یک از راه‌های ممکن قرار گرفتن n شیء متمایز کنار یکدیگر، یک **جایگشت** از آن n شیء نامیده می‌شود. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز، با $\mathbf{P_n}$ نشان داده می‌شود.

برای نوشتن حاصل ضرب $۹\times۸\times\cdots\times۱$،
می‌توانیم از علامت تعجّب یعنی (!) استفاده کنیم که در ریاضی، به آن **فاکتوریل** گفته می‌شود.
با استفاده از این علامت، به جای $۹\times۸\times\cdots\times۱$، می‌نویسیم !۹.

تعریف

n! یعنی ضرب n در تمام اعداد متوالی قبل از خودش تا ۱

پس با توجّه به تعریف جایگشت؛

تعداد جایگشت‌های n شیء مختلف، n! است.

اگر چه در ریاضی، نماد (!) برای تعجّب و شگفتی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، امّا اغلبِ اعدادی که توسط این علامت نشان داده می‌شوند، به‌طور شگفت‌آوری بزرگ هستند!

تمرین

فهرست زیر را تکمیل کنید :

$۱! = ۱$

$۲! = ۲ \times ۱ = ۲$

$۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

$۴! =$

$۵! =$

$۶! =$

$\vdots$

$۱۰! =$

توجه: طبق قرارداد، $۰! = ۱$ تعریف می‌شود.

تمرین

اگر چه ممکن است تساوی $۲! + ۲! = ۴!$ ، «به‌نظر» درست آید، امّا می‌دانید که نادرست است، زیرا $۲! = ۲$ و $۴! = ۲۴$ ، در نتیجه $۲۴ \neq ۲ + ۲$.

با استفاده از فهرستی که در تمرین قبل ساخته‌اید، تحقیق کنید که کدام یک از تساوی‌های زیر درست، و کدام یک نادرست هستند؟

الف) $۳! + ۳! = ۶!$

ب) $۱۰! = ۱۰ \times ۹!$

پ) $۱! + ۴! + ۵! = ۱۴۵$

ت) $\frac{۸!}{۴!} = ۲!$

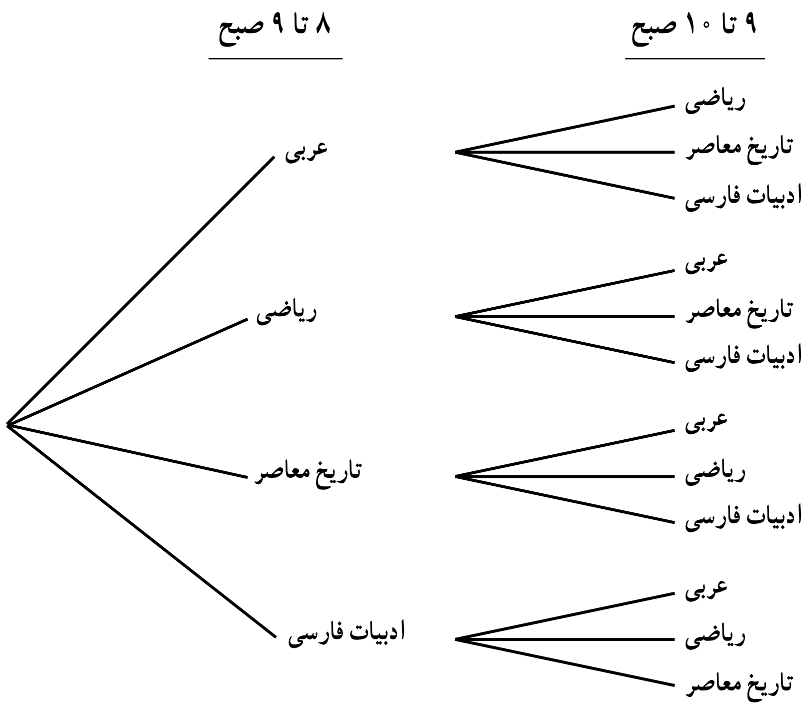
ث) $۶! \times ۷! = ۱۰!$

فعالیت ۴ــ۳

مدیر یک دبیرستان، برای تنظیم برنامهٔ روز شنبهٔ دانش‌آموزان سال سوم رشتهٔ علوم انسانی، انتخاب‌های زیر را برای ساعت ۸ تا ۱۲ ظهر ــ که طی آن چهار کلاس برگزار می‌شود ــ دارد :

عربی، ریاضی، تاریخ معاصر، ادبیات فارسی

نمودار درختی زیر، نشان می‌دهد چگونه این مدیر، می‌تواند برنامهٔ ساعت ۸ تا ۹ و ۹ تا ۱۰ صبح را، از بین این چهار ساعت انتخاب کند.



۱ــ چند راه مختلف، برای تنظیم ساعت‌های دو درس وجود دارد؟

۲ــ تعداد جایگشت‌های چهار درس در برنامهٔ صبح شنبهٔ رشتهٔ علوم انسانی این دبیرستان، چند تا است؟

۳ــ نمودار درختی بالا را برای ساعت‌های ۸ تا ۹، ۹ تا ۱۰، ۱۰ تا ۱۱ و ۱۱ تا ۱۲، کامل کنید.

۴ــ انتخاب‌های ساعت تدریس برای هر درس، مستقل از هم هستند یا وابسته به هم؟ چرا؟

مسایل

۱ــ دبیرستان جلال‌آل‌احمد، تصمیم گرفته است تا از طریق انتخابات، شورای دانش‌آموزی تشکیل دهد. دانش‌آموزان به چند راه ممکن می‌توانند نام‌های ۵ نامزد انتخاباتی برای شورا را، روی برگه‌های رأی بنویسند؟

۲ــ به چند راه مختلف، از بین ۸ دوندهٔ یک مسابقه، نفرات اول تا سوم می‌توانند مشخص شوند ؛ بدون آن که هیچ دو نفری هم‌زمان، به خط پایان برسند؟

۳ــ به چند راه ممکن، شماره تلفن‌های ۷ رقمی، می‌توانند ساخته شوند، به طوری که در آن‌ها، رقم صفر نباشد؟

۴ــ اگر وجود رقم صفر در بین رقم‌های شماره تلفن‌های ۷ رقمیِ مسألهٔ ۳ جایز باشد، چه تغییری در تعداد راه‌های ممکن ایجاد می‌شود؟ چرا؟

۵ــ به چند راه مختلف، ۸ نفر می‌توانند برای تهیّهٔ بلیط سینما، در یک صف بایستند؟

۶ــ «مرکز گفتگوی تمدن‌ها» در سال ۱۳۸۰، مسابقه‌ای با چهار جایزهٔ ۵۰,۰۰۰ تومانی، ۳۰,۰۰۰ تومانی، ۲۰,۰۰۰ تومانی و ۱۰,۰۰۰ تومانی برای بهترین نقّاشی دانش‌آموزان ۱۴ تا ۱۷ سال و با موضوع «نقش دانش‌آموزان در گفتگوی تمدن‌ها» ترتیب داده است. شرط مسابقه این است که کسی نمی‌تواند بیش از یک جایزه را ببرد.

اگر ۱۰۰۳ دانش‌آموز ۱۴ تا ۱۷ سال، نقاشی‌های خود را برای این مسابقه فرستاده باشند، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

الف) به چند راه ممکن، دو جایزهٔ اوّل و دوم، کسب خواهند شد؟

ب) به چند راه ممکن، سه جایزهٔ اوّل، دوم و سوم، کسب خواهند شد؟

پ) به چند راه ممکن، هر چهار جایزه، کسب خواهند شد؟

۷ــ تعداد جایگشت‌های حرف‌های کلمهٔ «قناعت» را بنویسید.

۸ــ اگر بخواهید با رقم‌های ۲، ۵، ۶، ۹ و ۳، کدهای ۵ رقمی بسازید، تعداد راه‌های ممکن را بنویسید.

زنگ تفریح ریاضی!

احمد ۱۳ نفر از دوستان خود را برای تماشای یک فیلم به سینما دعوت کرد. او برای این منظور ۱۴ بلیت در یک ردیف رزرو کرده بود. اگر مسئول سالن بخواهد این ۱۴ نفر را به صندلی‌ها راهنمایی کند، هر یک از ۱۴ نفر می‌تواند صندلی اوّل را اشغال کند. بعد از او، صندلی دوم می‌تواند توسط هر یک از ۱۳ نفر باقی مانده اشغال شود. با استفاده از اصل اساسی شمارش، ۱۸۲ = ۱۳×۱۴ راه ممکن وجود دارد که دو نفر، بتوانند دوصندلی از ۱۴ صندلی را اشغال کنند. با همین استدلال، تعداد جایگشت‌های ۱۴ نفر یعنی $P_{۱۴} =$!۱۴ است که برابر است با :

$$۱۴\times۱۳\times۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۸۷,۱۷۸,۲۹۱,۲۰۰$$

یعنی ۸۷,۱۷۸,۲۹۱,۲۰۰ راه ممکن، برای نشستن این ۱۴ نفر روی صندلی‌ها وجود دارد. این عدد آن‌قدر بزرگ است که اگر این ۱۴ نفر، می‌توانستند در هر ثانیه ــ و بدون توقّف ــ یک ترتیب جدید نشستن درست کنند، بیش از ۲۷۰۰ سال طول می‌کشید تا ۱۴ نفر، با هر جایگشت ممکن، روی صندلی‌ها بنشینند! در این مدت آنها چند فیلم می‌توانستند ببینند؟!

۱ــ۳ــ۳ــ جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز: با دقّت در مسأله‌هایی که راجع به جایگشت تا به حال حلّ کرده‌اید، حتماً متوجّه می‌شوید که فعالیت ۴ ــ۳ و مسألهٔ ۶، با سایر مسأله‌ها، کمی فرق داشت. در فعالیت ۴ــ۳، مدیر دبیرستان می‌خواست راه‌های ممکن را برای تنظیم ساعت‌های دو درس از چهار درس خود را پیدا کند. در مسألهٔ ۶ نیز، از تمام ۱۰۰۳ نفر شرکت کننده، تنها ۴ نفر موفّق به کسب جایزه می‌شدند. یعنی، هر کدام از ۱۰۰۳ نفر شرکت کننده، امکان کسب جایزهٔ اوّل را داشتند، امّا به محض آن که جایزه اوّل به برندهٔ آن تعلّق گرفت، جایزهٔ دوم به یکی از ۱۰۰۲ نفر باقی‌ماندهٔ، جایزهٔ سوم به یک نفر از بین ۱۰۰۱ شرکت کنندهٔ دیگر و بالاخره ؛ جایزهٔ چهارم به یکی از ۱۰۰۰ شرکت کننده مسابقه تعلّق می‌گرفت. یعنی تعداد راه‌های مختلفی که چهار جایزه به چهار نفر برگزیده از بین ۱۰۰۳ نفر تعلق می‌گیرد برابر ۱۰۰۰×۱۰۰۱×۱۰۰۲×۱۰۰۳ است که بسیار کوچک‌تر

از !۱۰۰۳ است.

ــ اگر تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقه n نفر باشد چهار جایزهٔ اوّل به چند راه ممکن به چهار نفر از n نفر تعلّق می‌گیرد؟

ــ آیا می‌توانید یک فرمول کلی، برای پیدا کردن تعداد چنین جایگشت‌هایی پیدا کنید؟

برای مثال به مسألهٔ ۲ همین فصل بازگردید؛ دیدید که هر یک از ۸ نفر دونده می‌توانستند برندهٔ مقام اول باشند. وقتی نفر اول تعیین می‌شود، هر یک از ۷ نفر باقیمانده می‌توانند مقام دوم را کسب کنند و بالاخره یکی از بین ۶ نفر باقیمانده مقام سوم را به دست خواهد آورد. پس طبق اصل اساسی شمارش تعداد راه‌های ممکن برای اینکه از بین ۸ دونده ۳ نفر حائز مقام‌های اوّل تا سوم شوند برابر $۸\times۷\times۶ = ۳۳۶$ خواهد بود.

در این مسأله، در واقع به جای آن که تعداد جایگشت‌های ۸ یعنی !۸ را حساب کنیم؛ تعداد جایگشت‌های ۳ از ۸ را پیدا کردیم یعنی:

$$۸\times۷\times۶ = ۸(۸-۱)(۸-۲) \qquad (۱)$$

اگر بخواهیم قانونی به دست آوریم که تعداد جایگشت‌های ۳ از ۸ را نشان دهد می‌توانیم به‌طریق زیر عمل کنیم:

می‌دانیم
$$۸! = ۸\times۷\times۶\times\underbrace{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}$$

به جای $۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ می‌توانیم !۵ را قرار دهیم. پس:

$$۸! = ۸\times۷\times۶\times۵!$$

دو طرف تساوی را بر !۵ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۸!}{۵!} = ۸\times۷\times۶$$

در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{۸!}{۵!} = ۸(۸-۱)(۸-۲)$$

اگر $۸(۸-۱)(۸-۲)$ را که جایگشت ۳ از ۸ است با **P(۸,۳)** نشان دهیم، آن‌گاه:

$$P(۸,۳) = \frac{۸!}{۵!}$$

از طرفی، !۵ همان !(۳ − ۸) است پس :

$$P(۸,۳) = \frac{۸!}{(۸-۳)!}$$

در حالت کلی، برای پیدا کردن تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء، یعنی $P(n,r)$ و با فرض این که $r \leq n$ است (چرا؟) با استفاده از الگوی استدلالیِ مثال قبل، می‌نویسیم :

$$P(n,r) = n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۱)$$

از طرفی،

$$n! = n.(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۱)(n-r)!$$

یا

$$n! = P(n,r)(n-r)!$$

چون می‌خواهیم $P(n,r)$ را محاسبه کنیم، پس دو طرف معادله را بر $(n-r)!$ تقسیم نموده، و معادله را برای $P(n,r)$ حل می‌کنیم :

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تعریف

اگر n شیء مختلف داشته باشیم، تعداد جایگشت‌های r شیء از این n شیء برابر است با

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

که در آن، $r \leq n$ و r و n، هر دو عدد طبیعی هستند.

مثال

تعداد جایگشت‌های n شیء از n شیء را پیدا کنید.

حل: چون $r = n$، پس :

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!}$$

$$= \frac{n!}{۰!} = n!$$

مسایل

۱ــ به چند راه ممکن، می‌توان با حرف‌های کلمهٔ «دشت مغان» کلمات سه حرفی ساخت (بی‌معنی بودن کلمات اشکالی ندارد).

۲ــ با رقم‌های شماره‌تلفن ۲۳۸۵۴۷۸ ، چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

۳ــ هر یک از مقدارهای زیر را محاسبه کنید ؛

الف) $P(۱۳,۵)$ ب) $P(۴,۴)$ پ) $P(n,۰)$

۴ــ به چند راه مختلف، با حرف‌های کلمه «روستا» می‌توان کلمه‌های سه حرفی ساخت؟

۵ــ از بین ۱۲ داوطلب عضویت در هیأت رئیسهٔ یک مؤسسه، یک نفر به عنوان رئیس، یک نفر معاون و یک نفر خزانه‌دار، توسط اعضای مؤسسه انتخاب شدند. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این هیأت را پیدا کنید.

۶ــ مقدارهای زیر را به دست آورید :

الف) $P(۱۰۰,۱)$ ب) $P(۱۰۰,۵۰)$

پ) $P(n,(n-۱))$ ت) $P((n+۲),۴)$

۷ــ درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید ؛

الف) $P(n,(n-۱))=P(n,n)$

ب) $P((n+۲),۴)=P(n,۳)$

پ) $P(n,۵)=۱۸P((n-۲),۴)$

۸ــ از یک گروه ۱۰۰ نفری دانش‌آموزی، به چند راه ممکن می‌توان ۴ نفر را برای فعالیّت‌های فوق برنامهٔ مدرسه انتخاب کرد؟ به‌طوری که یک نفر مسئول گروه سرود، یک نفر مسئول گروه دانش، یک نفر مجری برنامه‌ها و یک نفر مسئول مسابقات علمی شود.

۲ــ۳ــ۳ــ جایگشت‌های متمایز[۱]

مثال

با حروف کلمهٔ BANANA، چند ترتیب مختلف می‌توان ساخت؟

حل: اگر تمام حرف‌های کلمهٔ BANANA از هم متمایز بودند، ما می‌توانستیم !۶ ترتیب مختلف بسازیم (که همان تعداد راه‌های ممکن ساختن کلمات جدید با این ۶ حرف است). درواقع،

۱ــ Distinguishable Permutation

اگر Aها و Nها را شماره‌گذاری کنیم تا از هم متمایز شوند، تعداد راه‌های ممکن، همان تعداد جایگشت‌های ۶ حرف یعنی !۶ است. اما $(A_1A_2A_3)$ می‌توانند به !۳ راه مختلف، جایگشت داشته باشند. تعداد جایگشت‌های (N_1N_2) نیز !۲ است. امّا چون واقعاً Aها و Nها از هم متمایز نیستند، پس !۲×!۳ ترتیب مشابه داریم. یعنی !۶=۶×۵×۴×۳×۲×۱، از تعداد واقعی راه‌های ممکن (یا ترتیب‌های ممکن) ساختن کلمات با حرف‌های کلمهٔ BANANA، ۱۲=۲×۳×۲=!۳×!۲ بار بزرگتر است. به همین دلیل، برای پیدا کردن تعداد واقعی راه‌های ممکن، باید !۶ را بر ۱۲=!۳×!۲ تقسیم کنیم. برای وضوح بیشتر، به نمونهٔ زیر توجّه کنید :

$A_1BN_1A_3NA_2$	$A_1BN_1A_2NA_3$
$A_1BN_2A_3NA_2$	$A_1BN_2A_2NA_3$
$A_2BN_1A_3NA_1$	$A_2BN_1A_1NA_3$
$A_2BN_2A_3NA_1$	$A_2BN_2A_1NA_3$
$A_3BN_1A_2NA_1$	$A_3BN_1A_1NA_2$
$A_3BN_2A_2NA_1$	$A_3BN_2A_1NA_2$

همان‌طور که می‌بینید، برای هر راه ممکن، ۱۲ گروه از کلماتی داریم که اگر Aها و Nها را با شماره‌گذاری متمایز نکنیم، همگی یکسان هستند ؛ پس باید تعداد کل راه‌های ممکن را بر !۳×!۲ که همان ۱۲ باشد، تقسیم کنیم.

به طورکلّی، تعداد جایگشت‌های n شیء، که در آن، a_1 شیء مثل هم a_2 شیء مثل هم و ... a_k شیء مثل هم باشند برابر است با :

$$\frac{n!}{a_1!\,a_2!\cdots a_k!}$$

مسایل

۱ــ راه‌های مختلفی که حروف کلمهٔ نادر را می‌توان مرتب کرد، در زیر آمده است :

نادر	نارد	ندار	ندرا	نراد	نردا
اندر	انرد	ادنر	ادرن	ارند	اردن
دنار	دنرا	دانر	دارن	درنا	دران
رناد	رندا	راند	رادن	ردنا	ردان

نشان دهید که بدون تهیّهٔ این فهرست، چگونه این تعداد به دست می‌آید؟

۲ــ فهرستی از تمام راه‌های مختلفی که می‌توان حروف کلمهٔ سارا را مرتّب کرد، تهیّه کنید.

۳ــ چرا تعداد راه‌هایی که می‌توان حروف کلمهٔ سارا را مرتب کرد، کمتر از تعداد راه‌هایی است که می‌توان حروف کلمهٔ نادر را مرتب کرد؟

نشان دهید که بدون تهیّهٔ فهرست، چگونه تعداد راه‌های مرتب کردن حرف‌های کلمهٔ سارا به دست می‌آید؟

۴ــ کدام یک از کلمه‌های زیر، دارای تعداد ترتیب‌های مساوی با کلمهٔ سارا است؟

دارا، سوسن، شبنم، زهرا، مریم و مهدی

۵ــ الف) فهرستی از تمام راه‌هایی که می‌توان حروف کلمهٔ بابا را مرتب کرد، بنویسید.

ب) نشان دهید چگونه این تعداد، بدون تهیّهٔ فهرست به دست می‌آید؟

۶ــ به چند طریق ممکن، می‌توان جایگشت‌های مختلفی با رقم‌های عدد ۲۸۵۸۸۸۸۸۸۸۸ ساخت؟

۷ــ شماره پلاک ماشینی ۴۴۴ ک ۲۲ است. چند پلاک ماشین با همین ۵ رقم و حرف «ک» می‌توان ساخت؟

فعالیت ۵ــ۳

شعر فردوسی را در نظر بگیرید :

حسین کیاتنکابنی
تذهیب، گواش و آبرنگ

تمام راه‌های ممکنی که بتوان حروف این بیت شعر را جابه‌جا کرد ؛ یعنی تعداد تمام جایگشت‌های ۳۶ حرف این شعر را پیدا کنید (به عبارتی دیگر، تمام ترتیب‌های مختلف را پیدا کنید). برای این کار، از رابطهٔ زیر می‌توانید استفاده کنید :

$$\frac{۳۶!}{۴!۶!۴!۴!۶!۲!۳!}$$

الف) فاکتوریل‌های رابطهٔ بالا از کجا آمده‌اند؟

ب) رابطه‌ای بنویسید که با آن، بتوان تعداد راه‌های مختلف ترتیب حروف ۶ کلمهٔ مصرع اوّل را نوشت.

پ) آن راه‌ها، چند تا هستند؟

ت) رابطه‌ای بنویسید که با آن، بتوان تعداد راه‌های مختلف نوشتن ۱۲ حرف اوّل این بیت را پیدا کرد.

ث) آن راه‌ها، چند تا هستند؟

ج) فرمول $\frac{n!}{a_۱!a_۲!\cdots a_k!}$ را با نتیجهٔ این فعالیت مقایسه کنید سپس تعریف جایگشت را مجدداً، از زبان خود، بنویسید.

مسایل

۱ــ با استفاده از فرمول $\frac{n!}{a_۱!\, a_۲!\, a_۳!\cdots a_k!}$ ، تعداد ترتیب‌های مختلف عبارت «آفتاب آمد دلیل آفتاب» را بنویسید.

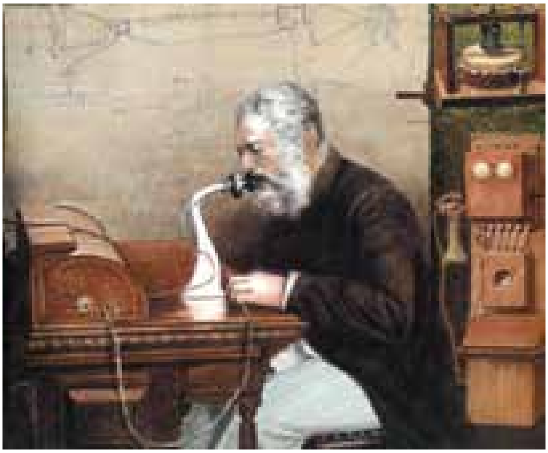
۲ــ با رقم‌های عدد ۲۴۲۳۳۷۳، چند ترتیب مختلف می‌توانید داشته باشید؟

۳ــ عنوان مجله‌ای که با هدف آموزش شهروندان برای استفادهٔ صحیح از نان، به تازگی اجازهٔ انتشار گرفته است، **نان و نان**[۱] است. این عنوان غیرمعمول است ؛ زیرا اگر آن را از سمت چپ هم بخوانید، باز همان **نان و نان** می‌شود. یعنی با برعکس کردن ترتیب حرف‌های **نان و نان**، ترتیب عنوان تغییر نمی‌کند.

با استفاده از فرمول «جایگشت‌های متمایز»، تعداد ترتیب‌های مختلف حرف‌های این عنوان را پیدا کنید.

۱ــ به این نوع واژه‌ها که از هر دو طرف یک‌جور خوانده می‌شوند، **متقارن** می‌گویند. برای اطلاعات بیشتر به کتاب «مهارت‌های پایه ریاضی» سال اول متوسطه مراجعه کنید.

۴ــ۳ــ ترکیب[1]



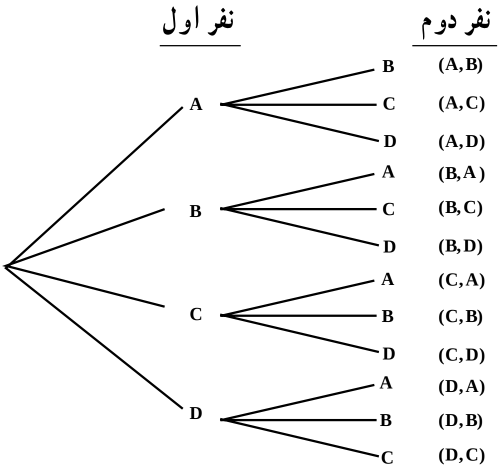
الکساندر گراهام‌بل

اولین مبادلهٔ صدا توسط تلفن، در شهر نیوهِیون در ایالت کانتیکت ایالات متحدهٔ آمریکا، در سال ۱۸۷۸ انجام شد. این شبکه، در توسعهٔ خود توانست ۲۱ مشترک تلفن را به هم مرتبط کند. اوّلین کتاب راهنمای تلفن که در همان سال، در شهر نیوهیون چاپ شد، شامل فهرست نام ۵۰ مشترک تلفن بود. این شبکه در فاز اوّل، توانست ۲۱ مشترک تلفن را به ۲۱۰ راه مختلف، دوبه‌دو به هم مرتبط کند (از طریق مبادلهٔ صدا بین هر جفت از آن‌ها). با راه اندازی فاز بعدی شبکه، ۵۰ مشترک تلفن به ۱۲۲۵ راه مختلف، توانستند دوبه‌دو با هم مرتبط شوند.

به نظر شما، این تعداد راه‌ها، چگونه محاسبه شده‌اند؟

فعالیت ۶ــ۳

راه‌هایی که می‌توان از بین چهار نفر داوطلب نمایندگی شورای شهر، دو نفر را انتخاب کرد، در نمودار درختی زیر نشان داده شده است.



۱ــ Combination

الف) اگر ترتیب مهمّ باشد، چند راه در نمودار نشان داده شده است؟ (یعنی اگر (A,B) با (B,A) فرق داشته باشد).

ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چه عددهایی را باید در هم ضرب کنید تا این جواب به دست آید؟

پ) اگر ترتیب مهمّ نباشد (مثلاً (A,B) با (B,A) یکی باشد)، چند راه ممکن برای انتخاب دو نماینده، وجود دارد؟

ت) آیا می‌توانید این جواب را، بدون نگاه کردن به نمودار درختی، به دست آورید؟ چگونه؟ بحث کنید.

ترکیب، انتخابی از شیء‌هاست که در آن، **ترتیب مهمّ نیست**.

برای پیدا کردن تعداد ترکیب‌های ممکن، اوّل از **اصل اساسی شمارش** شروع کنید و سپس، بر تعداد راه‌هایی که آن شیء‌ها می‌توانند مرتّب شوند، تقسیم کنید.

در واقع، تفاوت ترکیب با جایگشت r شیء از n شیء در این است که چون ترتیب در ترکیب مهمّ نیست ؛ در نتیجه، تعداد ترکیب‌ها به نسبت جایگشت‌های r یعنی $r!$، از $P(n,r)$ کوچک‌تر است.

به همین علّت است که بر تعداد راه‌هایی که rشیء می‌توانند مرتّب شوند، تقسیم می‌کنیم و تعداد ترکیب‌ها را با $C(n,r)$ نشان می‌دهیم :

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!} \qquad (۱)$$

امّا

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad (۲)$$

پس با جایگزینی (۲) در (۱)، داریم :

$$\boxed{C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}}$$

مثال

در روز تولّد امام رضا(ع)، ده نفر در فهرست انتظار پرواز ساعت ۴ بعدازظهر تهران ــ مشهدِ هواپیمایی جمهوری اسلامی ایران ــ هما قرار داشتند.

الف) اگر سه جای خالی در این پرواز وجود داشته باشد، به چند راه مختلف، ممکن است نام سه نفر به ترتیب، برای سوار شدن به هواپیما خوانده شود؟

ب) چند ترکیب مختلف از این سه نفر، برای پرواز ذکر شده می‌توان انتخاب کرد؟

حل:

الف) طبق اصل اساسی شمارش، برای نفر اوّل ۱۰ انتخاب، برای نفر دوم ۹ انتخاب و برای نفر سوم، ۸ انتخاب وجود دارد. یعنی تعداد انتخاب‌های ممکن، $۱۰\times۹\times۸=۷۲۰$ است. این عدد را می‌توان از فرمول جایگشت ۳ از ۱۰ نیز به دست آورد

$$P(۱۰,۳)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰!}{۷!}$$
$$=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!}=۷۲۰$$

ب) برای پیدا کردن تعداد ترکیب‌های خواسته شده، باید تعداد جایگشت‌ها را بر تعداد جایگشت‌های ۳ یعنی $۳!$ تقسیم کنیم پس

$$C(۱۰,۳)=\frac{P(۱۰,۳)}{۳!}=\frac{۷۲۰}{۳\times۲\times۱}=۱۲۰$$

مسایل

۱ــ مقدارهای زیر را محاسبه کنید :

الف) $C(n,n)$ ب) $C(n,۰)$ پ) $C(۷,۳)$

۲ــ یکی از راه‌هایی که معمّاها و بازی‌های مختلف کلامی ساخته می‌شوند، به هم ریختن حروف کلمات و ساختن کلمات جدید (با معنی یا بی‌معنی) است، به چند راه مختلف، می‌توان از تغییر ترتیبِ حرف‌های کلمه‌های زیر، ترکیب‌های جدید ساخت؟

الف) کامیاران ب) مینادشت باغدشت پ) سوسنگرد ت) بندر لنگه

فعالیت ۷ــ۳

خط بریل به زبان فارسی که توسط افراد نابینا مورد استفاده قرار می‌گیرد، از کُدی با ۶۳ کاراکتر تشکیل شده است. کاراکترها ترکیب‌هایی از نقاط برجسته هستند که از ۱ تا ۶ در تغییرند.

نمونه‌هایی از حروف فارسی به خط بریل، در زیر نشان داده شده است.

الف	ب	پ	ت	ث	ج	چ
● ○	● ○	● ●	○ ●	● ●	○ ●	● ●
○ ○	● ○	● ○	● ●	○ ●	● ●	○ ○
○ ○	○ ○	● ○	● ○	○ ●	○ ○	○ ○

دایره‌های توپُر معرّف نقاط برجسته و دایره‌های توخالی نشان دهندهٔ موقعی هستند که کاغذ صاف است و برجستگی ندارد.

به چند راه مختلف ممکن است :

الف) یکی از ۶ نقطه برجسته شود؟

ب) دو تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

پ) ۳ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ت) ۴ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ث) ۵ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ج) تمام ۶ نقطه برجسته شوند؟

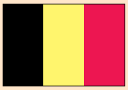
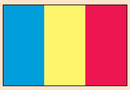
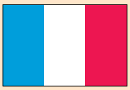
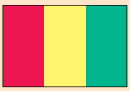
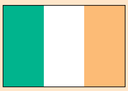
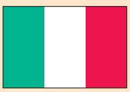
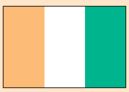
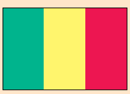
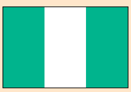
چ) آیا کُد بریل، از تمام ترکیب‌های مختلف ۱ تا ۶ نقطه، استفاده کرده است؟

مسایل

۱ــ پرچم‌های نُه کشور دنیا، الگویی دارند که در زیر می‌بینید ؛

رنگ هر یک از این سه نوار عمودی پرچم، در جدول ۵ آمده است :

جدول ۵

کشور	نوار اول	نوار دوم	نوار سوم	پرچم
بلژیک	سیاه	زرد	قرمز	
چاد	آبی	زرد	قرمز	
فرانسه	آبی	سفید	قرمز	
گینه	قرمز	زرد	سبز	
ایرلند	سبز	سفید	طلایی	
ایتالیا	سبز	سفید	قرمز	
ساحل عاج	طلایی	سفید	سبز	
مالی	سبز	زرد	قرمز	
نیجریه	سبز	سفید	سبز	

الف) اگر نوارهای اول و سوم فقط سیاه، آبی، طلایی، سبز یا قرمز باشند و نوار دوم سفید یا زرد باشد، چند پرچم مختلف با این الگو ممکن است وجود داشته باشند؟

ب) اگر هر نوار پرچم بتواند یکی از هفت رنگ جدول باشد، امّا هر نوار دارای رنگ متفاوتی باشد، چند پرچم مختلف با این الگو می‌توان داشت؟

۲ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $\frac{n!}{(n-۵)!}$ ب) $\frac{(۲n)!}{۴(۲n-۳)!}$

۳ــ نشریه‌ای، تصمیم گرفته بود یک مسابقهٔ ادبی برگزار کند. در این مسابقه، تصویر چهار شاعر معروف ایرانی قرن هفتم هجری قمری ؛ مولانا جلال‌الدّین محمّد بلخی مشهور به مولانا، سعدی شیرازی، خواجوی کرمانی و عطّار نیشابوری ؛ همراه با چهار بیت شعر، چاپ شده و از خوانندگان، خواسته شده بود تا هر بیت شعر را با سرایندهٔ آن جور کنند و برای دریافت یک سکّهٔ بهار آزادی به

عنوان جایزه، حداکثر تا ۱۰ روز پس از انتشار نشریه، جواب‌های خود را به دفتر نشریه ارسال کنند و شانس خود را امتحان کنند! احسان مصرّ بود که این جایزه را ببرد. برای این منظور، او تصمیم گرفت تمام پاسخ‌های ممکن به این سؤال را به دفتر نشریه ارسال کند.

الف) تعداد پاسخ‌های ممکن چند تا بود؟

ب) آیا به نظر منطقی می‌رسید که احسان فکر کند اگر تمام انتخاب‌ها را به درستی انجام دهد، یک سکّهٔ بهار آزادی را حتماً به دست می‌آورد؟

۴ــ از فهرست نام ۲۴ عضو یک باشگاه ورزشی، ۴ نام برای انتخاب رئیس، نایب رئیس، خزانه‌دار و منشی باشگاه، به قید قرعه انتخاب می‌شوند. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این ۴ نفر چند تاست؟

(توجّه کنید که با وجودی که ترتیب باید مهمّ باشد، امّا این ترتیب رعایت نشده است. چرا؟!)

۵ــ یک بستنی فروشی، ۱۰ طعم مختلف بستنی دارد که عبارتند از؛ وانیلی، پرتقالی، زعفرانی، توت‌فرنگی، موز، شاه‌توت، آناناس، قهوه، شکلاتی و پسته‌ای.

الف) اگر بخواهید از این بستنی‌فروشی، یک بستنی قیفی با سه طعم مختلف بخرید، چند انتخاب ممکن از بین ۱۰ طعم بالا وجود دارد؛ به شرطی که ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف، برای شما **مهمّ** باشد؟

ب) اگر بخواهید از این بستنی‌فروشی، یک بستنی قیفی با سه طعم مختلف بخرید و اگر ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف، برای شما **مهمّ نباشد**، چند انتخاب ممکن از بین ۱۰ طعم بالا، وجود دارد؟

۶ــ درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

الف) $C(n,m)=\dfrac{P(n,m)}{m!}$ ب) $C(n,n)=C(n,0)$

۷ــ عبارت «زندگی یعنی امید به آینده»[1] را در نظر بگیرید و به سؤال‌های زیر، پاسخ دهید.

الف) چند ترتیب مختلف با حرف‌های این عبارت می‌توانیم بسازیم؟

ب) اگر بخواهیم کلمهٔ «امید»، همه جا به همین شکل بیاید، آن وقت چند ترتیب مختلف با حرف‌های این عبارت می‌توانیم بسازیم؟

۸ــ ۱۰۰ عضو یک باشگاه کوهنوردی دانش‌آموزی، به همراه دو مربّی، قصد صعود به بلندترین

۱ــ این جمله را استاد بیرشک در موقعی که دانشگاه شهید بهشتی در سال ۱۳۷۷، به ایشان، دکترای افتخاری ریاضی را اعطا کرد، بیان نمودند و گفتند که این عبارت، شعار دانشگاه ملی سابق (شهید بهشتی فعلی) بوده است.

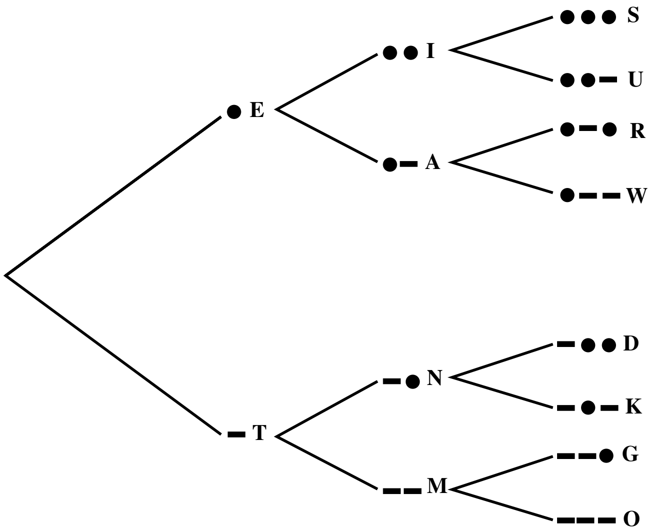
قلّهٔ شهر خود را دارند. قرار است برای حفظ نظم و ایمنیِ دانش‌آموزان، همگی با صف حرکت کنند و یکی از مربّی‌ها پیشاپیش و دیگری، در انتهای صف، به صعود خود ادامه دهند. تعداد ترتیب‌های مختلفی که افراد می‌توانند در صف ظاهر شوند، عددی است که باورنکردنی بزرگ است. نگاه کنید!

۹۳,۳۲۶,۲۱۵,۴۴۳,۹۴۴,۱۵۲,۶۸۱,۶۹۹,۲۳۸,۸۵۶,۲۶۶,۷۰۰,۴۹۰,۷۱۵,۹۶۸,۲۶۴,
۳۸۱,۶۲۱,۴۶۸,۵۹۲,۹۶۳,۸۹۵,۲۱۷,۵۹۹,۹۹۳,۲۲۹,۹۱۵,۶۰۸,۹۴۱,۴۶۳,۹۷۶,۱۵۶,
۵۱۸,۲۸۶,۲۵۳,۶۹۷,۹۲۰,۸۲۷,۲۲۳,۷۵۸,۲۵۱,۱۸۵,۲۱۰,۹۱۶,۸۶۴,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,
۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

شکل کوتاهتری برای این عدد بنویسید.

مجلهٔ ریاضی

کُد مورس، حدود سال ۱۸۳۸ توسط ساموئل مورس[۱] و برای استفاده در تلگراف، اختراع شد. کُد مورس از الگوهایی که با نقطه و خط فاصله ایجاد شده است استفاده می‌کند تا حروف الفبا را معرفی کند. بخشی از نماد بین‌المللی این کُد، توسط نمودار درختی زیر، نشان داده شده است :



۱ـ Samuel Morse

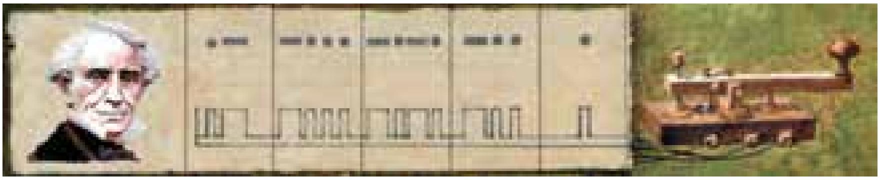
این نمودار نشان می‌دهد که اگر فقط از یک نماد استفاده شود یعنی ● که معرّف E و ــ که معرف T است، دو الگو ممکن است.

الف) چند الگو را می‌توان با استفاده از ۲ نماد ساخت؟

ب) چند الگو را می‌توان با استفاده از ۳ نماد ساخت؟

پ) به نظر شما، با استفاده از ۴ نماد، چند الگو می‌توان ساخت؟

ت) آیا تمام حروف الفبای انگلیسی را می‌توان با الگویی که دارای ۴ نماد یا کمتر هستند، نشان داد؟ توضیح دهید.



ساموئل مورس

منابع

1- Brousseau, G. (1997). **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. Edited and translated by N. Balacheff; M.Cooper; R. Sutheland; and V. Warfield. Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

2 - De lange, J. (1998). Real Problems with Real world Mathematics, In C. Alsina & et. al (eds). **Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education**, S. A. E. M. THALES.

3 - Eisner, E. (1994). **The Educational Imagination: On the Design and Evaluation of school Programs.** Third Edition. Macmillan College Publishing Company.

4 - Ferrini - Mundy, J. & Lauter, D. (1993). Teaching and Learning Calculus. In P. S. Wilson. [ed.] **Research Ideas for the Classroom: High school Mathematics:** National Council of Teachers of Mathematics Research Interpretation Project. Academic Macmilan Publishing Company.

5 - Hubbard, E. & Robinson, R. D. (1999). **Elementary and Intermediate Algebra**. Houghton Mifflin Company. Boston - Ny.

6 - Hughes - Hallett, D. and et. al. (1994). **Calculus: Harvard Project**. John Wiley & Sons, Inc.

7 - Jacobs, H. R. (1982). **Mathematics: A Human Endevor**. (2nd Ed.) Freeman & company, Ny.

8 - Larson, R. E. & Hostetler, R. P. (1993). **Precalculus**. D. C. Heath & Company.

9 - National Council of Teachers of Mathematics (1996). Communication in Mathematics k -12 and Beyond: 1996 year Book. Reston, VA. Author.

10 - National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and**

Standards for school. Reston, Va. Author.

11 - Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental understanding. **Arithmetic Teacher**. pp. 9-15.

12 - Spence, L. E & et al. (1990). **Applied Mathematics for the Management, Life, and Social Sciences**. Scott, Foresman / Little, Brown Higher Education.

۱۳ــ انگلیش، لین ووارن، الیزابت، (۱۳۷۷) معرّفی مفهوم متغیّر از طریق الگویابی. ترجمهٔ سهیلا غلام‌آزاد. **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۵۴، زمستان ۱۳۷۷.

۱۴ــ بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۰)، **ریاضیات ۲: نظری (رشته‌های علوم تجربی ــ ریاضی و فیزیک). فنی و حرفه‌ای**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۵ــ بیشاپ، آلن (۱۳۷۶). رابطهٔ بین آموزش ریاضی و فرهنگ. ترجمهٔ زهرا گویا. **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**، شمارهٔ ۵۰.

۱۶ــ توماس، جرج و فینی، راس (۱۹۸۸). **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی: جلد اوّل**. ترجمهٔ مهدی بهزاد و همکاران. (چاپ اوّل سال ۱۳۷۰ ــ ویرایش هفتم). مرکز نشر دانشگاهی.

۱۷ــ داریوش همدانی، حمیده و همکاران (۱۳۷۹). **مهارت‌های پایهٔ ریاضی. سال اوّل دبیرستان**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۸ــ غلام‌آزاد، سهیلا (۱۳۸۰). دوباره نگری به برنامهٔ جبر دبیرستانی، **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۶۳.

۱۹ــ گویا، زهرا و همکاران (چاپ ششم، ۱۳۷۹). **ریاضی پایه دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ علوم انسانی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲۰ــ گویا، زهرا (ترجمه) (۱۳۷۷). مرکز بین‌المللی مطالعهٔ تیمز ــ کالج بوستون: سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم، **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۵۲، تابستان ۱۳۷۷.

۲۱ــ گویا، زهرا (۱۳۷۷)، روایت معلمان. **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۵۴، زمستان ۱۳۷۷.