فصل اوّل

تابع

ظهر گرم تابستان را به یاد آورید! وقتی که دوست دارید بعد از ظهر چرتی بزنید وصدای جیرجیرک‌ها مانع می‌شوند! شاید فکر کنید چرا جیرجیرک‌ها در روزهای گرم تابستان،از همیشه پُر سر و صداتر هستند و بیشتر جیرجیر می‌کنند؟ اگر به ویژگی ظهر گرم تابستان ؛ که همان درجهٔ حرارت بالاست ؛ توجّه کنید، علّت را یافته‌اید.

همین‌طور است! تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها، با درجهٔ حرارت متناسب است. یعنی هر چه هوا گرم‌تر باشد، تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها نیز، بیشتر می‌شود.

دانشمندان علوم تجربی، بین تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها در هر دقیقه و درجهٔ حرارت به‌سانتیگراد، رابطهٔ زیر را پیدا کرده‌اند.

$$۳۲-(۷/۵ \text{ برابر درجهٔ حرارت به سانتیگراد }) = \text{ تعداد جیرجیرها در هر دقیقه}$$

اگر تعداد جیرجیرها در هر دقیقه را با n و درجهٔ حرارت به سانتیگراد را با C نشان دهیم، آنگاه این رابطهٔ تجربی[1] را می‌توانیم به‌صورت فرمول زیر بنویسیم :

$$n = ۷/۵C - ۳۲ \qquad (۱)$$

فعالیت ۱ــ۱

۱ــ در گرمای ۱۶ درجهٔ سانتیگراد، تعداد جیرجیرها در هر دقیقه چندتاست؟

۲ــ در گرمای ۱۰ درجهٔ سانتیگراد، تعداد جیرجیرها در هر دقیقه چندتاست؟

جدول ۱

درجهٔ حرارت به سانتیگراد	۴	۱۰	۱۵	۱۶	۱۸	۲۱	۲۷	۳۲
تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها در هر دقیقه			۸۰/۵					

۳ــ اعداد به‌دست‌آمده در بندهای ۱ و ۲ را در جدول فوق بنویسید و جدول را کامل کنید :

۴ــ در مورد تعداد جیرجیرها در چهار درجهٔ سانتیگراد چه می‌گویید؟

۵ــ در صفر درجهٔ سانتیگراد، آیا صدای جیرجیری از جیرجیرک‌ها شنیده می‌شود؟

درست حدس زدید! نطق جیرجیرک‌ها در سرما خاموش می‌شود!

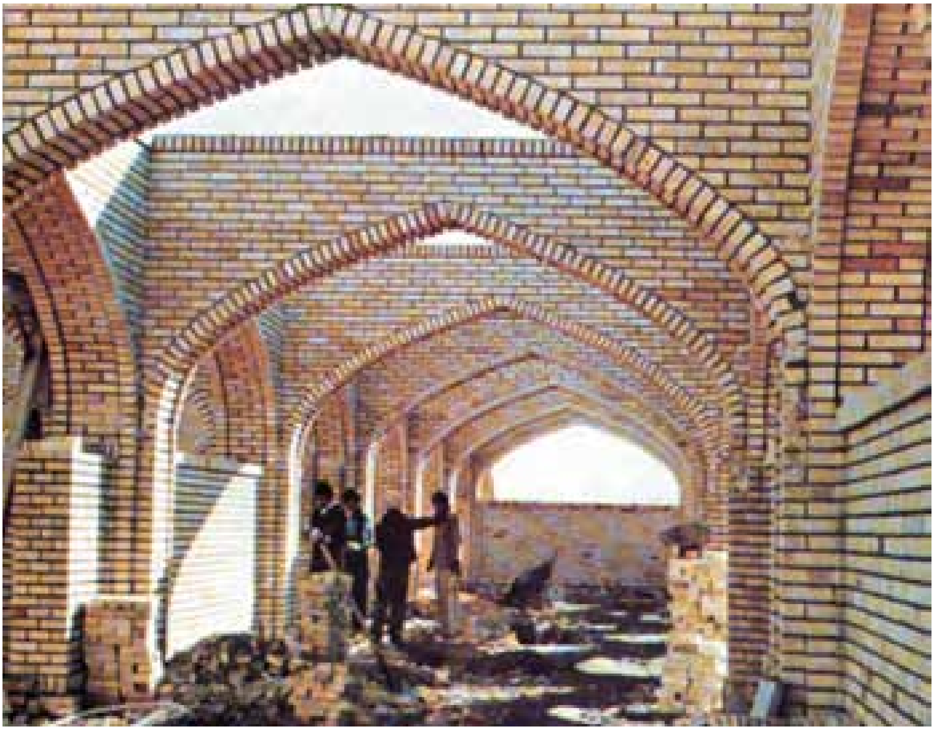
۶ــ به فرمول (۱) و جدول (۱) توجّه بیشتری کنید. آیا می‌توانید برای هر درجهٔ حرارت به سانتیگراد، تعداد جیرجیرهای متفاوتی پیدا کنید؟ دلیل خود را برای پاسخی که می‌دهید، بنویسید.

۱ــ توجّه کنید که این فرمول، حاصل مشاهدات متعدد،منظم‌کردن آن مشاهدات و پیداکردن الگویی در آنها بوده است که فرمول پیشنهادی نشان‌دهندهٔ آن الگوست.

پاسخ های خود را به خاطر بسپارید. این پاسخ یک نتیجهٔ مهمّ را معرفی می‌کند. دوباره به آن باز می‌گردیم.

فعالیت ۲ــ۱

یک بنّا و یک کارگر ساختمانی با هم در یک محلّ مشغول به کار هستند. کارگر ساختمانی روزی ۸ ساعت (با احتساب ساعت نماز وناهار) و بنّا، روزی ۶ساعت کار می‌کنند. دستمزد کارگر ساختمانی ساعتی ۵۰۰ تومان و دستمزد بنّا (به دلیل کار تخصّصی که می‌کند)، ساعتی ۱۲۵۰ تومان است. کارگر ساختمانی از ۸ صبح و بنا از ۱۰ صبح، مشغول به کار می‌شوند.



نمای داخلی کتابخانه تازه تأسیس هویزه

۱ــ جدول ۲ را کامل کنید :

جدول ۲

زمان	ساعت‌هایی که کارگر ساختمانی کار کرده	دستمزد کارگر ساختمانی به تومان	ساعت‌هایی که بنّا کار کرده	دستمزد بنّا به تومان
۸ صبح	ــ	ــ	ــ	ــ
۹ صبح	۱	۵۰۰	ــ	ــ
۱۰ صبح	۲	$۲ \times ۵۰۰ = ۱۰۰۰$	ــ	ــ
۱۱ صبح	۳	$۳ \times ۵۰۰ = ۱۵۰۰$	۱	۱۲۵۰
۱۲ ظهر				
۱ بعد از ظهر				
۲ بعد از ظهر				
۳ بعداز ظهر				
۴ بعد از ظهر				

۲ــ بعد از آن که کارگر ساختمانی، ۴ ساعت کارکرد، بنّا چند ساعت کار کرده است؟

۳ــ چگونه دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا را، از روی ساعت‌هایی که کار کرده‌اند، مشخّص می‌کنیم؟

۴ــ فرمولی پیدا کنید که با آن، دستمزد بنّا را از روی تعداد ساعت‌هایی که کارگر ساختمانی کار کرده است، تعیین کنیم.

۵ــ بعد از ۴ ساعت کارکردن کارگر ساختمانی، دستمزد او بیشتر است یا دستمزد بنّا؟ (یعنی در ساعت ۱۲ ظهر)

۶ــ بعد از ۸ ساعت کارکردن کارگر ساختمانی (در ساعت ۴ بعد از ظهر)، دستمزد او بیشتر است یا دستمزد بنّا؟ چرا؟

۷ــ آیا بعد از تعداد ساعت کار انجام شده، کارگر ساختمانی می‌تواند دو دستمزد متفاوت دریافت کند؟ چرا؟

۸ ــ آیا بعد ازتعداد ساعت کارانجام‌شده، بنّا می‌تواند دو دستمزد متفاوت دریافت کند ؟ چرا؟

پاسخ سؤال ۶ فعالیت ۱ــ۱ و پاسخ سؤال‌های ۷ و ۸ فعالیت ۲ــ۱ را با هم مقایسه کنید و نتیجه را با بیان خود، بنویسید.

همان‌طورکه خود نتیجه گرفتید، در هر درجهٔ حرارت، تعداد جیرجیرها مشخّص بود ؛ در مقابل تعداد ساعت کار انجام‌شده توسط کارگر ساختمانی نیز، دستمزد او مشخّص بود، هم‌چنان که در مقابل تعداد ساعت کار انجام شده توسط بنّا نیز، دستمزد او مشخّص بود.

هم‌چنین، تعداد جیرجیرها از درجهٔ حرارت **تبعیت** می‌کردند و دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا، از تعداد ساعت‌هایی که هریک کار کرده بودند، **تبعیت** می‌نمودند، در واقع، تعداد جیرجیرها **تابعی** از **درجهٔ حرارت** و دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا، **تابعی** از **ساعت‌های کاری** است.

بنابراین :

یک کمیّت مانند n (تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها)، تابعی از یک کمیّت دیگر مانند C (درجه حرارت برحسب سانتیگراد) است، اگر برای هر مقدار C، یک مقدار منحصربه‌فرد برای n نتیجه شود، این را به‌صورت $n=f(C)$ (بخوانید اِف ِ C[1]) نشان می‌دهیم.

در واقع :

اگر درجهٔ حرارت‌ها بر حسب سانتیگراد را مجموعهٔ A و تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها در هر دقیقه را مجموعهٔ B بنامیم، یک تابع f از A به B، قانونی است که به هر عضو C در مجموعهٔ A، دقیقاً یک عضو n از مجموعهٔ B را نسبت می‌دهد. مجموعهٔ A **دامنهٔ**[2] تابع f و مجموعهٔ B، **بُرد**[3] تابع f نامیده می‌شود.

پس در حالت کلّی، می‌توانیم تعریف زیر را برای تابع داشته باشیم :

تعریف

یک کمیّت مانند y، تابعی از یک کمیّت دیگر مانند x است، اگر برای هر مقدار x، یک و فقط یک مقدار برای y، نتیجه شود. این تابع را به‌صورت $y=f(x)$ نشان می‌دهیم.

می‌توانیم تابع را به‌صورت دیگری نیز تعریف کنیم.

۱ــ اِف (f) اوّل واژهٔ Function به‌معنی تابع است.

۲ــ Domain ۳ــ Range

تعریف

یک تابع f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، قانونی است که به هر عضو x در مجموعهٔ A، دقیقاً یک عنصر y از مجموعهٔ B را نسبت دهد. مجموعهٔ A **دامنهٔ** تابع f و مجموعهٔ B، **بُرد** تابع f نامیده می‌شود.

تمرین ۱

با توجّه به تعریف تابع، آیا جدول ۲ که دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا را برحسب تعداد ساعت‌هایی که هریک کار کرده‌اند، نشان می‌دهد ؛ یک تابع را نشان می‌دهند؟ چرا؟ توضیح دهید.

در فعالیت‌های ۱ــ۱ و ۲ــ۱ دیدید که با تغییر درجهٔ حرارت و تعداد ساعت ؛ تعداد جیرجیرها و مقدار دستمزدها، تغییر می‌کند. به کمیّتی که تغییر می‌کند، **متغیّر** گفته می‌شود.

تمرین ۲

در فعالیت‌های ۱ــ۱ و ۲ــ۱، **متغیّرها** را نام ببرید.

تمرین ۳

فرق بین متغیّرهای فعالیّت ۱ــ۱ چیست؟

تمرین ۴

متغیرهای فعالیت ۲ــ۱، چه فرقی با هم دارند؟

۱ــ۱ــ متغیر مستقل و متغیّر وابسته؛ دامنه و برد تابع

در فعالیت ۱ــ۱ تغییرات n یعنی تعداد جیرجیرها در هر دقیقه، وابسته به تغییرات درجهٔ

حرارت به سانتیگراد یعنی C است. پس C **متغیّر مستقل** و n، **متغیّر وابسته** است.

در فعالیت ۲ــ۱ نیز، تغییرات R یعنی دستمزد در هر ساعت، وابسته به تغییرات زمان، یعنی تعداد ساعت‌های کاری یا h است. پس h **متغیّر مستقل**، و R **متغیّر وابسته** است.

با این اطلاّعات، می‌توانیم **دامنه** و **بُرد** یک تابع را تعریف کنیم :

تعریف

دامنهٔ یک تابع، مجموعهٔ مقدارهایی است که یک **متغیّر مستقل** می‌تواند داشته باشد.

بُرد یک تابع، مجموعهٔ مقدارهایی است که یک **متغیّر وابسته** می‌تواند داشته باشد.

مثال

نمودار تابع $n = ۷/۵C - ۳۲$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخّص کنید.

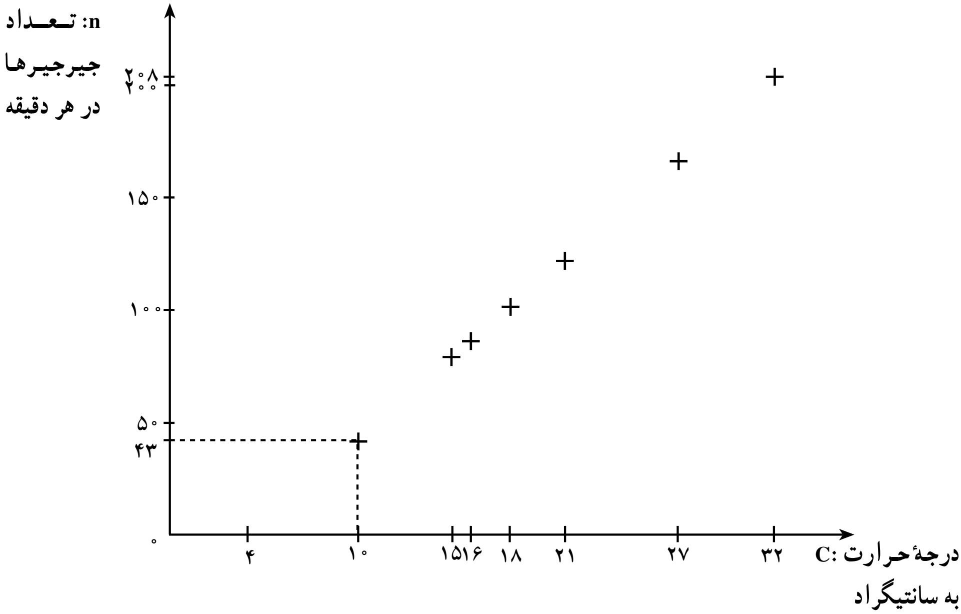
حل: جدول ۱ را که تکمیل کرده‌اید، دوباره می‌نویسیم :

جدول ۳

درجهٔ حرارت به سانتیگراد	۴	۱۰	۱۵	۱۶	۱۸	۲۱	۲۷	۳۲
تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها در هر دقیقه[1]	۰	۴۳	۸۱	۸۸	۱۰۳	۱۲۶	۱۷۱	۲۰۸

هر جفت از اعداد ردیف اول ودوم، یکی از نقاط نمودار این تابع است که آنها را در صفحهٔ مختصات مشخّص می‌کنیم و سپس، نمودار را رسم می‌کنیم.

۱ــ توجه داشته باشید که فرمول $n = ۷/۵C - ۳۲$ یک یافتهٔ تجربی و تقریبی است و چون نیم جیرجیر معنای واقعی ندارد، درنتیجه، وقتی که تعداد جیرجیرها عدد اعشاری می‌شود، آن عدد را گرد می‌کنیم و از اعشار آن، صرف نظر می‌نماییم.



اگر $n = ۷/۵C - ۳۲$ را فقط یک رابطهٔ ریاضی بین C و n در نظر بگیریم، هر مقدار حقیقی برای C، ممکن است وهمین‌طور، هر مقدار حقیقی برای n، ممکن می‌شود. امّا اگر به این معادله، به‌عنوان رابطهٔ بین تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها در هر دقیقه و درجهٔ حرارت برحسب سانتیگراد نگاه کنیم، درنتیجه، C نمی‌تواند کمتر از ۴ درجه باشد، زیرا همان‌طور که در فعالیت **۲ــ۱** دیدید، n زیر محور قرار می‌گیرد و منفی می‌شود ومنفی‌بودن **تعداد** جیرجیرها معنایی ندارد.

هم‌چنین، بالاترین درجهٔ حرارت ثبت‌شده توسط ادارهٔ هواشناسی، تقریباً $۵۸^{\circ}C$ است، پس این فرمول ؛ برای درجهٔ حرارت بیشتر از $۵۸^{\circ}C$، جواب نمی‌دهد. درنتیجه، برای تابع $n = ۷/۵C - ۳۲$،

دامنه تابع: تمام مقدارهای C بین $۴^{\circ}C$ و $۵۸^{\circ}C$

بُرد تابع: تمام مقدارهای n بین $(۳۲ - (۴ \times ۷/۵))$ و $۳۲ - ((۵۸ \times ۷/۵))$ یعنی تمام مقدارهای n بین ۰ و ۴۰۳

بنابراین، می‌توانیم بگوییم که

$$n = ۷/۵C - ۳۲$$

در دامنهٔ $۴ \leq C \leq ۵۸$، نشان داده می‌شود.

مثال

دامنهٔ $y=x^{۲}$ را تعیین کنید.

حل: در حالت کلّی، دامنهٔ این تابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی($\mathbb{R}$) است، با این حال، اگر از $y=x^{۲}$ ، برای نشان‌دادن مساحت مربعی با طول ضلع x استفاده شود ؛ آن‌گاه، فقط مقدارهای مثبت x را در نظر می‌گیریم (چرا؟) و دامنه را به اعداد مثبت محدود می‌کنیم.

مثال

دامنهٔ تابع‌های زیر را مشخص کنید :

الف) $y=x^{۳}+۱$

ب) $y=\frac{۱}{x+۲}$

پ) $y=\sqrt{۴-x}$

حل:

الف) دامنهٔ $y=x^{۳}+۱$ تمام اعداد حقیقی است زیرا دلیلی برای محدودکردن x در این تابع، وجود ندارد.

ب) دامنهٔ $f(x)=\frac{۱}{x+۲}$ تمام اعداد حقیقی به جز $x=-۲$ است. زیرا اگر $x=-۲$ باشد، آن‌گاه مخرج مساوی صفر شده و تقسیم عدد بر صفر بی‌معنی است، پس مقدار تابع، عدد حقیقی نخواهد بود.

پ) چون مقدار زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، پس مقدار $۴-x$ باید بزرگتر یا مساوی صفر شود. یعنی

$$۴-x\geq ۰$$

با اضافه‌کردن x به طرفین نامعادله نتیجه می‌شود.

$$۴-x+x\geq x$$

یا

$$۴\geq x$$

پس برای آن‌که مقدارزیر رادیکال منفی نشود، x باید کوچکتر یا مساوی ۴ باشد. بنابراین دامنهٔ تابع در این حالت مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی ۴ است.

تمرین

دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید :

الف) $y = \frac{۱}{x - ۳}$

ب) $y = ۳x^{۳} - ۴$

پ) $y = \sqrt{x - ۹}$

مجلهٔ ریاضی

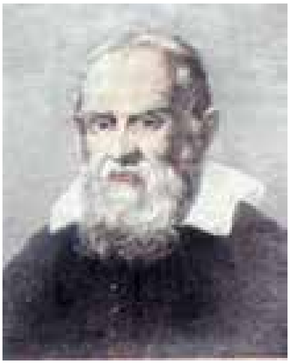
تابع‌ها، نقش مهمّی در علوم بازی می‌کنند. بارها دیده‌اید که یک کمیّت، تابعی از یک کمیّت دیگر است. دانشمندان علوم تجربی و ریاضیدان‌ها، سعی کرده‌اند تا برای این تابع‌ها، فرمولی پیدا کنند تا روابط بین کمیّت‌ها را نشان دهد.

برای مثال، تا قبل از سال ۱۵۹۰، هیچ ایدهٔ کمّی در مورد درجهٔ حرارت وجود نداشت. البتّه مردم، اندیشه‌های نسبی مانند **گرمتر** و **سردتر** را درک می‌کردند و با بعضی اندیشه‌های مطلق مانند داغ یعنی جوش‌آمدن و سرد یعنی منجمد شدن، آشنایی داشتند.

با این حال، اندازهٔ عددی برای درجهٔ حرارت، وجود نداشت. بالاخره، گالیله با نبوغ خویش، تشخیص داد که منبسط‌شدن مایعات براثر گرم‌شدن، کلید اندازه‌گیری درجهٔ حرارت است.

گالیله ؛ اوّلین کسی بود که به درجهٔ حرارت، به عنوان تابعی از حجم مایع، توجّه کرد.

پیداکردن تابعی که معرّف یک موقعیت داده شده باشد، ساختن یک مدل ریاضی نامیده می‌شود. چنان مدلی، می‌تواند روابط بین متغیرها را روشن کند و درنتیجه، به ما کمک می‌کند تا بتوانیم پیش‌بینی کنیم.


گالیله، فیزیکدان و منجم ایتالیایی (۱۶۴۲ـ۱۵۶۴)

همان‌طور که در فعالیت ۱ــ۱ و ۲ــ۱ دیدید، فرمول $n = f(C) = ۷/۵C - ۳۲$ و $R = ۱۲۵۰(h - ۲)$ ، مدل‌های ریاضی بودند تا بتوانیم با آنها، تعداد جیرجیرها و دستمزد بنّا را پیش‌بینی کنیم.

فعالیت ۳ــ۱

به نمودار زیر نگاه کنید :

این نمودار، مربوط به نوار قلبی دو انسان سالم و بیمار است که الگوی ضربان قلب آن دو را نشان می‌دهد. به این الگو در اصطلاح پزشکی، الکتروکاردیوگرام[۱] یا EKG گفته می‌شود. EKG، تابعی از زمان است.

اگرچه ساختن یک فرمول، برای تقریب زدن یک تابع EKG ممکن است، امّا متداول نیست. الگوی تکرار ضربات چیزی است که یک پزشک، نیازمند دانستن آن است و این الگوها، از طریق نمودار، خیلی راحت‌تر دیده می‌شوند تا از طریق فرمول یا جدول.

۱ــ ضربان قلب، تابع چه کمیّتی است؟

۲ــ اگر ضربان قلب را با EKG و زمان را با t نشان دهیم، کدام یک متغیر مستقل و کدام یک متغیّر وابسته هستند؟

۱ــ Electro Kardio Gram (EKG)

۲ــ۱ــ نمایش تابع

در فعالیت ۱ــ۱، تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها را که تابعی از درجهٔ حرارت برحسب سانتیگراد بود، با یک فرمول نشان دادیم. البتّه این رابطه را با جدول و نمودار هم نشان دادیم.

در فعالیت ۲ــ۱ ؛ دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا را که تابعی از تعداد ساعت‌های کاری بودند، با یک جدول نشان دادیم، با این حال، رابطهٔ بین کمیت‌های آن جدول را می‌توانیم با فرمول یا نمودار هم نشان دهیم (و این کار را خواهیم کرد).

در فعالیت ۳ــ۱ ، ضربان قلب را که تابعی از زمان است، با یک نمودار نشان دادیم. درصورتی که می‌توانیم این تابع را، به شکل جدول یا فرمول نیز نمایش دهیم.

نتیجه

تابع‌ها را می‌توان به سه شکل مختلف یعنی به‌وسیلهٔ فرمول‌ها، به‌وسیلهٔ جدول‌ها یا به‌وسیلهٔ نمودارها نشان داد.

در سه فعّالیت قبلی، از هر کدام از شکل‌های مختلف نمایش تابع که مناسب‌تر بودند، استفاده شد. شما هم همین کار را بکنید و بدانید که این سه شکل، هر سه معتبر هستند و ابزار مناسبی برای نمایش تابع می‌باشند.

مثال

با توجّه به پاسخ‌های سؤال‌های ۳ و ۴ فعالیت ۲ــ۱، نشان دهید در چه زمانی، کارگر ساختمانی و بنّا، دستمزد یکسان دارند.

حل: همان‌طورکه در پاسخ به سؤال ۳ فعالیت ۲ــ۱ نوشتید، اگر ساعت را با h [1] نشان دهیم، دستمزد کارگر ساختمانی در هر ساعت برابر $500h_1$ و دستمزد بنّا برابر $1250h_2$ است.

در پاسخ سؤال ۴ فعالیّت ۲ــ۱، چون دستمزد بنّا را برحسب ساعت‌های کاری کارگر ساختمانی خواسته بود، درنتیجه شما به‌درستی، به جای h_2 ، مقدار $(h_1 - 2)$ را جایگزین کردید، زیرا بنّا

۱ــ اوّل واژهٔ Hour به معنای ساعت است.

دو ساعت دیرتر ازکارگر ساختمانی شروع به کار می‌کرد. درنتیجه

$$\text{دستمزد بنّا} = ۱۲۵۰(h_۱ - ۲)$$

پس پیدا کردن ساعتی که دستمزد بنّا و دستمزد کارگر ساختمانی با هم برابر باشند، یعنی حل معادلهٔ

$$۱۲۵۰(h_۱ - ۲) = ۵۰۰h_۱$$

با حل این معادله، $h_۱$ یعنی ساعتی که دو دستمزد با هم برابر می‌شوند، پیدا می‌شود :

$$۱۲۵۰h_۱ - ۲۵۰۰ = ۵۰۰h_۱$$

کم‌کردن $۵۰۰\,h_۱$ از طرفین

$$۱۲۵۰h_۱ - ۵۰۰h_۱ - ۲۵۰۰ = ۵۰۰h_۱ - ۵۰۰h_۱$$

$$۷۵۰h_۱ - ۲۵۰۰ = ۰$$

اضافه‌کردن ۲۵۰۰ به طرفین

$$۷۵۰h_۱ - ۲۵۰۰ + ۲۵۰۰ = ۲۵۰۰$$

$$۷۵۰h_۱ = ۲۵۰۰$$

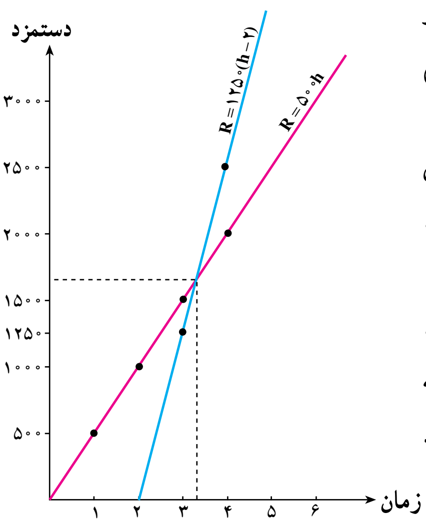
تقسیم طرفین بر ضریب $h_۱$

$$h_۱ = \frac{۲۵۰۰}{۷۵۰} = ۳/۳۳$$

این همان ساعتی بود که از روی جدول (۲) پیش‌بینی کرده بودید.

مثال

نمودار دو تابع دستمزد بنّا و کارگر را رسم کنید و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را روی شکل، مشخص کنید.



حل: معادلهٔ $R = ۵۰۰h$ معرّف تابع دستمزد کارگر ساختمانی ومعادلهٔ $R = ۱۲۵۰(h - ۲)$ ، معرّف تابع دستمزد بنا است.

با استفاده ازنقطه‌یابی و نشان‌دادن دستمزدها روی محور yها و ساعت های کاری (زمان) روی محور xها، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم.

همان نتیجه‌ای را که از جدول و از فرمول گرفتید، از نمودار هم به‌دست آوردید. یعنی با استفاده ازهر سه نمایش تابع، نشان دادید که در $h \cong ۳/۳۳$ ، دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا، با هم برابر می‌شوند.

۳ـ۱ـ نماد تابع

وقتی یک تابع به‌وسیلهٔ یک عبارت جبری یا یک ضابطه که همان فرمول است، نمایش داده می‌شود، معمولاً از **نماد تابع** استفاده می‌شود تا هم به‌راحتی، بتوان به آن عبارت جبری ارجاع داد و هم مقدار آن عبارت جبری را به‌ازای مقدارهای مختلف متغیّر مستقل، محاسبه کرد.

نماد $f(x)$ (اِف x) نشان می‌دهد که نام تابع f است ومتغیّر مستقل، x است. می‌توانیم از نمادهای دیگری نیز به جای $f(x)$ استفاده کنیم. برای مثال، $f(x)=x^۲+۱$ را می‌توانیم بنویسیم $y=x^۲+۱$. در هر صورت مقدار $f(x)$ یا y، **مقدارتابع** است که متغیّر وابسته به متغیّر مستقل است.

همان‌طورکه می‌توان از هر حرفی به غیر از x، برای نشان‌دادن متغیّر مستقل استفاده کرد، می‌توان ازهر حرفی به غیر از f نیز برای نشان دادن تابع، استفاده کرد. تابع‌های زیر، مثال‌هایی هستند که با **نماد تابع** نوشته شده‌اند :

الف) $h(x)=۳-۲(x+۱)$

ب) $g(t)=|۳t-۲|$

پ) $k(w)=\frac{w+۲}{w-۱}$

ت) $r(g)=\sqrt{g+۲}$

توجّه کنید که در هر فرمول، حرف داخل پرانتز، نشان دهندهٔ متغیّر مستقل است. پس هر متغیّر مستقلی در آن فرمول، باید با نماد داخل پرانتز معرفی شود. با دقّت در چهار مثال قبلی، این نکته بهتر دیده می‌شود.

هم‌چنین، در بیشتر فرمول‌هایی که تا به حال دیده‌اید، مقدارهایی وجود دارند که همیشه ثابت هستند، مانند $n=۷/۵C-۳۲$ که در آن، ۷/۵ و ۳۲− همیشه ثابت هستند. به این مقدارها، **مقدار ثابت** گفته می‌شود.

تمرین

در هریک از مثال‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ت)، **متغیّر مستقل**، **متغیّر وابسته** را مشخّص کرده و بنویسید.

۴ــ۱ــ مقدار تابع

وقتی که تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها را به عنوان تابعی ازدرجهٔ حرارت به سانتیگراد معرّفی کردیم، نوشتیم $n=f(C)$ و رابطهٔ بین آنها را با $n=۷/۵C-۳۲$ نشان دادیم.

برای مثال، برای پیدا کردن تعداد جیرجیرها در $۲۸^{\circ}C$[۱]، یعنی برای پیداکردن $n=f(۲۸)$، ابتدا ۲۸ را در ۷/۵ ضرب می کنیم و سپس، ۳۲ را از آن کم می‌کنیم :

$$\begin{aligned} n &= f(۲۸) \\ &= (۷/۵\times۲۸)-۳۲ \\ &= ۱۷۸ \end{aligned}$$

به همین ترتیب، تمام اعداد ردیف دوم جدول (۱) را در هر درجهٔ حرارت داده شده در ردیف اوّل، به‌دست می‌آوریم. به فرمول $۷/۵C-۳۲$ **ضابطهٔ تابع** و به $f(C)$، **مقدار تابع** گفته می‌شود.

مثال

آیا جدول زیر، معرّف یک تابع است؟ چرا؟ ضابطهٔ این تابع را بنویسید.

جدول ۴

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱۲	۶	۴	۳	۲/۴	۲

حل: نخست آن که این جدول، معرّف یک تابع است زیرا برای هر x از ردیف اول جدول، یک و فقط یک y از ردیف دوم، وجود دارد. دوم آن که با دقّت در اعداد دو سطر، می‌بینیم که ۱۲، برعددهای ردیف اوّل تقسیم شده است تا عددهای ردیف دوم، به‌دست آمده‌اند، پس ضابطهٔ تابع برابر $\frac{۱۲}{x}$ است یعنی $y=f(x)=\frac{۱۲}{x}$.

مثال

تابع $y=f(x)=x^{۲}+۱۰$ را در نظر بگیرید و مقادیر تابع را به‌ازای مقـادیـر داده شده در

۱ــ علامت ∘ نشان‌دهندهٔ **درجه** و C اول واژهٔ Celsuis یا سانتیگراد است.

جـدول زیر، یادداشت کنید :

جدول ۵

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

حل: ضابطهٔ تابع ، $x^{۲}+۱۰$ است، یعنی این تابع، قانونی (ضابطه‌ای) دارد که طبق آن، هر جا xای وجود داشت، آن‌را به توان دو رسانده و حاصل را با ۱۰ جمع می‌کند.

یعنی :

$$y=f(x)=x^{۲}+۱۰$$

پس برای پیداکردن f(۰) ، f(۱) ، f(۲) ، f(۳) ، f(۴) و f(۵) ، از این فرمول یا ضابطه، استفاده می‌کنیم :

$$y=f(۰)=(۰)^{۲}+۱۰=۱۰$$

$$y=f(۱)=(۱)^{۲}+۱۰=۱۱$$

$$y=f(۲)=(۲)^{۲}+۱۰=۱۴$$

$$y=f(۳)=(۳)^{۲}+۱۰=۱۹$$

$$y=f(۴)=(۴)^{۲}+۱۰=۲۶$$

$$y=f(۵)=(۵)^{۲}+۱۰=۳۵$$

مسایل

یکی از راه های نمایش تابع، جدول است. هریک از جدول‌های زیر را برای تابع‌هایی که فرمول (ضابطه) آن داده شده است، تکمیل کنید.

۱) $y=f(x)=۳-x$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۳					

۲) $y=f(x)=۵x-۶$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۶-					

۳) $y = f(x) = x^{۲}$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

۴) $y = f(x) = x^{۳}$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

۵) $y = f(x) = ۲^{x}$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

برای هریک از تابع‌های زیر که به‌صورت جدول نمایش داده‌شده‌اند،یک فرمول (ضابطه) بنویسید.

۶)

x	۳	۴	۵	۶	۷
y	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹

y =

۷)

x	۶	۷	۸	۹	۱۰
y	۲	۳	۴	۵	۶

y =

۸)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۲۱	۳۱	۴۱	۵۱	۶۱

y =

۹)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵	۶۶

y =

۱۰)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵

y =

۱۱)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴	۱۱	۳۰	۶۷	۱۲۸

y =

۱۲)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴۹	۴۸	۴۷	۴۶	۴۵

y =

۱۳)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹

y =

۱۴)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴۰	۲۰	$\frac{۴۰}{۳}$	۱۰	۸

y =

۵ــ۱ــ محاسبهٔ مقدار تابع

همان‌طور که در بخش قبلی دیدید، محاسبهٔ مقدار تابع یعنی پیداکردن مقدار $y = f(x)$ به ازای مقدارهای مختلفی که به متغیّر مستقل x داده می شود[1].

برای نمونه، اگر $f(x) = ۳x^۲ + ۲x - ۴$ باشد، آن‌گاه $f(۲)$ نشان‌دهندهٔ مقدار تابع است وقتی که به جای x، ۲ را قرار می‌دهیم :

$$f(x) = ۳x^۲ + ۲x - ۴$$

جابه جایی x با ۲ $\quad f(۲) = ۳(۲)^۲ + ۲(۲) - ۴$

$$= ۱۲ + ۴ - ۴$$

$$= ۱۲$$

توجه کنید که چون $f(۲) = ۱۲$ ، پس نقطه‌ای به مختصات $(۲,۱۲)$ ، یکی از نقاط نمودار این تابع است. مقدار $y = f(۲)$ ، عرض نقطه‌ای است که طول آن، $x = ۲$ است.

۱ــ باز هم توجّه کنید که به جای f، x و y ؛ از هر نماد دیگری می‌توانید استفاده کنید.

مثال

تابع $h(t)=-t^{۲}+۲t-۴$ را در نظر بگیرید و $h(-۲)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$h(t)=-t^{۲}+۲t-۴$$

$$h(-۲)=-(-۲)^{۲}+۲(-۲)-۴$$

$$=-۴-۴-۴$$

$$=-۱۲$$

مثال

تابع $g(x)=|۲-۳x|$ و $t(x)=\frac{۱۰}{x}$ را در نظر بگیرید و هریک از مقدارهای زیر را محاسبه کنید :

الف) $g(۴)$ ب) $t(۲)$ پ) $g(۰)-t(-۲)$

حل:

الف) $g(x)=|۲-۳x|$

جابه‌جایی x با ۴ $g(۴)=|۲-۳\times ۴|$

$$=|۲-۱۲|$$

$$=|-۱۰|$$

$$=۱۰$$

ب) $t(x)=\frac{۱۰}{x}$

جابه‌جایی x با ۲ $t(۲)=\frac{۱۰}{۲}$

$$=۵$$

پ) $g(۰)=|۲-۳\times ۰|=|۲-۰|=|۲|=۲$

$$t(-۲)=\frac{۱۰}{-۲}=-۵$$

بنابراین،

$$g(۰)-t(-۲)=۲-(-۵)=۷$$

می‌توان مقدار تابع را به‌ازای یک عبارت جبری نیز پیدا کرد.

مثال

اگر $g(x)=\sqrt{x^۳+۲}$ باشد، $g(h)$ و $g(۲h)$ را پیدا کنید.

حل:

$$g(x)=\sqrt{x^۳+۲}$$

جابه‌جایی x با h

$$g(h)=\sqrt{h^۳+۲}$$

جابه‌جایی x با ۲h

$$g(۲h)=\sqrt{(۲h)^۳+۲}$$

$$=\sqrt{۸h^۳+۲}$$

مسایل

برای تابع‌های زیر، مقدارهای خواسته‌شده را پیدا کنید.

۱) $t(x)=۲۱-x^۲$ $\quad t(۰)=?$ $\quad t(۱)=?$

۲) $g(x)=۲x^۳-۴x+۵$ $\quad g(t)=?$ $\quad g(-۱)=?$

۳) $f(t)=\sqrt{۳t+۵}$ $\quad f(-۱)=?$ $\quad f(۰)=?$

۴) $f(x)=۴x+۳$ $\quad f(a-۴)=?$ $\quad f(۲t)=?$

۵) $g(x)=x+۳$ $\quad g(-۳)=?$ $\quad g(t)=?$

۶) $k(h)=۳h^۲-h-۴$ $\quad k(۰)=?$ $\quad k(-۱)=?$

برای تابع‌های زیر، مقدارهای جدیدی با توجّه به متغیّر مستقل جدید، به‌دست آمده است. آن متغیّرها را پیدا کنید :

۷) $f(x)=-۲x^۲+۵x-۳$ $\quad f(\square)=-۲b^۲+۵b-۳$

۸) $g(t)=at^۳-۴t^۲+t-۱$ $\quad g(\square)=ax^۳-۴x^۲+x-۱$

۹) $t(x)=|x-۳|$ $\quad t(\square)=|c-۱|$

۱۰) $f(t)=|۲t+۵|$ $\quad f(\square)=|۲b+۵|$

۱۱) $h(x)=\frac{۲x-x^۳}{۴}$ $\quad h(\square)=\frac{۲a-a^۳}{۴}$

۱۲ــ فرض کنید نمودار تابعی شامل نقطهٔ $(-۳,۵)$ است. اگر تابع را با $f(x)$ نشان دهیم، $f(-۳)$ چقدر است؟ جواب خود را توضیح دهید.

۶ــ۱ــ عملیات با تابع‌ها

مثال

تابع $f(x)=۴x-۵$ را در نظر بگیرید. سپس هریک از مقدارهای زیر را حساب کنید:

الف) $f(۳)$ ب) $f(۳+h)$ پ) $f(۳+h)-f(۳)$

ت) $\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ ، اگر $h\neq ۰$

حل:

الف) $f(x)=۴x-۵$

پس $f(۳)=۴(۳)-۵=۱۲-۵=۷$

ب) $f(۳+h)=۴(۳+h)-۵=۱۲+۴h-۵=۷+۴h$

پ) مقدارهای $f(۳)$ و $f(۳+h)$ را از (الف) و (ب)، جایگزین می‌کنیم:

$f(۳+h)-f(۳)=(۷+۴h)-۷=۴h$

ت) نتیجهٔ قسمت (پ) را در صورت می‌نویسیم: $\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\frac{۴h}{h}$

$=۴$

مثال

اگر $f(t)=|۲t-۵|$ و $h(t)=\frac{۳t}{t^۲+۱}$ باشد، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $۲f(۱)+h(۰)$ ب) $h(۱)-f(-۲)$ پ) $\frac{h(\frac{۱}{۲})}{f(\frac{۱}{۲})}$

ت) $h(\frac{۱}{۲}).f(\frac{۱}{۲})$

حل:

الف) اوّل $f(۱)$ و $h(۰)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم :

$$f(t)=|۲t-۵|$$

جابه‌جایی t با ۱ $\quad ۲f(۱)=۲|۲(۱)-۵|=۲|۲-۵|=۲|-۳|=۲.۳=۶$

$$h(t)=\frac{۳t}{t^۲+۱}$$

جابه‌جایی t با ۰ $\quad h(۰)=\frac{۳(۰)}{(۰)^۲+۱}=\frac{۰}{۱}=۰$

پس $\quad ۲f(۱)+h(۰)=۶+۰=۶$

ب) اوّل $h(۱)$ و $f(-۲)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس آنها را از هم کم می‌کنیم :

$$h(۱)=\frac{۳(۱)}{(۱)^۲+۱}=\frac{۳}{۱+۱}=\frac{۳}{۲}$$

$$f(-۲)=|۲(-۲)-۵|=|-۴-۵|=|-۹|=۹$$

پس $\quad h(۱)-f(-۲)=\frac{۳}{۲}-۹=\frac{۳}{۲}-\frac{۱۸}{۲}=\frac{-۱۵}{۲}$

پ) باز هم اوّل $h(\frac{۱}{۲})$ و $f(\frac{۱}{۲})$ را محاسبه می‌کنیم و سپس، مقدارهای به‌دست‌آمده را بر هم تقسیم می‌کنیم :

$$h(\frac{۱}{۲})=\frac{۳(\frac{۱}{۲})}{(\frac{۱}{۲})^۲+۱}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۴}+۱}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۴}+\frac{۴}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۴}}=\frac{\cancel{۴}^{۲}\times ۳}{\cancel{۲}\times ۵}$$

$$h(\frac{۱}{۲})=\frac{۶}{۵}$$

$$f(\frac{۱}{۲})=\left|۲(\frac{۱}{۲})-۵\right|=\left|\frac{۲}{۲}-۵\right|=|۱-۵|=|-۴|=۴$$

پس $\quad \dfrac{h(\frac{۱}{۲})}{f(\frac{۱}{۲})}=\dfrac{\frac{۶}{۵}}{۴}=\dfrac{۶}{۲۰}=\dfrac{۳}{۱۰}$

ت) مقدارهای به‌دست‌آمده برای $h(\frac{۱}{۲})$ و $f(\frac{۱}{۲})$ را در هم ضرب می‌کنیم :

$$h(\frac{۱}{۲})f(\frac{۱}{۲})=\frac{۶}{۵}\times ۴=\frac{۲۴}{۵}$$

نتیجه

وقتی می‌خواهیم عملی را روی دو یا چند تابع انجام دهیم، ابتدا مقدار هرتابع را به‌ازای متغیّر مستقلِ داده شده محاسبه می‌کنیم. سپس عملیات خواسته شده روی مقدارهای تابع‌ها را مانند عملیات با اعداد، انجام می‌دهیم.

مسایل

۱ـ برای تابع‌های $P(x)=x^{۲}-۳x+۵$ و $Q(x)=x^{۲}+۴x-۸$ ، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید :

الف) $P(-۱).Q(۲)$ ب) $Q(۱)$ پ) $Q(۲)+P(۰)$

ت) $\dfrac{Q(۰)}{P(۰)}$

۲ـ تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۵}$ و $g(x)=۶x+۲$ را در نظر بگیرید. سپس عبارت های زیر را محاسبه کنید :

الف) $f(-۲)$ ب) $g(۳+z)$ پ) $g(-۳b)$

ت) $f(-۲).g(۲)$ ث) $\dfrac{g(\frac{۱}{۲})}{f(۲)}$

۳ـ اگر $f(x)=۴-۳x$ باشد، $f(۲+h)$ را تعیین کنید.

۴ـ اگـر $f(x)=x^{۳}-۲x+۷$ و $g(x)=۲x^{۳}+۳x-۲$ باشد، مقدارهای زیر را محاسبه کنید :

الف) $g(\frac{۱}{۲})$ ب) $f(-۲/۳)$ پ) $g(۱).f(۱)$

ت) $g(۱)+f(۱)$ ث) $g(۱)-f(۱)$ ج) $\dfrac{f(۱)}{g(۱)}$

۵ـ اگر $g(x)=x^{۲}+۲x+۱$ ؛

الف) $g(۲)$ را حساب کنید.

ب) $g(x+۲)$ را پیدا کنید.

پ) نشان دهید $g(x+۲)\neq g(x)+g(۲)$.

مجلهٔ ریاضی

اجازه دهید یک بار دیگر، مفهوم تابع را با یک مثال مرور کنیم :

تـابع $f(x)=x^{۳}+۲x-۳$ را در نظر بگیرید. اگر بـه جـای متـغیّر مستقل x، هر مقدار دیگری را بگذاریم، تابع f کاری که می‌کند آن است که

۱ــ اوّل آن مقدار را به توان ۳ می‌رساند.

۲ــ دو برابر آن مقدار را به آن اضافه می‌کند.

۳ــ از مجموع آنها، ۳ را کم می‌کند.

برای مثال، $f(۲+a)=(۲+a)^{۳}+۲(۲+a)-۳$

یا $f(-۲)=(-۲)^{۳}+۲(-۲)-۳$

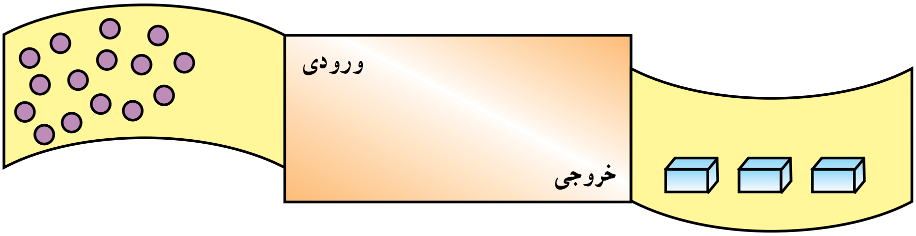
در واقع، تابع مانند ماشینی است که مجموعهٔ متغیّرهای مستقل یعنی دامنهٔ تابع، ورودی‌های آن هستند. ضابطه یا قانون تابع،عملی است که آن ماشین انجام می‌دهد و بالاخره، مقدار تابع یعنی متغیّر وابسته، خروجی‌های این ماشین هستند.

به اطراف خود با دقّت نگاه کنید و چند پدیدهٔ واقعی را که مانند تابع عمل می‌کنند، نام ببرید. سپس بگویید که چرا هریک تابع هستند. می‌توانید با پدیدهٔ مشک‌زدن دوغ و کره درست‌کردن، به‌شرط آن که همهٔ دوغ کره شود ؛ یا چرخ گوشت ؛ شروع کنید! موفق باشید!

زن روستایی اسالم در حال تهیهٔ کره

تمرین

ماشین زیر را در نظر بگیرید. ۱۵ شیء به درون ماشین وارد شده و ۳ بسته از آن خارج می‌شود.



جدول زیر، اطلاعات بیشتری دربارهٔ این ماشین به شما می‌دهد :

تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند	تعداد اشیایی که وارد می‌شوند
۳	۱۵
۵	۲۵
۱	۵
۱۲	۶۰

با توجّه به اطلاعات داده شده، جاهای خالی را در جدول‌های زیر، پُر کنید :

جدول ۶

(الف)

تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند	تعداد اشیایی که وارد می‌شوند
۱	۹
ــــ	۲۵
ــــ	۶۰
ــــ	۹۸
ــــ	۸۱

(ب)

تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند	تعداد اشیایی که وارد می‌شوند
۱۰	ــــ
۴۰	ــــ
۲۰۰	ــــ
۱۷	ــــ
۰	۳

۷ــ۱ــ رسم نمودار تابع

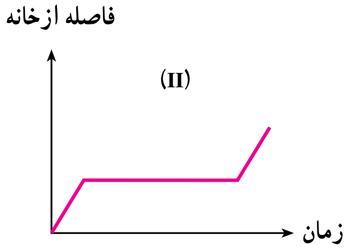
فعالیت ۴ــ۱

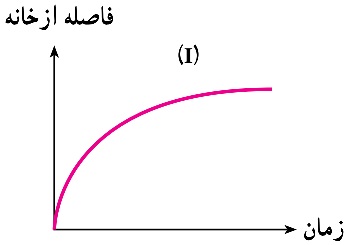
الف) سه داستان، برای سه نمودار زیر داده شده است. بگویید هرنمودار، مربوط به کدام داستان است. برای نمودار باقی مانده یک داستان بنویسید.

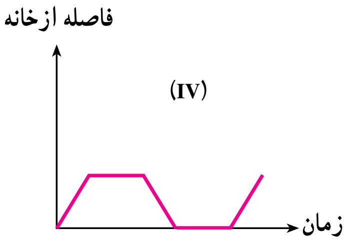
۱ــ تازه ازخانه بیرون آمده بودم که متوجه شدم کتابهایم را فراموش کرده‌ام. درنتیجه به خانه برگشتم تا آنها را بردارم.

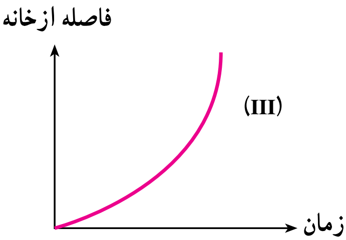
۲ــ در حال رانندگی بودیم و اوضاع به‌خوبی پیش می‌رفت تا آن‌که ماشین پنچر شد، پس از گرفتن پنچری به راه افتادیم.

۳ــ من با آرامی مشغول قدم‌زدن به‌سمت مدرسه بودم، امّا وقتی متوجّه شدم که دیر شده است، سرعتم را زیاد کردم.









ب) چرا هریک از نمودارها، معرّف یک تابع هستند؟ توضیح دهید.

پ) چرا هریک از داستان‌ها، معرّف یک تابع هستند؟ توضیح دهید.

ت) موقعیّت زیر را در نظر بگیرید. نخست بگویید که چرا این موقعیّت، معرّف

یک تابع است. سپس نمودار آن را رسم کنید :

تمام صبح، هوا گرم بود. ناگهان حدود ظهر، طوفان شدیدی آمد و هوا خیلی خنک شد. بعد از طوفان، دوباره هوا گرم شد. سپس با غروب آفتاب، هوا مجدداً خنک شد.

۱ــ۷ــ۱ــ نمودار تابع خطی

همان‌طورکه در ابتدای این فصل دیدید ؛ نمودارها یکی ازابزارهای مفید برای نشان‌دادن تابع و رابطهٔ بین دو کمیّت هستند. در فعّالیّت ۴ــ۱ دیدید که چگونه با استفاده از نمودارها، می‌توانید پدیده‌های طبیعی و حوادث روزانهٔ زندگی خویش را به‌سادگی به زبان ریاضی نشان دهید، به‌طوری که برای همه قابل فهم باشد.

برخی از پدیده‌هایی که روزانه با آنها سر و کار داریم، تابع‌های خطی هستند، یعنی تابع‌هایی که نمودار آنها، به شکل یک خط است. در حالت کلّی، نمودار تابع‌های خطی به شکل

$$y = f(x) = mx + n$$

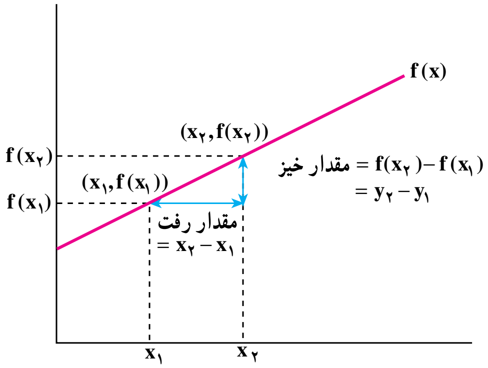
یک خط است[۱] که در آن :

m ضریب زاویه یا نسبت تغییرات y به تغییرات x است (یعنی نسبت تغییرات عرض نقاط روی خط به تغییرات طول نقاط که نشان‌دهندهٔ شیب خط است.)

۱ــ در سال سوم راهنمایی و اوّل دبیرستان، با معادلهٔ خط آشنا شده‌اید.

n محلّ تقاطع خط با محور عمودی یا مقدار y است وقتی که $x = 0$. توجّه کنید که وقتی $m = 0$ ، یعنی ضریب زاویه صفر است و معادلهٔ خط تبدیل به $y = f(x) = n$ می‌شود و آن وقت، یک خط افقی خواهیم داشت.

یادآوری: ضریب زاویهٔ تابع خطی $f(x)$ ، از فرمول زیر به‌دست می‌آید :



$$m = \frac{\text{مقدار خیز}^{1}}{\text{مقدار رفت}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

چون $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$ پس

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

فعالیت ۵ــ۱

تعداد کلماتی که در گنجینهٔ لغات کودک وجود دارد، تابعی از سنّ او است.

فرمول تجربی زیر، اندازهٔ این گنجینهٔ لغات را در کودکان معمولی بین ۲۰ ماهگی و ۵۰ ماهگی نشان می‌دهد :

$$n = 60a - 900$$

که در آن، a معرّف سن کودک به ماه (متغیّر مستقل) و n نشان‌دهندهٔ تعداد کلماتی که کودک به‌درستی استفاده می‌کند (متغیّر وابسته) هستند.

۱ــ در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، جرج توماس ترجمهٔ مهدی بهزاد و سیامک کاظمی، از واژهٔ «خیز» برای Rise و از واژهٔ «رفت» برای Run، استفاده شده است.

بچه‌ها در کوچه (۱۳۷۶) اثر مرتضی کاتوزیان

۱ــ جدول زیر را کامل کنید :

جدول ۷

a	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
n							

۲ــ نمودار این تابع را بکشید. محور افقی را محور aها (سن کودک برحسب ماه) و محور عمودی را محور nها (تعداد کلمات) در نظر بگیرید.

۳ــ یک کودک معمولی، در ۲۰ ماهگی چند کلمه در گنجینهٔ لغاتش وجود دارد؟

۴ــ یک کودک معمولی، در ۵۰ ماهگی چند کلمه در گنجینهٔ لغاتش وجود دارد؟

۵ــ از سن ۲۰ ماهگی تا سن ۵۰ ماهگی، یک کودک معمولی در هر ماه، چند کلمهٔ جدید یاد می‌گیرد؟

۶ــ آیا این فرمول، می‌تواند برای یک کودک در سن ۱۰ ماهگی، درست باشد؟ توضیح دهید.

۲ـ۷ـ۱ـ قاعدهٔ رسم نمودار تابع خطی

مثال

نمودار تابع $f(x)$ ، خطی به معادلهٔ $۳x + ۴y = -۱۲$ است. شیب این خط را پیدا کنید.

حل: برای پیداکردن شیب خط، مختصات دو نقطه روی آن را لازم داریم. می‌توانیم محل تقاطع خط با محور xها و yها را انتخاب کنیم.

الف) محل تقاطع خط با محور xها، یعنی جایی که $y = ۰$ است. پس در معادلهٔ $۳x + ۴y = -۱۲$ به جای y، صفر قرار می‌دهیم :

$$۳x + ۴(۰) = -۱۲$$

$$۳x = -۱۲$$

منبر چوبی منبت‌کاری شده، زیارت‌گاه ابیانه

$$x = -\frac{۱۲}{۳} = -۴$$

پس مختصات یکی از نقطه‌های انتخابی، $(-۴,۰)$ است. به طول این نقطه **طول از مبدأ** گفته می‌شود.

ب) محل تقاطع خط با محور yها، یعنی جایی که $x=۰$. پس در معادلهٔ $۳x+۴y=-۱۲$، به جای x، صفر قرار می‌دهیم:

$$۳(۰)+۴y=-۱۲$$

$$۴y=-۱۲$$

$$y=-\frac{۱۲}{۴}=-۳$$

پس مختصات یک نقطهٔ انتخابی دیگر، $(۰,-۳)$ است که **عرض آن عرض از مبدأ** نامیده می‌شود.

بنابراین[1]، $$\text{شیب خط} = m = \frac{\text{مقدار خیز}}{\text{مقدار رفت}} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

با توجه به دو نقطهٔ $(-۴,۰)$ و $(۰,-۳)$،

$$x_۱ = ۰ \quad , \quad y_۱ = -۳$$

$$x_۲ = -۴ \quad , y_۲ = ۰$$

عبارت است از

$$m = \frac{۰-(-۳)}{-۴-۰} = \frac{۳}{-۴} = -\frac{۳}{۴}$$

از طرف دیگر، می‌توانیم معادلهٔ $۳x+۴y=-۱۲$ را برحسب y حل کنیم:

$$۴y=-۳x-۱۲$$

$$y=-\frac{۳}{۴}x-۳$$

مقداری که برای ضریب زاویه به‌دست آوردیم، با ضریب x برابر است.

نتیجه

اگر معادلهٔ خط را برحسب y و به‌صورت $y=mx+n$ بنویسیم، آن‌گاه به جای

۱ـ فرقی نمی‌کند که مختصات کدام نقطه را $x_۱$ و $y_۱$ و کدام را $x_۲$ و $y_۲$ انتخاب می‌کنید. فقط توجّه داشته باشید که $x_۱$ و $y_۱$ متعلق به یک نقطه و $x_۲$ و $y_۲$ متعلّق به نقطهٔ دیگر باشند.

محاسبهٔ ضریب زاویه از فرمول $\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ ، ضریب x را که همان ضریب زاویه است، می‌نویسیم.

حالت‌های خاص

مثال

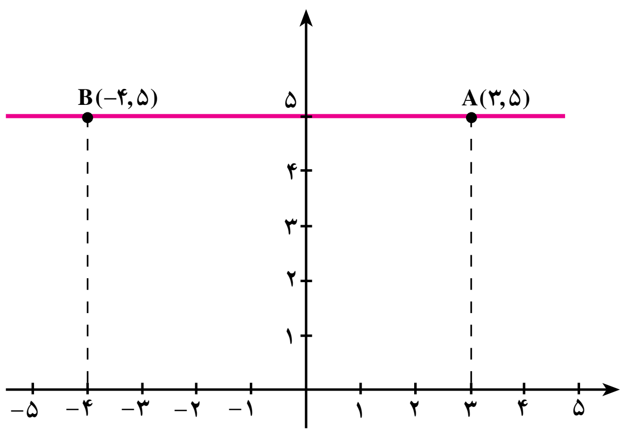
ضریب زاویهٔ خط‌های زیر را تعیین کنید :

الف) خط $y = ۵$

ب) خطی که دارای دو نقطهٔ (۲,۳) و (۲,۶) باشد.

حل:

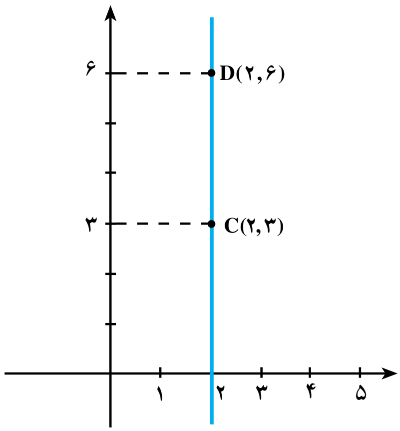
الف) دو نقطه از خط $y = ۵$ در شکل زیر نشان داده شده است :



توجّه کنید که عرض هر دو نقطهٔ A و B روی خط $y = ۵$ ، برابر است. پس

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۵ - ۵}{-۴ - ۳} = \frac{۰}{-۷} = ۰$$

ب) چون طول هر دو نقطه با هم برابرند، پس روی یک خط عمودی قرار می‌گیرند :



پس فرمول ضریب زاویه برای چنین حالتی، قابل استفاده نیست زیرا

$$\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۶-۳}{۲-۲} = \frac{۳}{۰}$$

که **تعریف‌نشده** است. به طور کلّی، ضریب زاویهٔ خط عمودی، تعریف نشده است.

تذکر: برای این دو حالت خاص، به تفاوت بین ضریب زاویهٔ صفر و ضریب زاویهٔ تعریف‌نشده توجّه کنید.

تعریف خط به صورت ضریب زاویه ــ عرض ازمبدأ

خط $y = mx + n$ به‌صورت ضریب زاویه ــ عرض ازمبدأ نوشته شده است. ضریب زاویهٔ این خط m و عرض از مبدأ آن، n است (یعنی محل تقاطع خط با محور yها، نقطهٔ $(۰, n)$ است).

روش رسم خط

برای رسم خط، با استفاده از ضریب زاویه و عرض ازمبدأ ؛ مراحل زیر را انجام دهید :

۱ــ معادلهٔ خط را به شکل $y = mx + n$ بنویسید.

۲ــ نقطهٔ $(۰, n)$ ، یعنی عرض از مبدأ را روی محور yها مشخّص کنید،

۳ــ ضریب زاویه را به‌صورت $m = \frac{\text{خیز}}{\text{رفت}}$ بنویسید. سپس از عرض از مبدأ شروع کنید و به‌اندازه‌ای که **خیز** مشخّص کرده است، به سمت بالا یا پایین حرکت کنید. آن‌گاه، به‌اندازهٔ **رفت**،

به سمت راست یا چپ، حرکت کنید و نقطه‌ای که به آن رسیدید را به‌عنوان دومین نقطهٔ خط، روی صفحهٔ مختصات مشخّص کنید.

توجّه: در حالتی که m یک عدد صحیح باشد، خیز برابر m و رفت برابر ۱ است.

۴ـ خط را طوری رسم کنید که از این دو نقطه بگذرد.

مثال

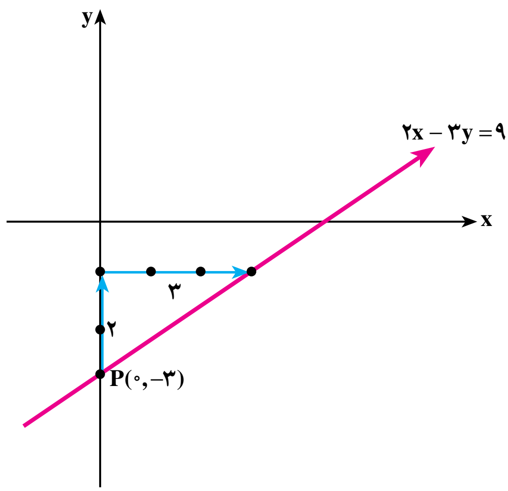
خط $۲x - ۳y = ۹$ را با استفاده از ضریب زاویه و عرض از مبدأ، رسم کنید.

حل:

۱ـ با استفاده از روش رسم خط، گام اوّل را برمی‌داریم و معادله را به شکل $y = mx + n$ می‌نویسیم :

$$۲x - ۳y = ۹$$
$$-۳y = -۲x + ۹$$
$$y = \frac{-۲x}{-۳} + \frac{۹}{-۳}$$
$$y = \frac{۲}{۳}x - ۳$$

۲ـ عرض ازمبدأ (محل تقاطع خط با محور yها) یعنی $P(۰, -۳)$ را روی محور yها در صفحهٔ مختصات، مشخّص می‌کنیم.



۳ــ ضریب‌زاویه $m=\frac{۲}{۳}$ است. پس برای یافتن نقطه‌ای دیگر از این خط، از نقطهٔ $P(۰,-۳)$ شروع می‌کنیم و به‌اندازهٔ **خیز** یعنی ۲ واحد به سمت بالا رفته و سپس، به‌اندازهٔ **رفت** یعنی ۳ واحد به سمت راست، حرکت می‌کنیم.

۴ــ خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، نمودار معادلهٔ $y=\frac{۲}{۳}x-۳$ است.

مسایل

۱ــ معادله‌های زیر را به شکل $y=mx+n$ بنویسید و سپس، با استفاده از **روش رسم نمودار خطی**، آن را رسم کنید :

الف) $۲x+۵y=۱۰$

ب) $x+۳y-۶=۰$

پ) $y+۳x=۰$

ت) $x-۲=۵$

ث) $y-۴=-۳$

۲ــ خطی رسم کنید که ضریب زاویه و یک نقطهٔ آن داده شده است.

الف) $m=\frac{۳}{۴}$ و $(۰,۳)$

ب) m تعریف نشده است. و $(-۵,۰)$

پ) $m=۰$ و $(۰,۲)$

ت) $m=\frac{۲}{۳}$ و $(-۲,-۳)$

۳ــ نمودار معادله‌های زیر را رسم کنید :

الف) $y=\frac{۳}{۴}x+۳$

ب) $y=x$

پ) $y=-\frac{۳}{۵}x$

ت) $y=۲x+۳$

ث) $y=-x$

ج) $x=-۴$

فعالیت ۶ــ۱

با مشورت هم‌کلاسی‌های خود، به سؤالها پاسخ دهید و برای هر پاسخ، دلیل قانع کننده ارایه دهید.

۱ــ بدون محاسبه، بگویید که هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام معادله است؟

الف) $y = x - ۵$

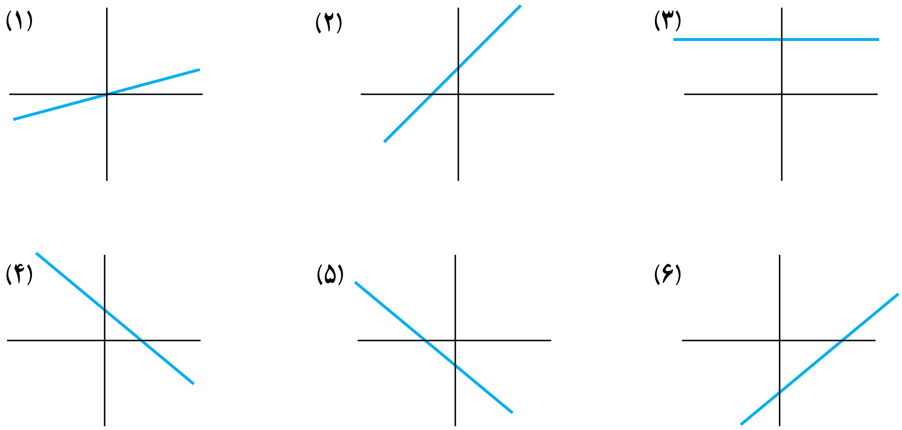
ب) $-۳x + ۴ = y$

پ) $۵ = y$

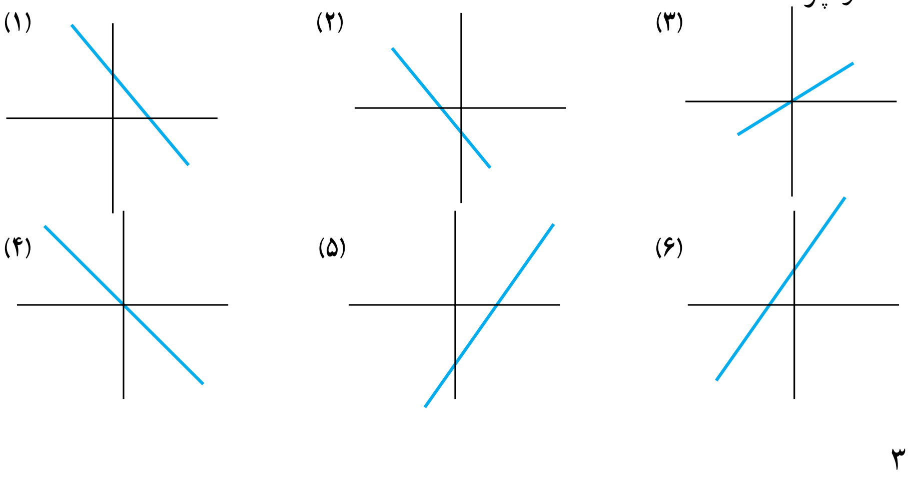
ت) $y = -۴x - ۵$

ث) $y = x + ۶$

ج) $y = \frac{x}{۲}$



۲ــ بدون محاسبه، بگویید که هر معادله، معرّف کدام یک ازنمودارهای زیر است و چرا؟



الف) $y=-۲/۷۲x$

ب) $y=۰/۰۱+۰/۰۰۱x$

پ) $y=۲۷/۹-۰/۰۱x$

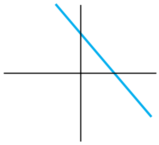
ت) $y=۰/۱x-۲۷/۹$

ث) $y=-۵/۷-۲۰۰x$

ج) $y=\frac{x}{۳/۱۴}$

۳ــ دلایل خود را منظم کنید و از آن‌ها، روشی برای رسم نمودار تابع خطی پیشنهاد کنید تا بدون محاسبه، بتوان وضعیت خط را در صفحه مشخّص کرد.

برای مثال، می‌توانید بگویید :

«در یک تابع خطی به شکل $y=mx+n$ ، اگر ضریب زاویه منفی و عرض از مبدأ مثبت باشد، شکل تقریبی نمودار تابع،  است.»

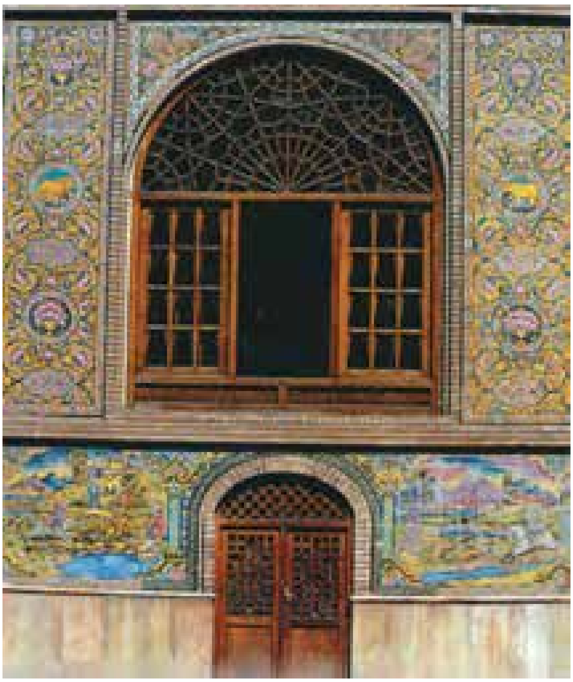
بقیه حالت‌ها را شما بنویسید.

۸ــ۱ــ خانوادهٔ تابع‌های خطی

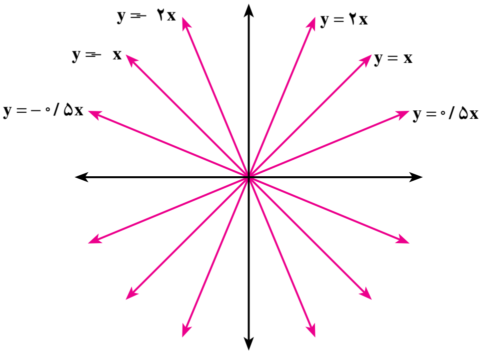
فرمول‌هایی مانند

$$y=f(x)=mx+n$$

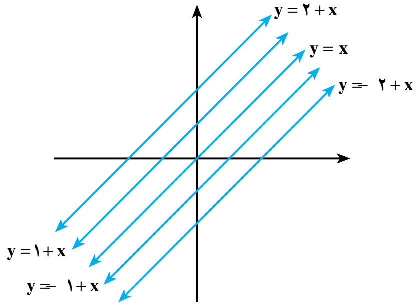
و $y=f(x)=mx$ که شامل ثابت‌های m و n هستند، از یک خانواده می‌باشند. معمولاً از خانوادهٔ تابع‌های خطی، برای مدل‌سازی پدیده‌های خطی استفاده می‌کنیم. معنای مقدارهای مختلف m و n در خانوادهٔ $f(x)=mx+n$ ، در شکل‌های صفحهٔ بعد نشان داده شده است.



شمس‌العماره، تهران



خانوادهٔ تابع‌های $y = mx$ (با $n = ۰$)



خانوادهٔ تابع‌های $y = x + n$ (با $m = ۱$)

فعالیت ۷ــ۱

الف) خانوادهٔ تابع‌های به شکل $y = ax + ۲$ را در نظر بگیرید (a ضریب زاویه است). نمودار تابع‌ها را در حالت‌های زیر بررسی کنید.

۱ــ a مثبت و بزرگتر از یک

۲ــ a منفی و بزرگتر از منفی یک

۳ــ a مثبت و کوچکتر از یک

۴ــ a منفی و کوچکتر از منفی یک

ب) به نقش a در نمودار تابع‌های این خانواده توجّه کنید. چگونه a بر نمودار خط، تأثیر می‌گذارد؟

پ) اندازهٔ a (یعنی $|a|$) چه تأثیری بر نمودار خط می‌گذارد؟

ت) علامت a چه تأثیری برنمودار خط دارد؟

ث) نتایج به‌دست‌آمده را به‌عنوان روشی برای رسم نمودارهای این خانواده از تابع‌ها، بنویسید.

مثال

درجهٔ فارنهایت را در مقابل درجهٔ سلسیوس درنظر بگیرید، $212^\circ F$ (درجهٔ فارنهایت) و $100^\circ C$ (درجهٔ سانتیگراد)، هر دو معرّف درجهٔ حرارتی است که آب در آن می‌جوشد. به‌طور مشابه، $32^\circ F$ و $0^\circ C$، نقطهٔ انجماد آب را نشان می‌دهد.

الف) درجهٔ سانتیگراد را روی محور xها و درجهٔ فارنهایت را روی محور yها نشان دهید و با استفاده از این دو نقطه، نمودار خط را رسم کنید.

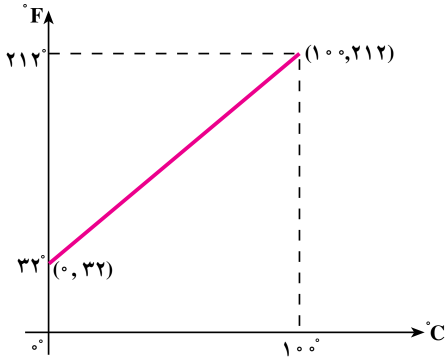
ب) معادلهٔ این خط چیست؟

پ) با استفاده از این معادله، بگویید $20^\circ C$، برابر چند درجهٔ فارنهایت است؟

ت) در چه درجهٔ حرارتی، درجهٔ سانتیگراد و فارنهایت با هم برابرند؟

حل:

الف)



ب) با استفاده از دو نقطهٔ جوش و انجماد برحسب درجهٔ فارنهایت و سانتیگراد یعنی (۱۰۰,۲۱۲) و (۰,۳۲)، ضریب زاویهٔ خط را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{ضریب زاویه} = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = 1/8$$

محل تقاطع خط با محور Fها یعنی عرض ازمبدأ، ۳۲ است. پس معادلهٔ خط را در حالت کلی می‌نویسیم :

$$y = mx + n$$

با جایگزین‌کردن $y = F$ (درجهٔ فارنهایت)، $x = C$ (درجهٔ سانتیگراد)، $m = 1/8$ (ضریب زاویه) و $n = 32$ (عرض ازمبدأ)، معادلهٔ این خط را مشخّص می‌کنیم :

$$F = 1/8C + 32$$

پ) حالا به جای C، 20° را می‌گذاریم تا F° را به‌دست آوریم :

$$F = 1/8(20) + 32 = 36 + 32 = 68^\circ F$$

ت) چون می‌خواهیم F° و C° با هم برابرباشند، پس در معادلهٔ

$$F = 1/8C + 32$$

به جای C ، F را قرار می‌دهیم :

$$F = 1/8F + 32$$

$$F - 1/8F = 32$$

$$-0/8F = 32$$

$$F = -\frac{32}{0/8}$$

$$\boxed{F = -40^\circ}$$

پس در -40° ، درجهٔ حرارت سانتیگراد و فارنهایت، با هم برابر می‌شوند.

نتیجه: برای تبدیل درجه‌های سانتیگراد و فارنهایت به یکدیگر، از نمودار این مثال، استفاده می‌کنیم و فرمول پیداکردن ضریب زاویه را می‌نویسیم. چون در حالت کلی می‌خواهیم هر Fای را به C و هر Cای را به F تبدیل کنیم، پس در

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0}$$

که برای یک حالت خاص بود، به جای ۲۱۲، F و به جای ۱۰۰، C را قرار می‌دهیم :

$$m = \frac{F - 32}{C - 0}$$

امّا چون نمودار، یک خط راست است ؛ پس ضریب زاویهٔ آن در تمام نقاط روی آن، یکسان است. بنابراین،

$$\frac{F - 32}{C - 0} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100}$$

با استفاده از خاصیّت کسرها، تساوی بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\frac{F - 32}{180} = \frac{C}{100}$$

کسر را ساده می‌کنیم :

$$\frac{F-۳۲}{۹}=\frac{C}{۵}$$

این معادله را یک بار برای C و یک بار برای F حل می‌کنیم :

(۱) $\boxed{F=\frac{۹}{۵}C+۳۲}$ یا $F-۳۲=\frac{۹}{۵}C$

(۲) $\boxed{C=\frac{۵}{۹}F-\frac{۱۶۰}{۹}}$ یا $۹C=۵F-۱۶۰$

توجّه کنید که برای تبدیل درجهٔ حرارت سانتیگراد به فارنهایت، از (۱) یا (۲) می‌توانید استفاده کنید.

تمرین

با استفاده از فرمول ۱، در فعالیت ۱ــ۱، تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها را برحسب درجهٔ فارنهایت محاسبه کنید. یعنی، فرمول تجربی

$$n=۷/۵C-۳۲$$

را برحسب درجهٔ فارنهایت بنویسید.

۹ــ۱ــ خانوادهٔ تابع‌های توانی

تابع‌های توانی، خانوادهٔ مهمّی از تابع‌ها هستند. برای مثال، مساحت یک مربع، تابعی از ضلع آن است و از فرمول $A=f(s)=s^{۲}$ [۱] به‌دست می‌آید.

هم‌چنین، حجم کره که تابعی از شعاع آن است، از فرمول $V=f(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ [۲] به‌دست می‌آید.

تعریف

یک تابع توانی به شکل

$$y=f(x)=kx^{P}$$

است که در آن k هر ثابت غیرصفری می‌تواند باشد و P عددی طبیعی است.

۱ــ S اوّل کلمهٔ Side به‌معنی ضلع است و A، اوّل کلمهٔ Area به معنی مساحت است.

۲ــ V اوّل کلمهٔ Volume به معنای حجم است و r اول کلمهٔ Radius به‌معنای شعاع است.

نمای جنوبی، خانهٔ طباطبایی، کاشان

تابع خطی $y = f(x) = mx$ (با ثابت m) نیز یک تابع توانی است که در آن، توان x برابر یک است.

بنابراین، تابع‌های خطی نیز عضوی از خانوادهٔ تابع‌های توانی به‌شمار می‌آیند.

فعالیت ۸ــ۱

تابع‌های توانی به شکل $y = f(x) = x^n$ را در نظر بگیرید که در آن، n یک عدد صحیح مثبت باشد.

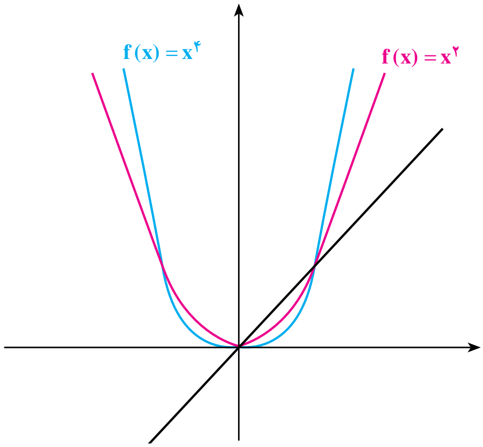
۱ــ فقط با نقطه‌یابی، نمودار تقریبی x^2، x^3، x^4 و x^5 را رسم کنید.

۲ــ موارد مشابه و متفاوت هریک را بنویسید.

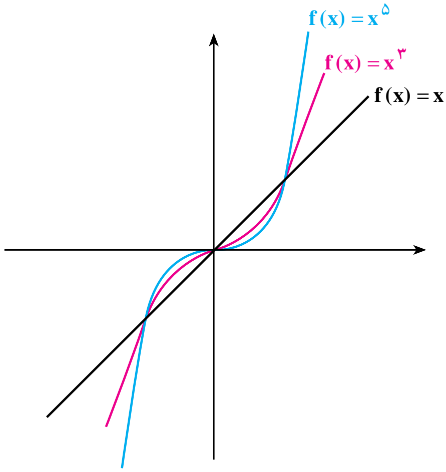
۳ــ آیا می‌توانید نمودارها را دسته‌بندی کنید؟ اگر جواب مثبت است، نمودارها در چند دسته قرار می‌گیرند؟

۴ــ رابطهٔ بین توان‌های x و دسته‌بندی شما چیست؟

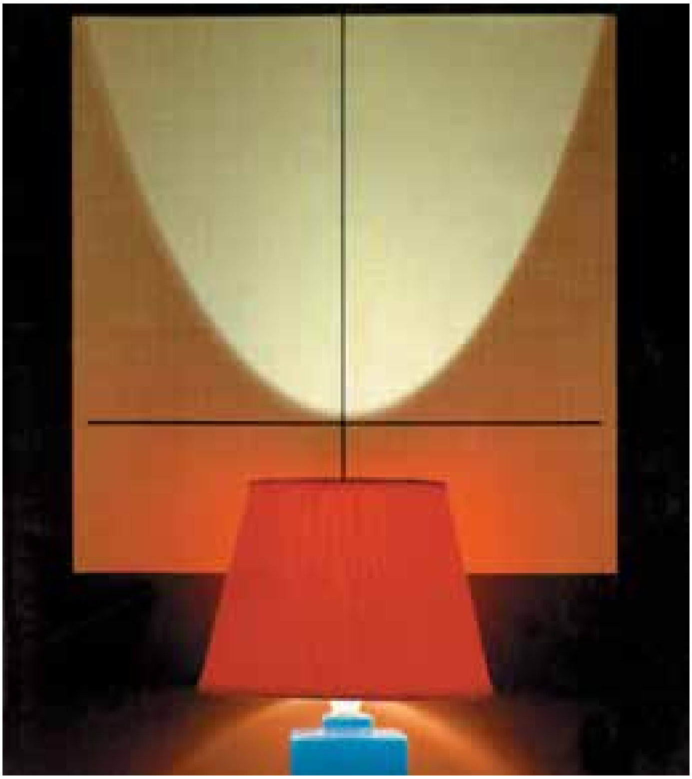
به‌طور کلّی نمودار تابع‌های توانی وقتی توان x زوج باشد، به شکل صفحهٔ بعد است :



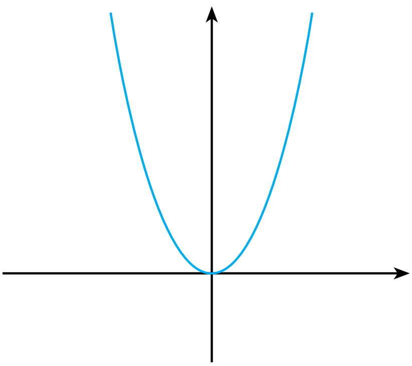
هم‌چنین، نمودار تابع‌های توانی وقتی توان x فرد باشد نیز، به شکل زیر است :



یکی از معروف‌ترین تابع‌های توانی، $y = f(x) = x^{۲}$ است. این تابع‌ها، بسیاری از پدیده‌های طبیعی را مدل‌سازی می‌کنند. برای مثال، تابع سود، تابع درآمد، تابع پرتاب یک شیء و تابع افتادن یک توپ به زمین و حرکت آن تا زمان توقّف بر روی زمین، همگی تابع توانی هستند که در آن‌ها، توان x برابر **۲** است. به دلیل اهمیت این خانواده از تابع‌ها، به آن‌ها نام خاصّی داده شده و به **سهمی** معروف هستند. فصل دوم، اختصاص به این خانواده ازتابع‌ها دارد.



در هنگام مدل‌سازی، بیش از آن که به رسم دقیق نمودار تابع نیاز باشد، به شکل تقریبی آن احتیاج است. برای مثال، می‌توانید با ماشین‌حساب یا با نقطه‌یابی، نمودار سهمی $f(x) = x^۲$ را بکشید :

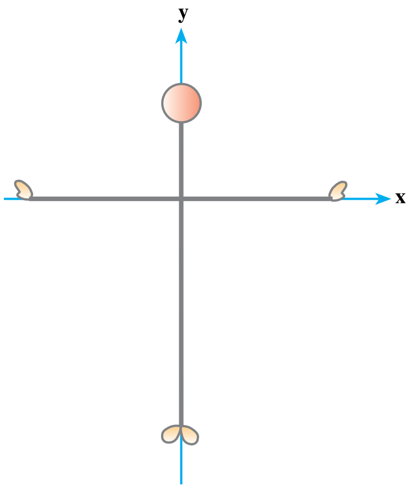


و زمانی که می‌خواهید بر مبنای این سهمی، نمودار $f(x) = x^۲ + ۱$ را رسم کنید، کافی است بدانید که سهمی قبلی شما، به اندازهٔ یک واحد بالا می‌پرد!

زنگ تفریح ریاضی!

برای رفع خستگی از زحمتی که برای فصل اوّل کشیده‌اید، ورزش بدن‌سازی زیر را انجام دهید تا سهمی‌ها را برای همیشه، درخاطر داشته باشید! این ورزش، فقط با حرکت دستهاست.

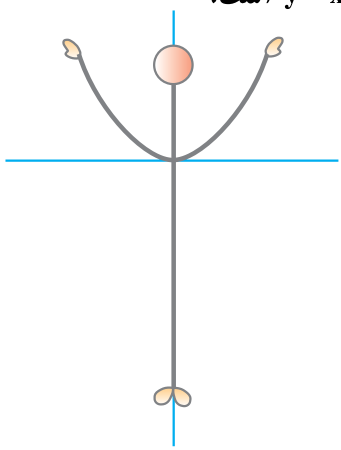
فرض کنید روی محور مختصات طوری ایستاده‌اید که مرکز مختصات، هم سطح با شانه‌ها و دقیقاً زیر نقطهٔ میانی گردن شما باشد.



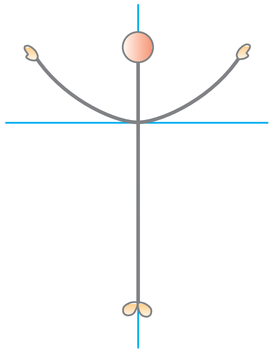
تمرین ۱: دست‌ها را به‌آهستگی و منحنی‌وار، به‌طرف بالا حرکت دهید. این حالت استاندارد را $y = x^۲$ می‌نامیم.

هریک از تمرین‌های ورزشی را از $y = x^۲$ شروع کرده و به آن، خاتمه دهید.

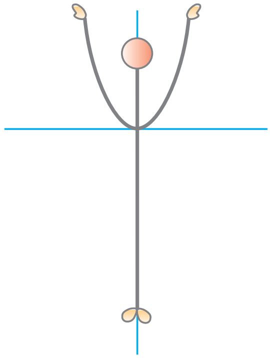
یعنی نقطهٔ شروع و پایان، $y = x^۲$ است.



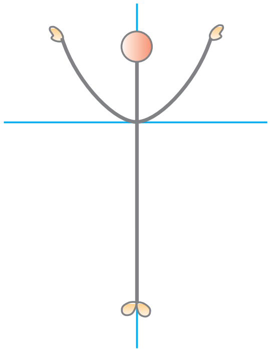
تمرین ۲: شکل‌های زیر، نشان می‌دهند که اگر ضریب x را (که در $y = x^2$ یک است) تغییر دهیم، سهمی تنگ‌تر یا گشادتر می‌شود.



$y = \frac{1}{2}x^2$



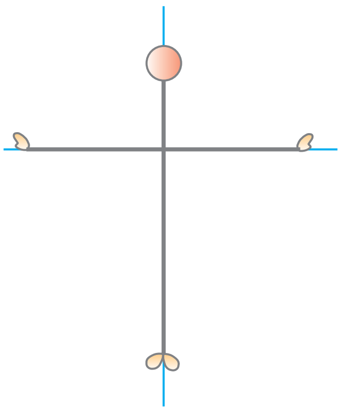
$y = 2x^2$



$y = x^2$

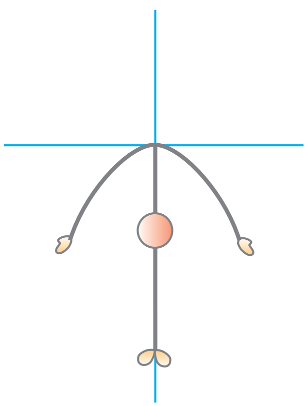
حالا اگر $y = 0x^2$ باشد چه می‌شود؟

درست است! باید دست‌ها در امتداد محور xها باز شود.



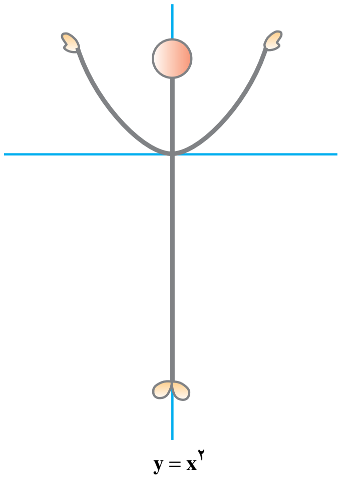
$y = 0x^2$

خوب! حالا پاها را جفت کنید و خَم شوید!

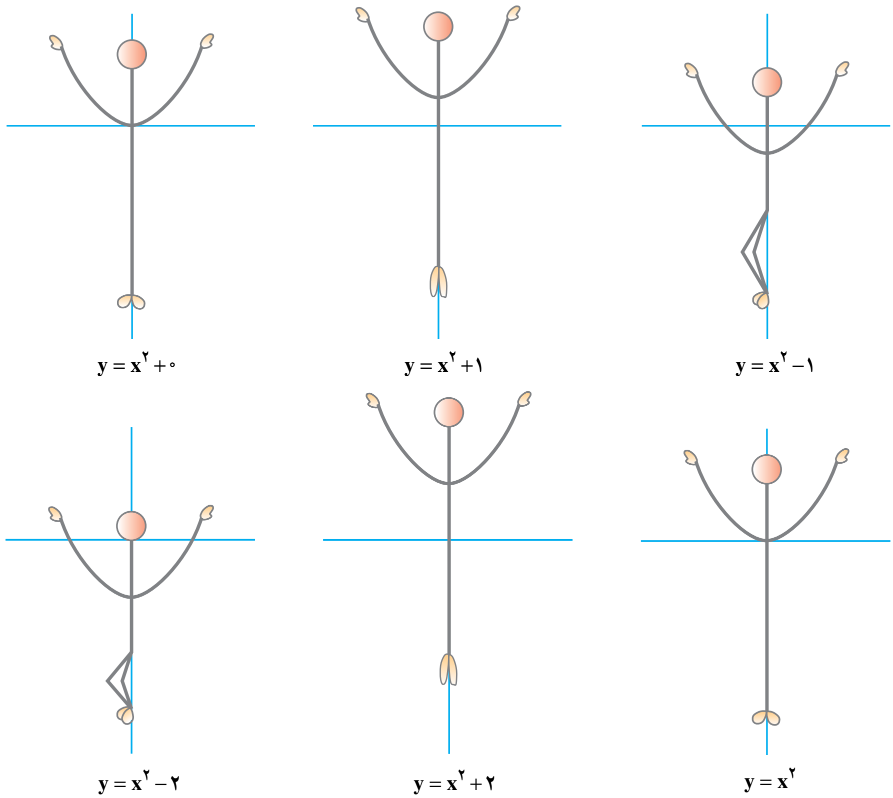


$y = -x^2$

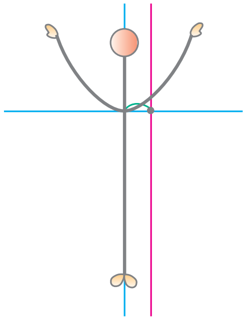
سپس دوباره به حالت اوّل باز گردید.



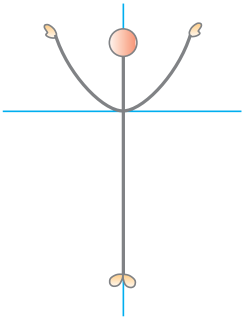
تمرین ۳: این تمرین‌ها نشان می‌دهند که چگونه اضافه‌کردن یک مقدار ثابت به سمت راست معادلهٔ $y = x^۲$ ، حرکت‌های بالا و پایین سهمی را تغییر می‌دهد. شما طبق شکل، به ورزش بدن‌سازی خود، ادامه دهید!



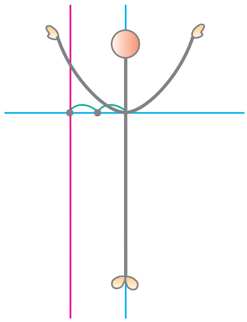
تمرین ۴: تمرین‌های این قسمت، نیازمند تحرّک بیشتری است و حرکت سهمی به‌سمت راست یا چپ را نشان می‌دهد. شما هم با تحرّک بیشتر، به ورزش خود ادامه دهید!



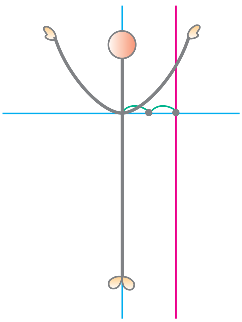
$y = (x - ۱)^{۲}$



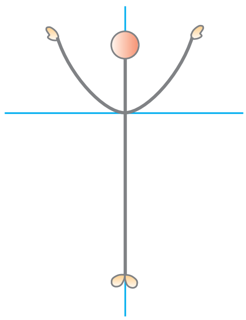
$y = (x + ۰)^{۲}$



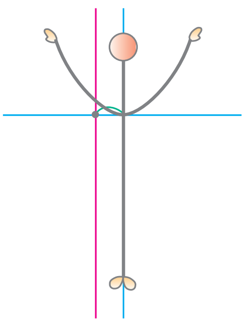
$y = (x + ۲)^{۲}$



$y = (x - ۲)^{۲}$

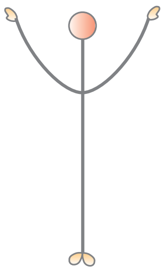


$y = x^{۲}$

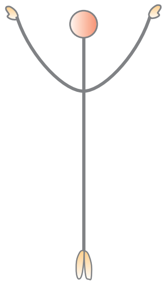


$y = (x + ۱)^{۲}$

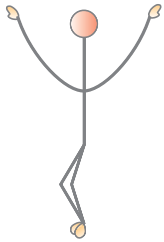
تمرین ۵: حالا که عضلات شما به‌کار افتاده‌اند و آمادگی بیشتری پیدا کرده‌اید، حرکات ورزشی خود را با تنوّع و تحرک بیشتری، مانند شکل‌های زیر، انجام دهید!



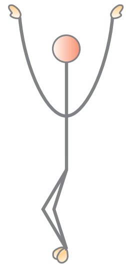
$y = x^2$



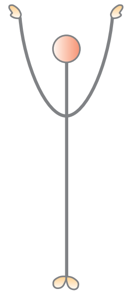
$y = x^2 + 1$



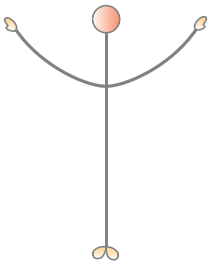
$y = x^2 - 1$



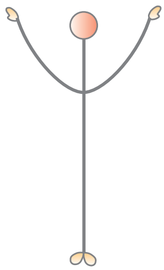
$y = 2x^2 - 1$



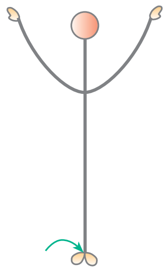
$y = 2x^2 + 0$



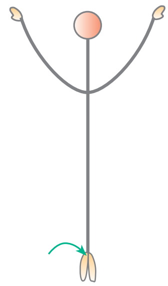
$y = \frac{1}{2}x^2$



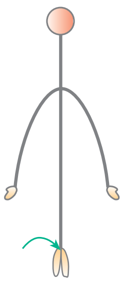
$y = x^2$



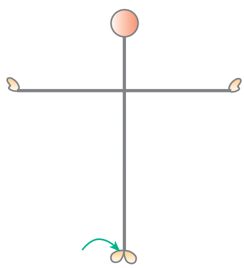
$y = (x-1)^2$



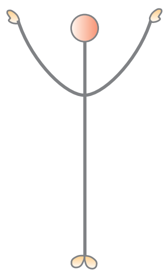
$y = (x-1)^2 + 1$



$y = -2(x-1)^2 + 1$



$y = 0(x-1)^2 + 1$



$y = x^2$