فصل دوم

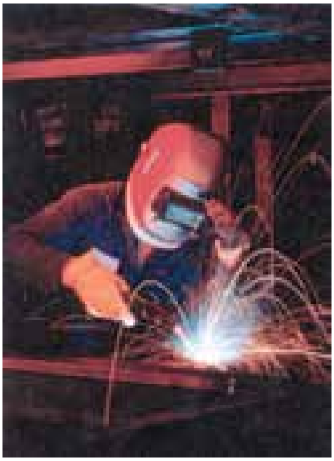
معادله و تابع‌های درجهٔ دوم

معادلهٔ درجهٔ دوم به معادلاتی گفته می‌شود که دارای چندجمله‌ای‌های با درجهٔ ۲ باشند.

تعریف

یک معادلهٔ درجهٔ دوم، معادله‌ای به شکل $ax^2+bx+c=0$ است که در آن ؛ a و b و c، اعداد حقیقی هستند و a مخالف صفر است.

در این تعریف، ax^2 جملهٔ درجهٔ ۲، bx جملهٔ درجهٔ ۱ و c، جملهٔ ثابت نامیده می‌شوند.



مثال

$5x^2+3x+4=0$ یک معادلهٔ درجهٔ ۲ است که در آن، $5x^2$ جملهٔ درجهٔ دو، $3x$ جملهٔ درجهٔ یک و ۴ جملهٔ ثابت نامیده می‌شوند.

تمرین

در معادله‌های درجهٔ دوم زیر، جملهٔ درجهٔ ۲، جملهٔ درجهٔ ۱ و جملهٔ ثابت را مشخص کنید:

الف) $3x^2+50x-1=0$

ب) $-\frac{1}{2}x^2-3x+2=0$

مثال

در معادله‌های درجهٔ دوم زیر، جملهٔ درجهٔ دو، جملهٔ درجه یک و جملهٔ ثابت را مشخّص کنید:

الف) $ax^2-4=0$

ب) $\frac{1}{50}x^2-3x=0$

پ) $x^2=0$

حل:

الف) در این معادله، جملهٔ درجهٔ ۲ برابر ax^2 و جملهٔ درجهٔ ۱ برابر صفر و جملهٔ ثابت برابر -4 است، زیرا می‌توانیم معادله را به شکل زیر بنویسیم:

$$ax^2+0x+(-4)=0$$

ب) معادلهٔ $\frac{1}{50}x^2-3x=0$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{50}x^2+(-3)x+0=0$$

پس جملهٔ درجهٔ ۲ مساوی $\frac{1}{50}x^2$، جملهٔ درجهٔ ۱ برابر $-3x$ و جملهٔ ثابت برابر صفر است.

پ) معادلهٔ $x^2=0$ را به شکل $x^2+0x+0=0$ می‌نویسیم.

در این معادله، جملهٔ درجهٔ ۲ مساوی x^2، جملهٔ درجهٔ ۱ مساوی صفر و جملهٔ ثابت نیز مساوی صفر است.

تمرین

در معادله‌های زیر ؛ جملهٔ درجهٔ ۲، جملهٔ درجهٔ ۱ و جملهٔ ثابت را مشخّص کنید :

ب) $۳x^{۲} - ۲ = ۰$ الف) $۳x^{۲} - bx = ۰$

ت) $\frac{۱}{۳}x^{۲} - bx + c = ۰$ پ) $۳x^{۲} = ۰$

شکل استاندارد معادلهٔ درجهٔ دوم، به‌صورت $ax^{۲} + bx + c = ۰$ است.

۱ــ۲ــ تابع درجهٔ دوم

تابع‌های درجهٔ دوم، به شکل $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ هستند که در آن، a و b و c ؛ اعداد حقیقی هستند و a مخالف صفر است.

توجّه: به تفاوت بین یک **معادلهٔ درجهٔ دوم** که می‌توان آن را به شکل $ax^{۲} + bx + c = ۰$ نوشت و یک تابع درجهٔ دوم که می‌توان آن را به شکل $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ نوشت، توجّه کنید. معادلهٔ درجهٔ دوم، یک مورد خاص $f(x) = ۰$ است و **ریشه‌های** این معادله، محلّ تقاطع نمودار $f(x)$ ، با محور xها است.

۲ــ۲ــ تخمین جواب‌های معادلات درجهٔ دوم

حل معادله‌ای مانند $x^{۲} - ۲x - ۵ = ۳$ ، به معنای پیدا کردن مقادیری برای x است که به‌ازای آن مقادیر ؛ $x^{۲} - ۲x - ۵$ دارای مقدار ۳ باشد. جدول بالا را در نظر بگیرید.

جدول ۱

x	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$x^{۲} - ۲x - ۵$	۱۰	۳	−۲	−۵	−۶	−۵	−۲	۳	۱۰

با توجّه به جدول، مقدار عبارت $x^{۲} - ۲x - ۵$ به‌ازای دو مقدار متفاوت x یعنی ۲ − و ۴، مساوی ۳ می‌شود. یعنی معادلهٔ $x^{۲} - ۲x - ۵ = ۳$ دارای دو جواب ۲− و ۴ است.

تعریف

مقادیری از x که به‌ازای آن‌ها، معادله برقرار است ؛ **جواب** معادله نامیده می‌شوند.

همان طور که در جدول می‌بینید، به‌ازای $x=1$ ، مقدار عبارت x^2-2x-5 مساوی -6 می‌شود. یعنی معادلهٔ $x^2-2x-5=-6$ دارای یک جواب است.

مثال

آیا معادلهٔ $x^2-2x-5=-10$ جواب دارد؟ توضیح دهید.

حل: با توجّه به جدول ۱، دیده می‌شود که کمترین مقدار عبارت x^2-2x-5 برابر -6 است. بنابراین، معادلهٔ $x^2-2x-5=-10$ جواب ندارد، یعنی xای وجود ندارد که به‌ازای آن، مقدار x^2-2x-5 ، برابر -10 شود.

مثال

آیا معادله‌های زیر، درجهٔ دوم هستند؟ هر معادله دارای چند جواب است؟

الف) $(7-2x)^2=(2x-7)^2$

ب) $(2x+1)^2=(3+2x)^2$

حل:

الف) دو طرف معادله را با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله به توان می‌رسانیم :

$$(7-2x)^2=(2x-7)^2$$

$$\cancel{49}+\cancel{4x^2}-\cancel{28x}=\cancel{4x^2}-\cancel{28x}+\cancel{49}$$

$$0=0$$

توجّه: این معادله دارای ویژگی خاصّی است یعنی به ازای **تمام** مقادیر x، معادله درست است. به این نوع معادله، **اتّحاد** گفته می‌شود[1].

۱ــ توجه داشته باشید که در ریاضی سال اوّل، به تفصیل با اتّحادها کار کرده‌اید.

ب) $(۲x+۱)^۲=(۳+۲x)^۲$

$\cancel{۴x^۲}+۴x+۱=۹+۱۲x+\cancel{۴x^۲}$

$۴x+۱-۹-۱۲x=۰$

$-۸x-۸=۰\Rightarrow \quad ۸x=۸\Rightarrow \boxed{x=-۱}$

پس این معادله، درجه اول است و تنها یک جواب دارد.

۳ـ۲ـ حل معادلهٔ درجهٔ دوم

اگر بتوان یک عبارت درجهٔ دوم را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عبارت درجهٔ اوّل نوشت، اصطلاحاً گفته می‌شود که عبارت درجهٔ دوم، به حاصل‌ضرب دو عبارت درجهٔ اوّل، **تجزیه** شده است.

به مثال‌های زیر توجّه کنید :

اتّحاد جملهٔ مشترک	الف) $x^۲+۴x+۳=(x+۳)(x+۱)$
فاکتورگیری	ب) $۲x^۲+۵x=x(۲x+۵)$
اتّحاد مزدوج	پ) $x^۲-۹=(x-۳)(x+۳)$
اتّحاد مربع مجموع دو جمله	ت) $x^۲+۶x+۹=(x+۳)(x+۳)=(x+۳)^۲$
اتّحاد مربع تفاضل دو جمله	ث) $x^۲-۶x+۹=(x-۳)(x-۳)=(x-۳)^۲$

معادلهٔ نظیر هر یک از عبارت‌های درجهٔ دوم بالا، به شکل زیر است :

الف) $x^۲+۴x+۳=۰$

ب) $۲x^۲+۵x=۰$

پ) $x^۲-۹=۰$

ت) $x^۲+۶x+۹=۰$

ث) $x^۲-۶x+۹=۰$

برای حل این معادله‌ها، می‌توانیم از یک خاصیت ساده امّا مهمّ اعداد حقیقی استفاده کنیم :

> **خاصیّت فاکتور (عامل) صفر:** برای هر دو عدد حقیقی a و b، اگر $ab=۰$، آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$.

حل معادلات نمونه

الف) $x^{۲}+۴x+۳=۰$

با استفاده از اتّحاد جملهٔ مشترک،معادله را تجزیه می‌کنیم. $(x+۳)(x+۱)=۰$

با استفاده از خاصیت فاکتور (عامل) صفر $x+۳=۰$ یا $x+۱=۰$

$\boxed{x=-۳}$ یا $\boxed{x=-۱}$

ب) $۲x^{۲}+۵x=۰$

با استفاده از فاکتورگیری $x(۲x+۵)=۰$

با استفاده از خاصیت فاکتور صفر $\boxed{x=۰}$ یا $۲x+۵=۰ \Rightarrow \boxed{x=-\frac{۵}{۲}}$

پ) $x^{۲}-۹=۰$

اتّحاد مزدوج $(x-۳)(x+۳)=۰$

خاصیت فاکتور صفر $x-۳=۰$ یا $x+۳=۰$

$\boxed{x=۳}$ یا $\boxed{x=-۳}$

ت) $x^{۲}+۶x+۹=۰$

اتّحاد مربع مجموع دو جمله $(x+۳)(x+۳)=(x+۳)^{۲}=۰$

خاصیت فاکتور صفر $x+۳=۰$ یا $x+۳=۰$

$\boxed{x=-۳}$ یا $\boxed{x=-۳}$

پس معادله، دارای دو جواب مساوی است که به آن، **ریشهٔ مضاعف** گفته می‌شود.

ث) $x^{۲}-۶x+۹=۰$

اتّحاد مربع تفاضل دو جمله $(x-۳)(x-۳)=(x-۳)^{۲}=۰$

خاصیت فاکتور صفر $x-۳=۰$ یا $x-۳=۰$

$\boxed{x=۳}$ یا $\boxed{x=۳}$

پس معادله، دارای یک جواب است یعنی یک **ریشهٔ** مضاعف دارد.

ریشهٔ یک معادله، همان جواب معادله است.

همان‌طور که در حل معادلات نمونه دیدید :

برای استفاده از خاصیت فاکتور (عامل) صفر، دو شرط **باید** وجود داشته باشد :

۱ــ یک طرف معادله صفر باشد ؛

۲ــ طرف دیگر معادله، یک حاصل‌ضرب باشد.

مسایل

در صورت امکان، جواب معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

۱ــ $۵x = x^{۲}$

۲ــ $P^{۲} + ۳۶ = ۰$

۳ــ $x^{۲} = ۱/۲۱$

۴ــ $x - ۲ = -\frac{۳۵}{x}$

توجه: همان‌طورکه در بسیاری حالت‌ها، دو جواب برای معادله‌های درجهٔ دوم به‌دست آوردیم، می‌توانیم با داشتن دو جواب نیز، یک معادلهٔ درجهٔ دوم بنویسیم.

مثال

معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ۳ و ۷− ، جواب‌های آن باشند.

حل: ۳ و ۷− جواب معادله هستند، پس

$\boxed{x = ۳}$ یا $\boxed{x = -۷}$

$x - ۳ = ۰$ یا $x + ۷ = ۰$

$(x - ۳)(x + ۷) = ۰$

$x^{۲} + ۴x - ۲۱ = ۰$

تمرین

معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن، جفت عددهای زیر باشد :

الف) ۴,۴   ب) ۲,۷   پ) ۳−,۲−

۱ـ۳ـ۲ـ حل معادلهٔ درجهٔ دوم با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج: در شکل استاندارد معادلهٔ درجهٔ دوم یعنی $ax^2+bx+c=0$ ،

الف) اگر $c=0$ باشد، آن‌گاه $ax^2+bx=0$ می‌شود. درنتیجه، با استفاده از خاصیت فاکتور صفر، معادله را که همیشه جواب حقیقی دارد، حل می‌کنیم :

$$ax^2+bx=0$$

$$x(ax+b)=0$$

$$\boxed{x=0} \text{ یا } ax+b=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{b}{a}}$$

ب) اگر $b=0$ ، آن‌گاه $ax^2+c=0$. در این حالت برای پیداکردن جواب معادله، به طریق زیر عمل می‌کنیم :

$$ax^2+c=0$$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم.

$$x^2+\frac{c}{a}=0$$

از دو طرف، $\frac{c}{a}$ را کم می‌کنیم.

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

این معادله، وقتی جواب دارد که $-\frac{c}{a}\geq 0$ (چرا؟)

در این صورت :

$$\boxed{x=\sqrt{-\frac{c}{a}}} \text{ یا } \boxed{x=-\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

اگر $-\frac{c}{a}<0$ ، معادله جواب ندارد (چرا؟).

در حالت کلّی :

اگر $x^2=k$ و $k>0$ ، آن‌گاه $x=\sqrt{k}$ یا $x=-\sqrt{k}$. این طریق پیدا کردن جواب‌های معادله $x^2=k$ ، استفاده از **خاصیت ریشهٔ زوج** است.

مثال

معادله درجهٔ دوم $۵ - x^۲ = ۰$ را حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به شکل $x^۲ = ۵$ می‌نویسیم؛

با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج: $x = -\sqrt{۵}$ یا $x = \sqrt{۵}$.

مثال

با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج، معادلهٔ $(۲x + ۱)^۲ = ۵$ را حل کنید.

از خاصیت ریشهٔ زوج با $k > ۰$ استفاده می‌کنیم:

به دو طرف معادله (-۱) را اضافه می‌کنیم: $\quad ۲x + ۱ = \pm\sqrt{۵}$

دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم: $\quad ۲x = \pm\sqrt{۵} - ۱$

$$x = \frac{\pm\sqrt{۵} - ۱}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}} \text{ یا } \boxed{x = \frac{-\sqrt{۵} - ۱}{۲}}$$

توجه داشته باشید که نماد $(\pm)$ نشانگر دو جواب است، یک جواب با علامت مثبت و جواب دیگر با علامت منفی خواهد بود.

تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید:

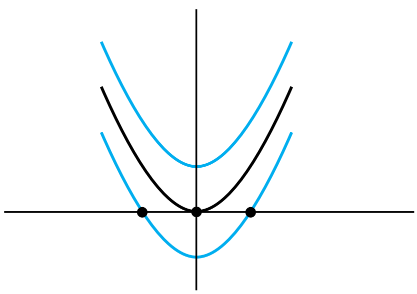
الف) $(۲x + ۵)^۲ = (x - ۱)^۲$

ب) $x^۲ + ۷x + ۶ = ۰$ $\qquad$ پ) $x^۲ = x$

ت) $(۵x - ۴)^۲ = ۹$ $\qquad$ ث) $(۳x - ۲)^۲ = ۱۵$

بررسی تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

با توجه به «زنگ تفریح ریاضی» پایان فصل اوّل، تابع $y = f(x) = x^۲$ را در نظر می‌گیریم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:



آن‌گاه، نمودار تابع $f(x)=x^۲-۱$ را روی همان صفحهٔ مختصات رسم می‌کنیم. سپس، نمودار تابع $f(x)=x^۲+۱$ را نیز در همان صفحهٔ مختصات رسم می‌کنیم. نتیجه‌ها را بررسی می‌کنیم :

۱ــ نمودار تابع $y=f(x)=x^۲$ **یک ریشه** دارد (محلّ تقاطع نمودار با محور xها)، درنتیجه ؛ معادلهٔ $y=x^۲=۰$ دارای **یک** جواب حقیقی یا به‌عبارت دیگر، دارای یک ریشهٔ مضاعف است.

۲ــ نمودار تابع $y=f(x)=x^۲-۱$ **دو ریشه** دارد (یعنی نمودار تابع ؛ محور xها را در دو نقطه قطع کرده است).درنتیجه، معادلهٔ $y=x^۲-۱=۰$ دارای **دو جواب** حقیقی است.

۳ــ نمودار تابع $y=f(x)=x^۲+۱$ **هیچ ریشه** ندارد (یعنی نمودار تابع، اصلاً محور xها را قطع نکرده است). درنتیجه، معادلهٔ $y=x^۲+۱=۰$ دارای **جواب** حقیقی نیست.

تمرین

معادله‌های $۵-x^۲=۰$ و $۵+x^۲=۰$، خیلی شبیه هستند اما، از نظر تعدادِ جواب‌ها متفاوت هستند. با استفاده از خاصیّت ریشهٔ زوج، توضیح دهید چرا یک معادله دو جواب دارد، امّا معادلهٔ دیگر، هیچ جواب حقیقی ندارد؟

۲ــ۳ــ۲ــ حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم به روش مربع کامل‌کردن

به مثال زیر توجه کنید :

مثال

جواب‌های معادلهٔ $۴x^۲-۴x-۸=۰$ را پیدا کنید.

حل: معادله را به شکل زیر می‌نویسیم :

$$(۴x^۲-۴x)-۸=۰$$

$$\left[(۲x)^۲-۲(۲x)+\square\right]-۸-\square=۰ \qquad (۱)$$

سعی می‌کنیم عبارت داخل پرانتز را به صورت مربع کامل درآوریم : توجّه کنید مقداری را که به داخل کروشه اضافه کرده‌ایم، مجدداً کم می‌کنیم تا **تعادل** معادله، به‌هم نخورد!

عبارت داخل کروشه، مربع تفاضل دو جمله است که جملهٔ سوم آن مجهول است. چون جملهٔ وسطی، دو برابر حاصل ضرب جملهٔ اوّل در دوم است. $\left((a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲\right)$

پس $\square.2(2x)=2(2x)$. می‌بینید که مقدار $\square$ باید ۱ باشد تا معادله برقرار باشد، پس در (۱)، مقدار $\square$ را با 1^2 جایگزین می‌کنیم :

$$\left[(2x)^2-2(2x)+1^2\right]-8-1^2=0$$

$$(2x-1)^2-9=0$$

$$(2x-1)^2=9$$

$$2x-1=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

$$2x-1=3\Rightarrow 2x=4\Rightarrow \boxed{x=2}$$

یا

$$2x-1=-3\Rightarrow 2x=-2\Rightarrow \boxed{x=-1}$$

مربع کامل کردن، یعنی نوشتن معادلهٔ درجهٔ دوم به شکل $(x+h)^2=k$ که در آن h و k اعداد حقیقی هستند.

حل یک معادلهٔ درجه دوم با مربع کامل‌کردن

۱ــ اگر لازم باشد، دو طرف معادله را بر ضریب x^2 تقسیم کنید تا ضریب آن ۱ شود.

۲ــ معادله را به شکل $x^2+bx=k$ بنویسید.

۳ــ $(\frac{b}{2})^2$ را به هر دو طرف تساوی اضافه کنید تا جملهٔ سمت چپ، مربع کامل شود.

۴ــ سه جمله‌ای کامل شده را به‌صورت مربع مجموع یا مربع تفاضل دو جمله بنویسید.

۵ــ با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج، معادله را حل کنید.

مثال

معادله‌های درجه دوم زیر را با روش مربع کامل کردن حل کنید.

الف) $x^2-10x-1=0$

حل: به هر دو طرف معادله، ۱ را اضافه کنید. $x^{۲}-۱۰x=۱$

مربع (مجذور) نصف ضریب x یعنی $(\frac{-۱۰}{۲})^{۲}=۲۵$ را به هر دو طرف معادله اضافه کنید، تا سه‌جمله‌ای به صورت مربع کامل درآید.

$$x^{۲}-۱۰x+۲۵=۱+۲۵$$

سپس سه‌جمله‌ای را به‌صورت مربع تفاضل دو جمله بنویسید.

$$(x-۵)^{۲}=۲۶$$

از خاصیت ریشهٔ زوج (مربع) استفاده کنید.

$$x-۵=\pm\sqrt{۲۶}$$

به دو طرف معادله، ۵ را اضافه کنید.

$$x=۵\pm\sqrt{۲۶}$$

$$x=۵+\sqrt{۲۶} \text{ یا } x=۵-\sqrt{۲۶}$$

توجه: با استفاده از ماشین‌حساب، مقدار تقریبی x را حساب کنید.

ب) $x(۲x+۳)=۶$

حل: پرانتزها را بردارید. $۲x^{۲}+۳x=۶$

دو طرف را بر ضریب درجهٔ دوم ($x^{۲}$) تقسیم کنید. $x^{۲}+\frac{۳}{۲}x=۳$

به دو طرف، مجذور نصف ضریب x یعنی $(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲})^{۲}=\frac{۹}{۱۶}$ را اضافه کنید.

$$x^{۲}+\frac{۳}{۲}x+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۳}{۱}+\frac{۹}{۱۶}$$

طرف چپ مربع کامل است. $(x+\frac{۳}{۴})^{۲}=\frac{۵۷}{۱۶}$

از خاصیت ریشهٔ زوج استفاده کنید. $x+\frac{۳}{۴}=\pm\sqrt{\frac{۵۷}{۱۶}}$

$$x+\frac{۳}{۴}=\pm\frac{\sqrt{۵۷}}{۴}$$

از دو طرف $\frac{۳}{۴}$ را کم کنید تا جواب x به‌دست آید. $x=-\frac{۳}{۴}\pm\frac{\sqrt{۵۷}}{۴}$

با استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی x را حساب کنید.

$\boxed{x \cong ۱/۱۴}$ یا $\boxed{x \cong ۲/۶۴}$

پ) $x^۲ + ۶x + ۸ = ۰$

از دو طرف ۸ را کم کنید. $x^۲ + ۶x = -۸$

مجذور نصف ضریب x یعنی $(\frac{۶}{۲})^۲ = ۹$ را به دو طرف اضافه کنید تا سه جمله‌ای، مربع کامل شود.

$$x^۲ + ۶x + ۹ = -۸ + ۹$$

$$x^۲ + ۶x + ۹ = ۱$$

سه جمله‌ای را به‌صورت مربع مجموع دو جمله بنویسید. $(x+۳)^۲ = ۱$

از خاصیت ریشهٔ زوج استفاده کنید. $x + ۳ = \pm\sqrt{۱}$

از دو طرف ۳ را کم کنید. $x = -۳ \pm ۱$

$\boxed{x = -۲}$ یا $\boxed{x = -۴}$

تمرین

معادله‌های زیر را ازطریق **مربع کامل‌کردن** ؛ حل کنید :

الف) $x^۲ + ۲x = ۵$ ب) $x(۲x - ۳) = ۱$

پ) $x^۲ + ۶x + ۸ = ۰$

۳ـ۳ـ۲ـ فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلّی

اگر مراحل حل معادلهٔ درجهٔ دوم را به **روش مربع کامل‌کردن**، برای معادلهٔ درجهٔ دوم به شکل استاندارد $ax^۲ + bx + c = ۰$ انجام دهیم، می‌توانیم یک فرمول کلّی برای پیداکردن جواب‌های معادله‌های درجهٔ دوم پیدا کنیم. زیرا اگر a، b و c، هر سه مخالف صفر باشند، آن گاه، استفاده از خاصیت فاکتور صفر یا استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج، همیشه به‌سادگی، امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل، به ابزار دیگری برای حل معادله‌های درجهٔ دوم در حالت کلّی، نیاز داریم.

مراحل به‌دست‌آوردن فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم

شکل استاندارد معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^{2}+bx+c=0$$

کم‌کردن c از دو طرف

$$ax^{2}+bx=-c$$

تبدیل ضریب جملهٔ درجه دوم به ۱ با تقسیم دو طرف معادله بر a

$$x^{2}+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

اضافه‌کردن مجذور نصف ضریب x یعنی $\frac{b^{2}}{4a^{2}}=(\frac{1}{2}\times\frac{b}{a})^{2}$ به دو طرف

$$x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{2}}{4a^{2}}=-\frac{c}{a}+\frac{b^{2}}{4a^{2}}$$

یکسان کردن مخرج کسرها در سمت راست

$$x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{2}}{4a^{2}}=\frac{-4ac}{4a^{2}}+\frac{b^{2}}{4a^{2}}$$

ترکیب دو کسر در سمت راست

$$x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{2}}{4a^{2}}=\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}$$

سه‌جمله‌ای سمت چپ، مربع کامل است. نوشتن سمت چپ به صورت توانی

$$(x+\frac{b}{2a})^{2}=\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}$$

توجه کنید که تساوی به‌دست‌آمده، با توجه به مثبت بودن $4a^{2}$ تنها وقتی معنی‌دار است که

$$b^{2}-4ac\geq 0$$

استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

کم‌کردن $\frac{b}{2a}$ از دو طرف برای پیدا کردن x

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ترکیب دو کسر در سمت راست

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

این فرمول، **فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم** نامیده می‌شود.

فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم

برای اعداد حقیقی a، b و c و با شرط $a\neq 0$ ، جواب‌های حقیقی معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ در صورت وجود عبارتند از :

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}\quad,\quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

توجه: قبل از استفاده از فرمول به‌دست‌آمده، معادلهٔ درجهٔ دوم باید به شکل استاندارد نوشته شود.

فکر کنید: چرا در فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، b و c می‌توانند صفر باشند امّا a نمی‌تواند صفر شود؟ چرا این حالت معنی ندارد؟

مثال

با استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، معادلهٔ $3x^2-13x=30$ را حل کنید.

حلّ: نوشتن معادله به شکل استاندارد $3x^2-13x-30=0$

$a=۳$ ، $b=-۱۳$ و $c=-۳۰$ را در فرمول قرار می‌دهیم :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

$$x=\frac{-(-۱۳)\pm\sqrt{(-۱۳)^۲-۴(۳)(-۳۰)}}{۲(۳)}$$

رادیکال را ساده می‌کنیم :

$$x=\frac{۱۳\pm\sqrt{۱۶۹+۳۶۰}}{۶}$$

۵۲۹ مربع کامل است درنتیجه :

$$x=\frac{۱۳\pm\sqrt{۵۲۹}}{۶}$$

$$x=\frac{۱۳\pm۲۳}{۶}\begin{cases}=\dfrac{۱۳+۲۳}{۶}=۶\\[2ex]=\dfrac{۱۳-۲۳}{۶}=-\dfrac{۵}{۳}\end{cases}$$

مبیّن

در فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلّی یعنی،

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

مقدار زیر رادیکال یعنی $b^۲-۴ac$ **مبیّن** نامیده می‌شود و با علامت Δ (بخوانید دلتا) نشان داده می‌شود. **مبیّن**، اطلاعاتی در مورد تعداد جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی را، **بیان** می‌کند.

اطلاعات به‌دست‌آمده از مبیّن

اگر a، b و c، اعداد حقیقی باشند ؛ مبیّن تعداد جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌شرح زیر، بیان می‌کند :

۱ــ اگر $\Delta=b^۲-۴ac>۰$ ، معادله دارای دو جواب متمایز $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$ است.

۲ــ اگر $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۰$ ، معادله یک جواب به‌صورت $-\frac{b}{۲a}$ دارد (ریشهٔ مضاعف).

۳ــ اگر $\Delta = b^۲ - ۴ac < ۰$ ، معادله هیچ جواب حقیقی ندارد (اعداد منفی جذر ندارند).

مثال

با تشکیل مبیّن هر معادله، تعداد جواب‌های آن را تعیین کنید.

الف) $۳x^۲ + ۱ = ۲x$

ب) $x(۵x + ۱) = ۱۲$

پ) $۲۵x^۲ - ۲۰x + ۴ = ۰$

حل:

الف) $۳x^۲ + ۱ = ۲x$

نوشتن معادله به شکل استاندارد $\quad ۳x^۲ - ۲x + ۱ = ۰$

تشکیل مبیّن معادله $\quad \Delta = b^۲ - ۴ac$

$$\Delta = (-۲)^۲ - ۴(۳)(۱) = ۴ - ۱۲ = -۸$$

چون مبیّن منفی است، پس معادله جواب حقیقی ندارد.

ب) $x(۵x + ۱) = ۱۲$

نوشتن معادله به شکل استاندارد $\quad ۵x^۲ + x - ۱۲ = ۰$

تشکیل مبیّن معادله $\quad \Delta = b^۲ - ۴ac$

$$= (۱)^۲ - ۴(۵)(-۱۲) = ۱ + ۲۴۰ = ۲۴۱$$

مبیّن مثبت است، پس معادله دو جواب متمایز دارد.

پ) $۲۵x^۲ - ۲۰x + ۴ = ۰$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۲۰)^۲ - ۴(۲۵)(۴) = ۴۰۰ - ۴۰۰ = ۰$$

مبیّن صفر است، پس معادله دارای یک جواب حقیقی (ریشهٔ مضاعف) است.

مسایل

۱ــ معادله‌های زیر را اوّل به‌صورت استاندارد بنویسید و بعد مقادیر a، b و c را مشخص کنید.

الف) $x(3x-2)=7x+6$

ب) $(x-2)^2=-4x$

پ) $1=4x(2x-5)$

۲ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^2+16=8x$

ب) $2x^2=7x-3$

پ) $x^2=5x$

ت) $2x^2+7x=4$

ث) $x^2+1=2x$

۳ــ با استفاده از مبیّن، تعداد جواب‌های معادله‌های زیر را تعیین کنید:

الف) $4x^2+12x=7$

ب) $3x^2+4x-8=0$

پ) $x^2+12=8x$

ت) $1+6x-9x^2=0$

۴ــ چرا معادلهٔ $x^2+ax-5=0$ ، همیشه جواب‌های حقیقی دارد؟ (بدون توجّه به مقدار a).

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها

مثال

با استفاده از فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم، نشان دهید که مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ برابر $-\frac{b}{a}$ است. نتیجه را با حل معادلهٔ $2x^2-7x-15=0$ امتحان کنید.

حل: با استفاده از فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم،

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

پس

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مخرج مشترک می‌گیریم.

$$x_1+x_2=\frac{-b+\cancel{\sqrt{b^2-4ac}}-b-\cancel{\sqrt{b^2-4ac}}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

حال، نتیجه را در معادلهٔ $2x^2-7x-15=0$ امتحان می‌کنیم:

$$2x^2-7x-15=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49+120}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{169}}{4}$$

$$x=\frac{7\pm13}{4}$$

$$x_1=\frac{7+13}{4}=\frac{20}{4}=5 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{7-13}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

پس

$$x_1+x_2=5-\frac{3}{2}=\frac{10}{2}-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

از طرفی،

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{(-7)}{2}=\frac{7}{2}$$

یعنی نتیجهٔ به‌دست‌آمده در بالا، تأیید شد.

> مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم
>
> $ax^2+bx+c=0$،
>
> برابر با $-\frac{b}{a}$ است.

مثال

الف) با استفاده از فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم، حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را به‌دست آورید.

حل: برای معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$،

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با :

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$ با استفاده از اتّحاد مزدوج

$$=\frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2}=\frac{\cancel{4}a\cancel{c}}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}}$$

$$=\frac{c}{a}$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ (الف)، توضیح دهید که چرا ۴− و ۵ نمی‌توانند جواب‌های $2x^2-3x-20=0$ باشند.

حل: در (الف)، دیدیم که حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است. در این معادله، $a=2$ و $c=-20$ است پس :

$$x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{-20}{2}=-10$$

امّا $x_1=-4$ و $x_2=5$ که حاصل‌ضرب آن‌ها

$$x_1.x_2=5.(-4)=-20$$

است. پس ۴− و ۵، نمی‌توانند ریشه‌های این معادله باشند.

> حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ برابر با $\frac{c}{a}$ است.

مسایل

۱ــ در معادله‌های زیر، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را بدون حل معادله،

بـه‌دست آورید :

الف) $۳x^۲-۲x-۱=۰$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $x^۲+x+۱=۰$

پ) $۲x^۲-۲x+۱=۰$ ‏ ‏ ‏ ‏ ت) $x^۲-۴x-۱=۰$

۲ــ برای هر دسته از جواب‌های زیر، یک معادلهٔ درجهٔ دوم بنویسید :

الف) $-۵\pm۲\sqrt{۵}$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $-۲\pm۳\sqrt{۲}$

۳ــ با استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، معادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $x^۲+\sqrt{۳}x-۱=۰$

ب) $\sqrt{۲}x^۲+\sqrt{۵}x-\sqrt{۸}=۰$

۴ــ۲ــ معادله‌های کسری

گاهی ساده‌کردن کسرهای گویا، به یک معادلهٔ درجهٔ دوم منجر می‌شود.

مثال

معادلهٔ $\frac{۲}{t}-\frac{t}{t-۲}=۵$ را حل کنید.

حل: توجه داشته باشید که ۲ و صفر مقادیر غیرقابل قبولی برای t هستند. (چرا؟)

مخرج مشترک می‌گیریم

$$\frac{۲}{t}-\frac{t}{t-۲}=۵$$

ضرب می‌کنیم

$$\frac{t(t-۲)}{۱}\times\frac{۲}{t}-\frac{t(t-۲)}{۱}\times\frac{t}{t-۲}=۵t(t-۲)$$

ساده می‌کنیم

$$۲(t-۲)-t^۲=۵t^۲-۱۰t$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$-۶t^۲+۱۲t-۴=۰$$

حال از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم برای پیدا کردن t استفاده می‌کنیم :

$$t=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۱۲^۲-۴(-۶)(-۴)}}{۲(-۶)}=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۱۴۴-۹۶}}{-۱۲}=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۴۸}}{-۱۲}$$

$$=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۳}}{-۱۲}=\frac{-۱۲\pm۴\sqrt{۳}}{-۱۲}=\frac{۳\mp\sqrt{۳}}{۳}$$

هردو جواب معادله قابل قبول هستند.

$$t \cong ۰/۴۲ \text{ یا } t \cong ۱/۵۸$$

۵ـ۲ـ حل معادلات رادیکالی

برای حل معادلات رادیکالی، دو طرف معادله را به توان فرجهٔ رادیکال می‌رسانیم. ممکن است که معادلهٔ نتیجه شده، درجهٔ دوم باشد که در آن صورت، با یکی از ۴ روش موجود آن‌ها را حل می‌کنیم.

مثال

معادله $\sqrt{x+۱} = x-۲$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{x+۱})^۲ = (x-۲)^۲$$

دوجمله‌ای را به توان می‌رسانیم

$$x+۱ = x^۲ - ۴x + ۴$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$$

حال با استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، x را به‌دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۵ \pm \sqrt{(-۵)^۲ - ۴(۱)(۳)}}{۲(۱)} = \frac{۵ \pm \sqrt{۱۳}}{۲} = \begin{cases} \dfrac{۵+\sqrt{۱۳}}{۲} \cong ۴/۳۰ \\ \dfrac{۵-\sqrt{۱۳}}{۲} \cong ۰/۷۰ \end{cases}$$

با قراردادن این دو جوابِ ممکن در معادله، می‌بینیم که ۰/۷۰ یک جواب غیرقابل قبول است (چرا؟) پس تنها جواب معادله، $\frac{۵+\sqrt{۱۳}}{۲}$ یا تقریباً ۴/۳۰ است.

تذکّر: بهتر است قبل از حل معادلات رادیکالی، ابتدا دامنهٔ جواب را پیدا کنیم و سپس معادله‌ها را حل کنیم. در مثال بالا، مقدار زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد یعنی

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

چون طرف چپ معادله بزرگتر یا مساوی صفر است (نامنفی است)، طرف راست معادله نیز باید نامنفی باشد یعنی

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

با توجه به دو شرطِ $x \geq -1$ و $x \geq 2$ ، نتیجه می‌شود که $x \geq 2$ قابل قبول است.

توجه: اگر معادله‌ای را بتوان به شکل $au^2+bu+c=0$ نوشت که در آن، u یک عبارت جبری باشد، می‌گوییم معادله به شکل درجهٔ دوم است. برای حل چنین معادله‌ای، جایگزینی انتخاب می‌کنیم تامعادله را بر حسب u بنویسیم. سپس از روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده می‌کنیم.

مثال

معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $x^4-6x^2+8=0$

ب) $16(z-1)^2-8(z-1)-2=0$

حل:

الف) اولین جمله یعنی x^4 ، مربع x^2 در جملهٔ دوم است.

$$x^4-6x^2+8=0$$

x^4 را بر حسب x^2 می‌نویسیم

$$(x^2)^2-6x^2+8=0$$

x^2 را مساوی u قرار می‌دهیم

$$x^2=u \Rightarrow (x^2)^2=u^2$$

سه‌جمله‌ای را بر حسب u می‌نویسیم

$$u^2-6u+8=0$$

سه‌جمله‌ای را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم

$$(u-2)(u-4)=0$$

با استفاده از خاصیت فاکتور صفر معادله را حل می‌کنیم

$u-2=0$ یا $u-4=0$

$u=2$ یا $u=4$

به جای u، معادل آن $x^۲$ را قرار می‌دهیم

$$x^۲=۲ \text{ یا } x^۲=۴$$

از خاصیت ریشهٔ زوج استفاده می‌کنیم

$$x=\pm\sqrt{۲}\cong\pm\ ۱/۴۱ \text{ یا } x=\pm۲$$

معادله دارای چهار جواب $\pm\sqrt{۲}$ و ±۲ است.

ب) $۱۶(z-۱)^۲-۸(z-۱)-۲=۰$

u را $z-۱$ انتخاب کنید پس : $u^۲=(z-۱)^۲$ و

$$۱۶u^۲-۸u-۲=۰$$

از حل فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم برای به دست‌آوردن u استفاده کنید :

$$u=\frac{۸\pm\sqrt{(-۸)^۲-۴(۱۶)(-۲)}}{۲(۱۶)}=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴+۱۲۸}}{۳۲}=\frac{۸\pm\sqrt{۱۹۲}}{۳۲}$$

$$=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴}\times\sqrt{۳}}{۳۲}=\frac{۸\pm۸\sqrt{۳}}{۳۲}=\frac{۸(۱\pm\sqrt{۳})}{۳۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۳}}{۴}$$

$$u\cong۰/۶۸ \text{ یا } u\cong-\ ۰/۱۸$$

برای محاسبهٔ z، مقدار u را در $u=z-۱$ قرار می‌دهیم :

$$z-۱\cong۰/۶۸\Rightarrow z\cong۱/۶۸$$

یا

$$z-۱\cong-\ ۰/۱۸\Rightarrow z\cong۰/۸۲$$

فعالیت ۱ــ۲

الف) معادلهٔ $\frac{۱}{(x-۲)^۲}+\frac{۲}{x-۲}-۳=۰$ را در نظر بگیرید.

۱ــ آیا این معادلهٔ درجهٔ دوم است؟

۲ــ اگر معادله درجهٔ دوم باشد، آیا جایگزینی $u=x-۲$ را انتخاب می‌کنید یا $u=\frac{۱}{x-۲}$؟

۳ــ آیا هر دو جایگزینی جواب یکسانی برای u و x به‌دست می‌دهد؟

ب)

۱ـ معادلهٔ $\frac{۵-۴x}{x-۱} - \frac{۱}{x-۱} + x = ۰$ را در نظر بگیرید ؛ نشان دهید که نتیجهٔ کسرهای ساده شده ؛ معادلهٔ $x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$ است که دارای دو جواب است. آن‌گاه نشان دهید که اگر اول جمع و تفریق را انجام دهیم و بعد نتیجه را ساده کنیم، یک معادلهٔ درجهٔ یک با یک جواب به‌دست می‌آوریم. علّت این اختلاف را توضیح دهید.

۲ـ به جز پیدا کردن اشتباهات جبری، چرا امتحان‌کردن جواب معادله‌های با عبارت‌های گویا، اساسی است؟ بحث کنید.

مسایل

۱ـ معادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $\frac{۳}{x} = ۲ + \frac{۴}{x^۲}$

ب) $\frac{y}{y+۱} = \frac{y+۱}{۳}$

پ) $\frac{t-۳}{t} = \frac{۲}{t-۳}$

ت) $x+۱ = \frac{۲}{۲x+۳}$

ث) $\frac{x}{x-۳} - \frac{۱}{۲x-۱} = \frac{۵x}{۲x^۲-۷x+۳}$

۲ـ معادلهٔ $\sqrt{x^۲-۵} + ۲\sqrt{x} = ۰$ را حل کنید. سپس در مورد قابل قبول بودن ریشه‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

۳ـ به جز پیدا کردن اشتباهات جبری، چرا امتحان‌کردن جواب‌های معادلاتی با عبارت‌های رادیکالی اساسی است؟

۴ـ معادلات رادیکالی زیر را حل کنید :

الف) $۵ = ۳\sqrt{x} + \frac{۲}{\sqrt{x}}$

ت) $\sqrt{x} \times \sqrt{x+۳} = ۱$

ب) $\sqrt{x+۱} - \frac{۲}{\sqrt{x+۱}} = ۱$

ث) $۲y+۱ = \sqrt{۱۱y-۱}$

پ) $\sqrt{۳x+۴} = \sqrt{x-۲} - ۳$

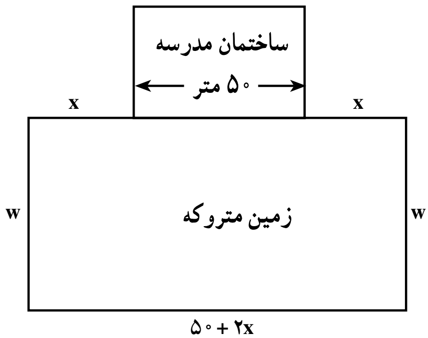
ج) $\sqrt{۲x} \times \sqrt{x-۳} = ۶$

۶ــ۲ــ کاربردهای معادلهٔ درجهٔ دوم

یکی از کاربردهای مهمّ معادلهٔ درجهٔ دوم، مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی توسط آن است. مسألهٔ زیر نمونه‌ای از یک پدیدهٔ واقعی است که به وسیلهٔ یک معادلهٔ درجهٔ دوم، مدل‌سازی شده است.

مثال

محاسبهٔ مساحت زمین بازی



پس از تلاش‌های فراوان، مدیر یک دبیرستان موفّق شد قطعه زمین مستطیل شکلی را به مساحت ۲۸۰۰ مترمربع که پشت ساختمان مدرسه به‌صورت مخروبه درآمده بود، خریداری کند و دور آن را نرده بکشد. برای این کار ۱۷۰ متر نرده لازم است. طرز قرارگرفتن زمین مخروبه و ساختمان مدرسه به شکل مقابل است :

ابعاد (طول و عرض) زمین را به دست آورید.

حل: با توجّه به شکل، طول زمین مستطیل شکل که با L نشان می‌دهیم، برابر با $۵۰+۲x$ می‌شود. عرض زمین بازی را w در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که در قسمت پشت ساختمان نیازی به‌نرده نیست.

پس کل نردهٔ استفاده شده عبارت خواهد بود از :

$$x+w+(۵۰+۲x)+w+x=۱۷۰$$

عبارت را ساده می‌کنیم $\quad ۲w+۴x+۵۰=۱۷۰$

عبارت را برای w حل می‌کنیم $\quad ۲w=۱۲۰-۴x$

$$w=۶۰-۲x$$

مساحت مستطیل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$A=L.w$$

مقادیر A[1]، L[2] و w[3] را جایگزین می‌کنیم :

۱ــ A اوّل کلمهٔ Area به‌معنی مساحت است.

۲ــ L اوّل کلمهٔ Length به معنی طول است.

۳ــ W اوّل کلمهٔ Width به‌معنی عرض است.

$$2800 = (50 + 2x)(60 - 2x)$$

$$2800 = 3000 + 20x - 4x^2$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$4x^2 - 20x - 200 = 0$$

دو طرف معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم

$$x^2 - 5x - 50 = 0$$

سه‌جمله‌ای را تجزیه می‌کنیم

$$(x - 10)(x + 5) = 0$$

از خاصیت فاکتور صفر استفاده می‌کنیم

$x - 10 = 0$ یا $x + 5 = 0$

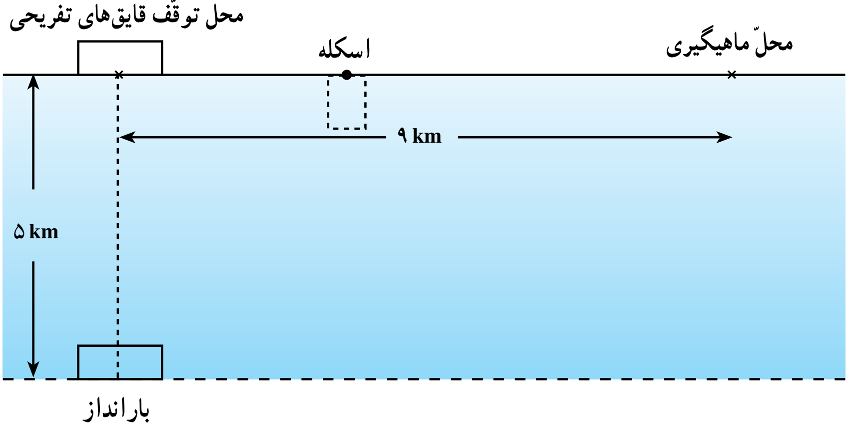
$x = 10$ یا $x = -5$

چون فاصله نمی‌تواند منفی باشد پس $x = 10$ قابل قبول است درنتیجه :

$L = 50 + (2 \times 10) = 70$ متر

$W = 60 - (2 \times 10) = 40$ متر

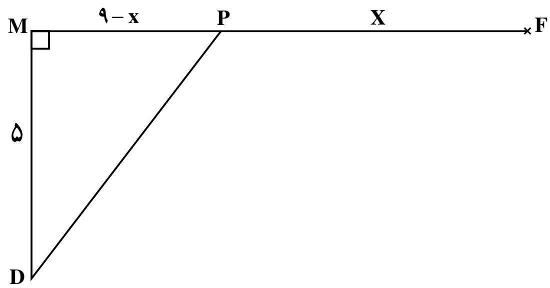
مثال: یک دریاچهٔ تفریحی را با موقعیّت زیر، در نظر بگیرید :



یک ماهیگیر با قایق و با سرعت ۸ کیلومتر در ساعت، از بارانداز به‌سمت اسکله حرکت کرد. سپس پیاده و با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت، از اسکله به سمت محلّ ماهیگیری حرکت کرد. اگر فاصلهٔ محلّ توقّف قایق‌های تفریحی تا محلّ ماهیگیری ۹ کیلومتر باشد و زمان رفتن از بارانداز تا محل ماهیگیری، ۱/۵ ساعت طول کشیده باشد، ماهیگیر چند کیلومتر پیاده‌روی کرده است؟

صید با تور دستی (سالیه) و قایق گُردِنه (قایقی از شاخ و برگ نخل). بندر زیارت

حل: در شکل زیر، مکان ها را با حروف مشخّص کرده‌ایم.



D:[1] بارانداز

M:[2] محل توقّف‌گاه قایق‌های تفریحی

P:[3] اسکله

F:[4] محلّ ماهیگیری

فاصله‌ای را که ماهیگیر از اسکله تا محل ماهیگیری (یعنی از P تا F) طی می‌کند، با x نشان می‌دهیم. چون فاصلهٔ از M تا F ۹ کیلومتر است، درنتیجهٔ فاصلهٔ M تا P برابر $۹-x$ می‌شود. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ DMP ، فاصلهٔ بارانداز تا اسکله (DP) یعنی مسافتی را که قایق طی کرده است، به‌دست می‌آوریم :

$$(DP)^۲ = (DM)^۲ + (MP)^۲$$

$$(DP)^۲ = (۵)^۲ + (۹-x)^۲ = ۲۵ + (۹-x)^۲$$

$$DP = \sqrt{۲۵ + (۹-x)^۲}$$

مدت‌زمانی که ماهیگیر طی می‌کند تا از بارانداز به محل ماهیگیری برسد مشخص است. یعنی :

(۱) ساعت ۱/۵ = مدّت زمان پیاده‌روی + مدّت زمان طی‌شده با قایق

برای یافتن این مدّت زمان‌ها از فرمول سرعت استفاده می‌کنیم :

$$\text{سرعت} = \frac{\text{فاصله}}{\text{زمان}} \Rightarrow \text{زمان} = \frac{\text{فاصله}}{\text{سرعت}}$$

و با استفاده از جدول (۲)، این زمان‌ها را پیدا می‌کنیم.

۱ــ D اوّل کلمهٔ Dock به معنی بارانداز است.

۲ــ M اوّل کلمهٔ Marina به معنی محلّ توقف‌گاه قایق‌های تفریحی است.

۳ــ P اوّل کلمهٔ Pier به معنی اسکله است.

۴ــ F اوّل کلمهٔ Fishing spot به معنی محلّ ماهیگیری است.

جدول ۲

	فاصله به کیلومتر	سرعت ($\frac{\text{کیلومتر}}{\text{ساعت}}$)	زمان (ساعت)
قایق	$\sqrt{۲۵+(۹-x)^۲}$ (از باراندازتا اسکله)	۸	$\frac{\sqrt{۲۵+(۹-x)^۲}}{۸}$
پیاده	x (از اسکله تا محل ماهیگیری)	۶	$\frac{x}{۶}$

این زمان‌ها را در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم :

$$\frac{\sqrt{۲۵+(۹-x)^۲}}{۸}+\frac{x}{۶}=۱/۵$$

زمان کل سفر (با قایق و پیاده) ۱/۵ ساعت است.

کسرها را با ضرب‌کردن دو طرف در ک، م، م مخرج که ۲۴ است، ساده می‌کنیم.

$$\frac{۲۴}{۱}.\frac{\sqrt{۲۵+(۹-x)^۲}}{۸}+\frac{۲۴}{۱}.\frac{x}{۶}=۲۴\times ۱/۵$$

ساده می‌کنیم $\qquad ۳\sqrt{۲۵+(۹-x)^۲}+۴x=۳۶$

رادیکال را در یک طرف نگه می‌داریم

$$۳\sqrt{۲۵+(۹-x)^۲}=۳۶-۴x$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\left[۳\sqrt{۲۵+(۹-x)^۲}\right]^۲=(۳۶-۴x)^۲$$

از خاصیت $(ab)^۲=a^۲b^۲$ برای سمت چپ، استفاده می‌کنیم.

$$۹\left[۲۵+(۹-x)^۲\right]=(۳۶-۴x)^۲$$

با استفاده از اتّحاد مربع تفاضل دو جمله، دو طرف را به توان می رسانیم.

$$۹\left[۲۵+۸۱-۱۸x+x^۲\right]=۱۲۹۶-۲۸۸x+۱۶x^۲$$

۹ را در پرانتز ضرب می‌کنیم

$$۲۲۵+۷۲۹-۱۶۲x+۹x^۲=۱۲۹۶-۲۸۸x+۱۶x^۲$$

معادله را ساده کرده و به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$-۷x^۲+۱۲۶x-۳۴۲=۰$$

دو طرف را در (-۱) ضرب می‌کنیم

$$۷x^۲-۱۲۶x+۳۴۲=۰$$

از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده می‌کنیم.

$$x=\frac{۱۲۶\pm\sqrt{(۱۲۶)^۲-۴\times۷\times۳۴۲}}{۲\times۷}$$

$$=\frac{۱۲۶\pm\sqrt{۱۵۸۷۶-۹۵۷۶}}{۱۴}$$

$$=\frac{۱۲۶\pm\sqrt{۶۳۰۰}}{۱۴}$$

چون $\sqrt{۶۳۰۰}$، مربع کامل نیست، مقدار تقریبی آن را می‌نویسیم،

$$\cong\frac{۱۲۶\pm۷۹/۳۷}{۱۴}$$

بنابر این

$$x\cong\frac{۱۲۶-۷۹/۳۷}{۱۴}\cong۳/۳۳ \quad \text{یا} \quad x\cong\frac{۱۲۶+۷۹/۳۷}{۱۴}\cong۱۴/۶۷$$

هر دو جواب x را امتحان می‌کنیم[۱]:

اگر $x=۱۴/۶۷$ آنگاه $۹-x=۹-۱۴/۶۷=-۵/۶۷$ که قابل قبول نیست، زیرا فاصله نمی‌تواند منفی باشد.

اگر $x=۳/۳۳$، آنگاه $۹-x=۹-۳/۳۳=۵/۶۷$ که قابل قبول است.

پس ماهیگیر، ۳/۳۳ کیلومتر، پیاده‌روی کرده است.

نسبت و تناسب

از نظر ریاضیدان‌های یونان قدیم، زیباترین مستطیل‌ها، آن‌هایی بودند که اندازهٔ طول و عرض آنها، متناسب با $\frac{L}{W+L}=\frac{W}{L}$ بود. این نسبت، به **نسبت طلایی**[۲] معروف است.

۱ــ امتحان کردن جواب های به‌دست‌آمده در مسأله‌های کاربردی و دنیای واقعی، یک ضرورت است.

۲ــ Golden Ratio

مثال

یک زمین ورزش مستطیل شکل. به‌گونه‌ای ساخته شده است که اندازهٔ طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی است. محیط این زمین ۲۰۰۰ متر است. طول و عرض آن چقدر است؟

حل: L را برابر طول مستطیل، W را برابر عرض آن و P[1] را محیط آن که مساوی ۲۰۰۰ متر است در نظر می‌گیریم :

$$۲L+۲W=P$$

$$۲L+۲W=۲۰۰۰$$

$$L+W=۱۰۰۰$$

$$W=۱۰۰۰-L$$

W را با $L-۱۰۰۰$ در فرمول نسبت طلایی جایگزین می‌کنیم :

$$\frac{W}{L}=\frac{L}{W+L}$$

$$\frac{۱۰۰۰-L}{L}=\frac{L}{۱۰۰۰}$$

دو طرف را در $۱۰۰۰L$ که همان ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) مخرج‌هاست ضرب می‌کنیم :

$$\frac{۱۰۰۰L}{۱}\times\frac{۱۰۰۰-L}{L}=\frac{L}{۱۰۰۰}\times\frac{۱۰۰۰L}{۱}$$

تساوی را ساده می‌کنیم

$$۱۰۰۰۰۰۰-۱۰۰۰L=L^۲$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$L^۲+۱۰۰۰L-۱۰۰۰۰۰۰=۰$$

با استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، مقدار L را پیدا می‌کنیم :

$$L=\frac{-۱۰۰۰\pm\sqrt{(۱۰۰۰)^۲-۴(-۱۰۰۰۰۰۰)}}{۲}=\frac{-۱۰۰۰\pm\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰+۴۰۰۰۰۰۰}}{۲}$$

$$=\frac{-۱۰۰۰\pm\sqrt{۵\times۱۰^۶}}{۲}=\frac{-۱۰۰۰\pm۱۰۰۰\sqrt{۵}}{۲}=-۵۰۰\pm۵۰۰\sqrt{۵}$$

۱ــ Premeter

چون طول مثبت است پس

$$L = ۵۰۰\sqrt{۵} - ۵۰۰ = ۵۰۰(\sqrt{۵} - ۱)$$

قابل قبول است.

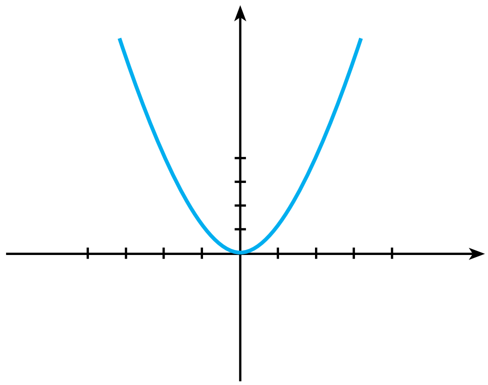
نکتهٔ خواندنی

اگر از یک مستطیل طلایی، یک مربع جدا شود، مستطیل باقی‌مانده نیز، یک مستطیل طلایی است.

۷ــ۲ــ رسم نمودارهای تابع درجهٔ دوم

برای رسم نمودار $y = f(x)$ ، نقاط (x,y) را که مختصات آنها در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند، در صفحهٔ مختصات تعیین می‌کنیم. به‌طور مثال، برای رسم ساده ترین معادلهٔ درجهٔ دوم یعنی $y = x^۲$ ، می‌توانیم با جدول مقادیر تابع شروع کنیم. سپس با استفاده از نقاط به‌دست‌آمده و تعیین آن‌ها در صفحه مختصات، نمودار $y = x^۲$ را رسم می‌کنیم.

x	...	۳−	۲−	۱−	۰	۱	۲	۳	...
$x^۲$	...	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹	...



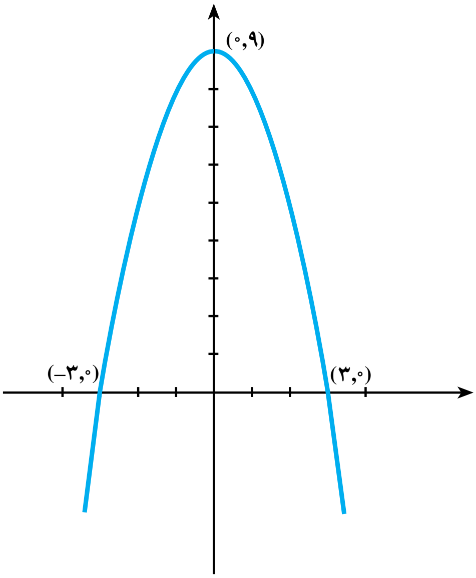
مثال

نمودار $f(x) = ۹ - x^۲$ را رسم کنید.

حل: جدول مقادیر تابع $f(x)=۹-x^{۲}$ را تشکیل می‌دهیم :

x	…	-۴	-۳	-۱	۰	۱	۳	۴	…
$۹-x^{۲}$	…	-۷	۰	۸	۹	۸	۰	-۷	…

سپس با تعیین نقاط به‌دست‌آمده در صفحهٔ مختصات و اتّصال آن‌ها به یکدیگر، نمودار زیر به‌دست می‌آید.



نمودار تابع درجهٔ دوم، **سهمی** نامیده می‌شود.

سهمی $y=x^{۲}$ به سمت بالا باز شده است. در این حالت، سهمی دارای کمترین مقدار است.

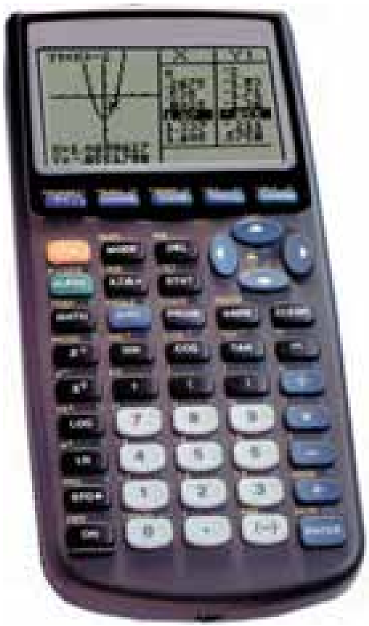
$y=۹-x^{۲}$ سهمی **وارونه** شده است. (به سمت پایین باز شده است) و دارای بیشترین مقدار است.

نقطه‌ای که در آن، سهمی دارای **بیشترین** یا **کمترین** مقدار است **رأس** سهمی نامیده می‌شود. سهمی‌های شکل‌های بالا نسبت به خط عمودی که از رأس می‌گذرد متقارن هستند. این **خط محور تقارن** نامیده می‌شود. اگر نمودارها را روی این محور تا کنیم، دو طرف سهمی بر هم منطبق می‌شوند.

انواع نمودار $y=x^{۲}$

اغلب نمودارهای تابع درجهٔ دوم را می‌توان با مقایسهٔ آن‌ها با تابع $y=x^{۲}$ رسم کرد. (به زنگ تفریح ریاضی پایان فصل اول توجه کنید.)

فعالیت ۲ـ۲



اگر ماشین‌حساب گرافیکی در اختیار دارید، این فعالیت را با استفاده از آن انجام دهید. در غیر این صورت با استفاده از جدول مقادیر، نمودارهای خواسته شده را با توجه به نمودار $y=x^2$ و $y=-x^2$ رسم کنید.

الف)

۱ـ نمودار تابع‌های $y=2x^2$ و $y=-2x^2$ را رسم کنید.

۲ـ نمودار تابع‌های $y=3x^2$ و $y=-3x^2$ را رسم کنید.

۳ـ نمودار تابع‌های $y=5x^2$ و $y=-5x^2$ را رسم کنید.

۴ـ در حالت کلّی، نمودار تابع $y=ax^2$ را که a عدد صحیح باشد، رسم کنید.

۵ـ فرق این نمودارها با نمودارهای $y=x^2$ و $y=-x^2$ چیست؟

۶ـ اگر ضریب x^2 را یک عدد خیلی بزرگ انتخاب کنیم، چه اتّفاقی می‌افتد؟

۷ـ اگر ضریب x^2 را یک عدد خیلی کوچک انتخاب کنیم، چه اتّفاقی می‌افتد؟

ب)

۱ـ نمودار تابع‌های $y=\frac{1}{2}x^2$ و $y=-\frac{1}{2}x^2$ را رسم کنید.

۲ـ نمودار تابع‌های $y=\frac{1}{3}x^2$ و $y=-\frac{1}{3}x^2$ را رسم کنید.

۳ـ نمودار تابع‌های $y=\frac{1}{5}x^2$ و $y=-\frac{1}{5}x^2$ را رسم کنید.

۴ـ فرق این نمودارها، با نمودارهای $y=x^2$ و $y=-x^2$ چیست؟

۵ـ اگر در $y=\frac{1}{a}x^2$ (a عدد طبیعی است) a بزرگ و بزرگ‌تر شود، چه اتفاقی می‌افتد؟

۶ــ اگر در $y=-\frac{1}{a}x^2$ ‏(a عدد طبیعی است)، a بزرگ و بزرگتر شود چه اتفاقی می‌افتد؟

با توجّه به نتایجی که به دست آورده‌اید، یک قانون کلی برای رسم نمودارهای $y=ax^2$ و $y=\frac{1}{a}x^2$ ‏(a عدد صحیح و غیر صفر) پیدا کنید.

حال با توجه به قانون به‌دست آمده و بدون تشکیل جدول مقادیر، سهمی‌های ax^2 و $\frac{1}{a}x^2$ را در مقایسه با x^2 رسم کنید.

با توجّه به نتایج به‌دست‌آمده، جاهای خالی زیر را پُر کنید :

◆ اگر $|a|$ افزایش یابد، سهمی ... و ... می‌شود.

◆ اگر $\left|\frac{1}{a}\right|$ کاهش یابد، سهمی ... و ... می‌شود.

می‌بینیم که مقدار a، باعث **باز** و **بسته‌شدن سهمی** می‌شود و علامت a، **جهت** سهمی را مشخص می‌کند (رو به بالا یا رو به پایین بودن سهمی).

توجّه: رأس تمام سهمی‌های $y=ax^2$ ، مبدأ مختصات است.

فعالیت ۳ــ۲

الف)

۱ــ نمودار $f(x)=x^2$ را رسم کنید.

۲ــ نمودار $f(x)=x^2+1$ را رسم کنید.

۳ــ نمودار $f(x)=x^2-1$ را رسم کنید.

۴ــ نمودار $f(x)=x^2+5$ را رسم کنید.

۵ــ نمودار $f(x)=x^2-4$ را رسم کنید.

۶ــ نمودار $f(x)=x^2-8$ را رسم کنید.

ب)

۱ــ این نمودارها با نمودار $f(x)=x^2$ چه فرقی دارند؟

۲ــ نمودار $f(x)=x^2+a$ چه فرقی با نمودار $f(x)=x^2$ دارد؟ (در حالتی که

$a>0$ یا $a<0$ باشد).

۳ــ یک قاعدهٔ کلی برای رسم نمودارهای $f(x)=x^{2}+a$ در مقایسه با $f(x)=x^{2}$ به‌دست آورید. (بدون آن‌که به تشکیل جدول مقادیر نیاز داشته باشیم).

فعالیت ۴ــ۲

الف)

۱ــ نمودار $f(x)=x^{2}$ را رسم کنید.

۲ــ نمودار $f(x)=(x+2)^{2}$ را رسم کنید و فرق آن را با نمودار $f(x)=x^{2}$ بیان نمایید.

۳ــ نمودار $f(x)=(x-2)^{2}$ را رسم کنید و فرق آن را با نمودار $f(x)=x^{2}$ بیان نمایید.

۴ــ نمودار $f(x)=(x+6)^{2}$ را رسم کنید و فرق آن را با نمودار $f(x)=x^{2}$ بیان کنید.

۵ــ نمودار $f(x)=(x-6)^{2}$ را رسم کنید و فرق آن‌را با نمودار $f(x)=x^{2}$ بیان نمایید.

ب)

۱ــ نمودار $f(x)=(x+a)^{2}$ $(a<0\ ,\ a>0)$ چه فرقی با نمودار $f(x)=x^{2}$ دارد؟

۲ــ یک قاعدهٔ کلی برای رسم نمودارهای $f(x)=(x+a)^{2}$ در مقایسه با نمودار $f(x)=x^{2}$ پیدا کنید. $(a<0\ ,\ a>0)$

نتیجه

رأس نمودار تابع‌های $f(x)=x^{2}+a$ در مقایسه با $f(x)=x^{2}$ به‌اندازهٔ a واحد روی محور yها انتقال می‌یابد (اگر $a>0$ باشد به سمت بالا و اگر $a<0$ باشد به‌اندازهٔ $|a|$ واحد به‌سمت پایین می‌رود) رأس سهمی نیز به اندازهٔ a واحد بالا یا پایین مبدأ مختصات قرار می‌گیرد. محور تقارن سهمی همان محور yها است که نسبت به محور تقارن $f(x)=x^{2}$ ثابت می‌ماند.

رأس نمودار $f(x)=(x+a)^{2}$ به اندازهٔ a واحد از مبدأ مختصات روی محور xها انتقال

می‌یابد. (اگر $a>0$ ، سهمی به‌اندازهٔ a واحد به سمت چپ منتقل می‌شود و اگر $a<0$ ؛ سهمی به‌اندازهٔ $|a|$ واحد به سمت راست منتقل می شود.)

محور تقارن نمودار $f(x)=(x+a)^2$ نیز نسبت به نمودار $f(x)=x^2$ به اندازهٔ $|a|$ واحد به سمت چپ یا راست محور xها انتقال می‌یابد.

نتیجهٔ فعالیت‌های ۳ــ۲ و ۴ــ۲ را می‌توان در جدول زیر، خلاصه کرد.

جدول ۳

محور تقارن سهمی	رأس سهمی	سهمی
$x=0$	$(0,k)$	$f(x)=x^2+k$
$x=-a$	$(-a,0)$	$g(x)=(x+a)^2$

مثال

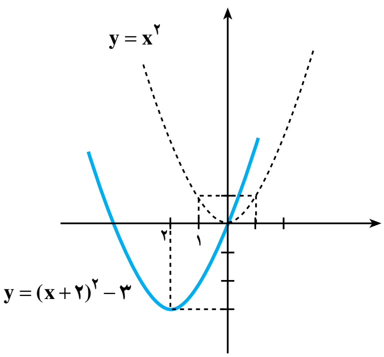
با استفاده از نمودار $y=x^2$ به عنوان راهنما، نمودار هریک از تابع‌های زیر را رسم کرده و رأس سهمی و محور تقارن هریک را تعیین کنید.

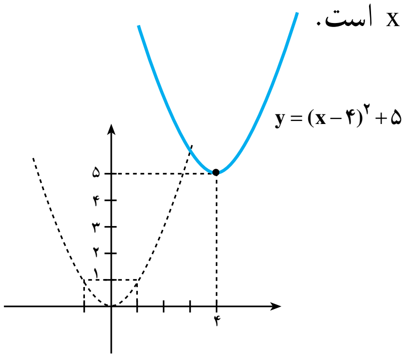
الف) $f(x)=(x+2)^2-3$ ب) $g(x)=(x-4)^2+5$

حل :

الف) نمودار $f(x)=(x+2)^2-3$ همان نمودار $y=x^2$ است که رأس آن ۲ واحد به‌سمت چپ و ۳ واحد به سمت پایین انتقال یافته است. مختصات رأس این نمودار $(-2,-3)$ است و محور تقارن آن خط $x=-2$ می‌باشد.

ب) نمودار $g(x)=(x-4)^2+5$ همان نمودار $y=x^2$ است که رأس آن ۴ واحد به سمت راست و ۵ واحد به سمت بالا انتقال یافته است. مختصات رأس این نمودار $(4,5)$ و محور تقارن، خط $x=4$ است.





نمودار تابع $f(x)=a(x-h)^2+k$ همان نمودار تابع $y=ax^2$ است که رأس آن به نقطهٔ (h,k) انتقال یافته است.

۱ـ۷ـ۲ـ رأس سهمی و نقاط تلاقی سهمی با محورهای مختصات

در رسم نمودار یک تابع درجه دوم، تعیین رأس سهمی مهم است. برای تعیین مختصات رأس، می‌توانیم از روش مربع کامل کردن برای نوشتن تابع به شکل $f(x)=a(x-h)^2+k$ استفاده کنیم.

تعیین رأس سهمی با مربع کامل‌کردن

مثال

رأس نمودار $f(x)=x^2-8x+10$ را تعیین کنید.

حل: با استفاده از روش مربع کامل‌کردن، تابع را به شکل $f(x)=(x-h)^2+k$ می‌نویسیم.

$$f(x)=x^2-8x+10$$

کم‌کردن ۱۰ از دو طرف $\qquad f(x)-10=x^2-8x$

اضافه‌کردن مجذور نصف ضریب x یعنی $(-\frac{8}{2})^2=16$ به دو طرف

$$f(x)-10+16=x^2-8x+16$$

طرف دوم مربع کامل است. آن را به‌صورت توانی می‌نویسیم $\qquad f(x)+6=(x-4)^2$

-6 را به دو طرف اضافه می‌کنیم: $\qquad f(x)=(x-4)^2-6$

در این صورت در تابع درجهٔ دوم $f(x)$، $h=4$ و $k=-6$ پس مختصات رأس سهمی برابر $(4,-6)$ است.

با این ترتیب برای به‌دست‌آوردن رأس سهمی، هر بار باید این فرایند را طی کرد. اگر همین روش را برای شکل عمومی توابع درجهٔ دوم یعنی: $f(x)=ax^2+bx+c$ به‌کار ببریم، آن‌گاه می‌توانیم فرمولی برای پیدا کردن مختصات رأس $V(h,k)$[1] پیدا کنیم.

۱ـV اوّل کلمهٔ Vertex به معنی رأس است.

برای پیداکردن مختصات رأس سهمی در حالت کلّی، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

الف) شکل عمومی تابع های درجهٔ دوم را می‌نویسیم : $f(x)=ax^{۲}+bx+c$

ب) c را از دو طرف کم می‌کنیم : $f(x)-c=ax^{۲}+bx$

پ) دو طرف را بر a تقسیم می‌کنیم : $\frac{f(x)-c}{a}=x^{۲}+\frac{b}{a}x$

ت) با استفاده از روش مربع کامل کردن، سمت راست را به‌صورت مربع یک دوجمله‌ای می‌نویسیم : $\frac{f(x)}{a}-\frac{c}{a}=x^{۲}+\frac{b}{a}x$

مجذور نصف ضریب x یعنی ؛ $(\frac{۱}{۲}\times\frac{b}{a})^{۲}=\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم.

$$\frac{f(x)}{a}-\frac{c}{a}+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}=x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$$

کسر را ساده می‌کنیم : $\frac{f(x)}{a}+\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}=(x+\frac{b}{۲a})^{۲}$

$\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}$ را از دو طرف کم می‌کنیم :

$$\frac{f(x)}{a}=(x+\frac{b}{۲a})^{۲}-\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}$$

دو طرف را در a ضرب می‌کنیم تا $f(x)$ به‌دست آید :

$$f(x)=a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}-\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a}$$

$$f(x)=a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}+\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$$

که در آن $h=\frac{-b}{۲a}$ و $k=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$ است.

پس مختصات رأس برابر است با :

$$V=(-\frac{b}{۲a},\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a})$$

فرمول مختصات رأس سهمی

مختصات رأس سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ برابر است با :

$$V=(-\frac{b}{۲a}\ ,\ \frac{۴ac-b^{۲}}{۴a})$$

توجّه: برای تعیین مختصات رأس سهمی، بعد از پیداکردن مختص اول از رابطهٔ $-\frac{b}{۲a}$، می‌توانید مختص دوم را از طریق $f(-\frac{b}{۲a})$ تعیین کنید.

محاسبهٔ رأس به‌صورت جبری

مثال

رأس نمودار $f(x)=۲x^{۲}+۱۲x+۱۷$ را تعیین کنید.

حل: مختص اوّل رأس برابر است با :

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۱۲}{۲(۲)}=-۳$$

و برای تعیین مختص دوم :

$$f(-۳)=۲(-۳)^{۲}+۱۲(-۳)+۱۷=-۱$$

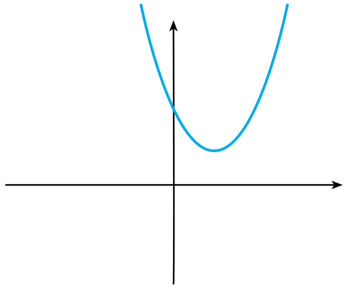
پس مختصات رأس برابر است با $V(-۳,-۱)$.

در حالت کلی، محل تقاطع نمودار با محور yها، نقطه‌ای است که مختص اوّل آن برابر صفر باشد. یعنی، برای یک تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ ، $f(۰)=c$ محل تقاطع نمودار تابع با محور yها است. پس یک سهمی همیشه محور yها را در نقطهٔ $(۰,c)$ قطع می‌کند.

برای تعیین محلّ تقاطع نمودار با محور xها معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ را حل می‌کنیم. می‌دانیم که این معادله، می‌تواند دارای یک یا دو جواب حقیقی باشد یا اصلاً، جواب حقیقی نداشته باشد. درنتیجه، ممکن است نمودار یک تابع درجه دو، محور xها را در یک یا دو نقطه قطع کند یا اصلاً محور xها را قطع نکند.

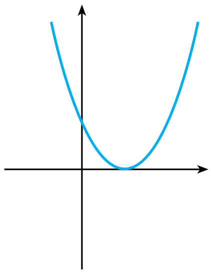
نتایج به‌دست‌آمده را می‌توان در نمودارهای صفحهٔ بعد خلاصه کرد :

$a > ۰$



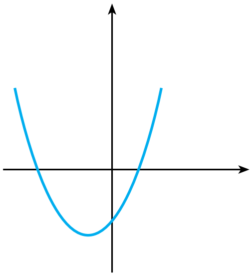
$b^{۲} - ۴ac < ۰$

سهمی محور xها را قطع نمی‌کند



$b^{۲} - ۴ac = ۰$

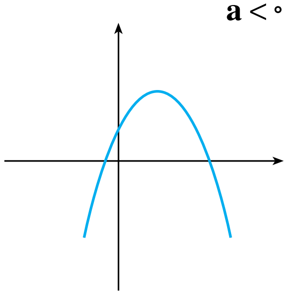
سهمی محور xها را در یک نقطه قطع می‌کند (بر آن مماس است)



$b^{۲} - ۴ac > ۰$

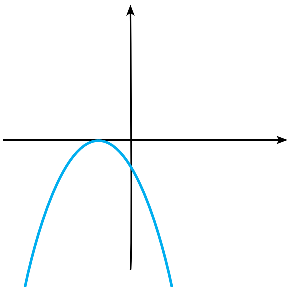
سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند

$a < ۰$



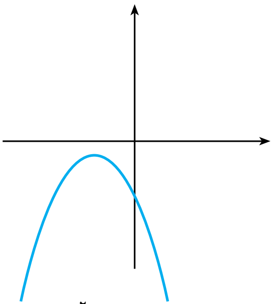
$b^{۲} - ۴ac > ۰$

سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند



$b^{۲} - ۴ac = ۰$

سهمی محور xها را در یک نقطه قطع می‌کند (بر آن مماس است)



$b^{۲} - ۴ac < ۰$

سهمی محور xها را قطع نمی‌کند

تذکّر: بهتر است برای رسم نمودار سهمی ابتدا مختصات رأس و محل‌های تقاطع با محور xها و محور yها را تعیین کنید.

روش رسم تابع درجهٔ دوم $f(x) = ax^{۲} + bx + c$

۱ــ محل تقاطع با محور yها $(۰,c)$ را تعیین کنید.

۲ــ محل تقاطع با محور xها را از طریق حل $ax^{۲} + bx + c = ۰$ تعیین کنید.

۳ــ با استفاده از روش مربع کامل کردن یا با استفاده از فرمول رأس، مختصات رأس را پیدا کنید.

۴ــ نقاط به‌دست‌آمده در سه مرحلهٔ بالا را روی صفحهٔ مختصات مشخص کنید.

۵ــ در صورت لزوم، دو نقطهٔ کمکی در دو طرف رأس سهمی مشخّص کرده و آن‌ها را در

صفحهٔ مختصات معین کنید. نقاط به‌دست‌آمده را به هم متصل کرده و ادامه دهید.

۶ــ اگر $a>0$ سهمی رو به بالا باز می‌شود و اگر $a<0$، سهمی به سمت پایین باز می‌شود.

مثال

با تعیین رأس و نقاط تلاقی سهمی با محورها، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=8-2x-x^2$

ب) $h(x)=x^2-4x+1$

پ) $g(x)=4x^2-12x+9$

ت) $s(x)=-2x^2+12x-19$

حل

الف) در تابع $f(x)=8-2x-x^2$، چون $a<0$ $(a=-1)$، پس سهمی به سمت پایین باز می‌شود. محل تقاطع با محور yها $(0,8)$ است. برای تعیین نقاط تقاطع با محور xها، معادله را نسبت به x حل می‌کنیم:

$$8-2x-x^2=0 \Rightarrow x^2+2x-8=0$$

$$(x+4)(x-2)=0 \Rightarrow x+4=0 \text{ یا } x-2=0$$

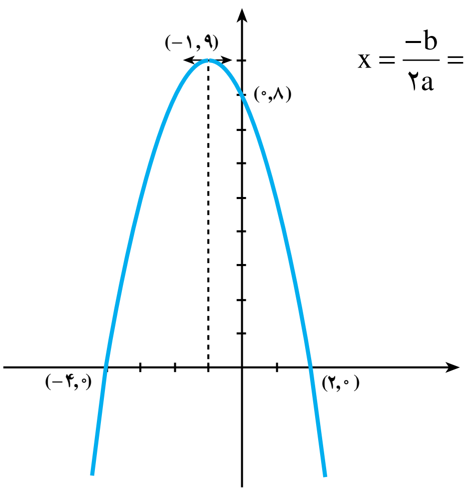
$$\Rightarrow x=-4 \text{ یا } x=2$$

پس نقاط تلاقی با محور xها $(2,0)$ و $(-4,0)$ هستند.

حال مختصات رأس را حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(-1)}=-1$$

چون $f(-1)=9$ پس مختصات رأس برابر است با $(-1,9)$. با قراردادن نقاط تلاقی و رأس روی صفحهٔ مختصات و با اطلاعات قبلی (از جمله اینکه سهمی رو به پایین باز می‌شود) نمودار را رسم می‌کنیم:



ب) چون در $h(x)=x^{۲}-۴x+۱$ ، a مثبت است، پس سهمی رو به بالا است. محل تلاقی با محور yها $(۰,۱)$ است. برای تعیین نقاط تلاقی با محور xها، معادله را نسبت به x، حل می‌کنیم :

$$x^{۲}-۴x+۱=۰$$

$$x=\frac{۴\pm\sqrt{(-۴)^{۲}-۴(۱)(۱)}}{۲(۱)}=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۴}}{۲}=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۴\pm۲\sqrt{۳}}{۲}$$

$$=۲\pm\sqrt{۳}$$

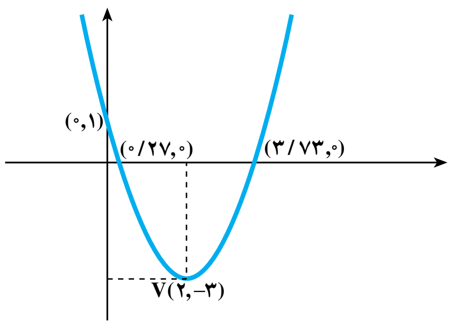
$x\cong۳/۷۳$ یا $x\cong۰/۲۷$

نقاط تلاقی تقریبی عبارتند از : $(۳/۷۳,۰)$ و $(۰/۲۷,۰)$. حال مختصات رأس را به‌دست می‌آوریم :

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲(۱)}=۲$$

$$h(۲)=-۳$$

پس مختصات رأس برابر است با $V(۲,-۳)$ ، با این اطلاعات سهمی را رسم می‌کنیم.



پ)

$$g(x)=۴x^{۲}-۱۲x+۹$$

چون a مثبت است $(a=۴)$ ، پس سهمی رو به بالاست. محل تلاقی با محور yها $(۰,۹)$ است. برای تعیین محل تلاقی با محور xها، معادله را حل می‌کنیم :

$$۴x^{۲}-۱۲x+۹=۰$$

$$(۲x-۳)^{۲}=۰$$

$$۲x-۳=۰$$

$$x=\frac{۳}{۲}$$

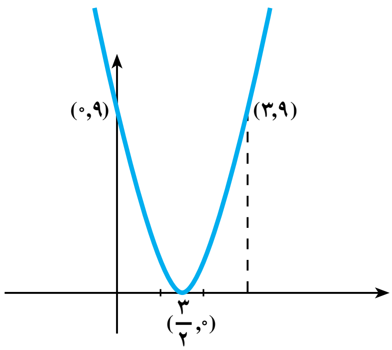
پس محل تلاقی با محور xها $(\frac{۳}{۲},۰)$ است. حال مختصات رأس را پیدا می‌کنیم :

$$x = \frac{-b}{۲a} = -\frac{-۱۲}{۲(۴)} = \frac{۳}{۲}$$

چون $g(\frac{۳}{۲}) = ۰$ است، پس مختصات رأس $(\frac{۳}{۲},۰)$ می‌باشد (توجه کنید که رأس و نقطهٔ تلاقی با محور xها، یک نقطهٔ مشترک است.)

چون تنها دو نقطه برای مشخص‌کردن در صفحهٔ مختصات پیدا کرده‌ایم، یک نقطهٔ دیگر نیز پیدا می‌کنیم تا نمودار بهتر رسم شود.

برای مثال، اگر $x = ۳$ ، آن‌گاه، $g(۳) = ۹$ پس نقطهٔ $(۳,۹)$ نیز روی نمودار تابع $g(x)$ قرار دارد.



ت) $$S(x) = -۲x^۲ + ۱۲x - ۱۹$$

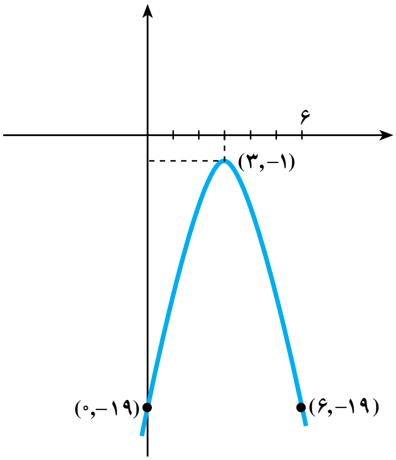
چون a منفی است $(a = -۲)$ ، پس سهمی رو به پایین باز می‌شود محل تلاقی با محور yها $(۰,-۱۹)$ است. تعداد نقاط تلاقی با محور xها را با محاسبهٔ مبیّن معادله پیدا می‌کنیم :

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۱۲)^۲ - ۴(-۲)(-۱۹) = ۱۴۴ - ۱۵۲ = -۸$$

چون مبیّن منفی است. پس نمودار با محور xها نقطهٔ تلاقی ندارد. حالا مختصات رأس را حساب می‌کنیم :

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۲}{۲(-۲)} = ۳$$

چون $S(۳) = -۱$ پس مختصات رأس سهمی برابر است با $(۳,-۱)$ از آنجا که تنها مختصات دو نقطه را داریم. بهتر است نقطهٔ دیگری پیدا کنیم. برای مثال، اگر $x = ۶$ ، آن‌گاه $S(۶) = -۱۹$. پس نقطهٔ $(۶,-۱۹)$ نیز روی نمودار تابع $S(x)$ قرار دارد.



مسایل

۱ــ وضعیّت نمودار تابع های زیر را در مقایسه با نمودار $f(x)=x^۲$ در صفحهٔ مختصات، توضیح دهید. (توصیه می‌شود که نمودار $y=f(x)=x^۲$ را با یک رنگ و نمودار جدید را با رنگ دیگر رسم کنید).

الف) $h(x)=x^۲-۴$ ت) $h(x)=(x-۳)^۲$

ب) $g(x)=x-۴$ ث) $g(x)=-\frac{۱}{۲}x-۲$

پ) $h(x)=-۲x^۲$ ج) $h(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۱)^۲-۲$

در تمرین‌های این قسمت، موارد زیر را برای هر تابع درجهٔ دوم، به‌دست آورید :

الف) نقاط تلاقی با محور xها و yها

ب) رأس و معادلهٔ محور تقارن

پ) رسم نمودار هر تابع