

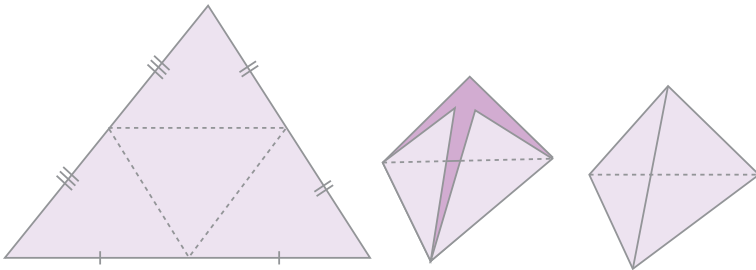
حجم



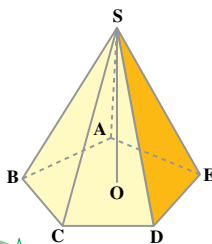
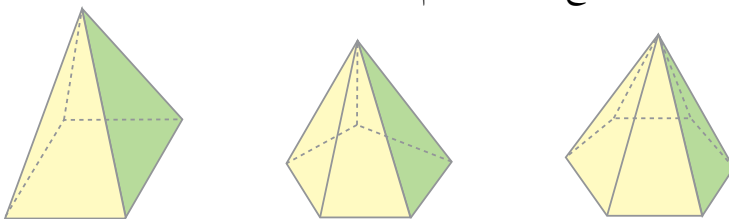
هرم



در شکل‌های زیر چگونگی ساختن جسمی را که هرم نامیده می‌شود، مشاهده می‌کنید.



در شکل‌های زیر انواع دیگری از هرم‌ها نشان داده شده است.



همان‌طور که می‌بینید، یک هرم از یک چندضلعی (که قاعده‌ی هرم نامیده می‌شود) و چند مثلث جانبی تشکیل می‌شود. در شکل مقابل، چندضلعی قاعده و نقطه‌ی S رأس هرم است. ارتفاع این هرم، فاصله‌ی رأس S از قاعده‌ی آن است.

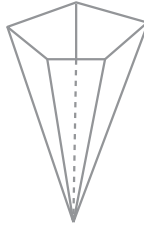
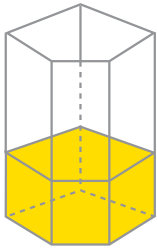


شکل‌های بالا نشان می‌دهند که با سه بُرش، می‌توان یک مکعب را به سه هرم مربع‌القاعده‌ی متساوی، تقسیم کرد؛ پس، حجم هریک از این هرم‌ها، یک سوم حجم مکعب است. مشاهده می‌کنید که قاعده‌ی هریک از سه هرم یکی از وجه‌ها و ارتفاع آن یکی از یال‌های مکعب است و می‌دانید که

$$\text{طول یال} \times \text{مساحت یک وجه} = \text{حجم مکعب}$$

بنابراین،

$$\text{ارتفاع هرم} \times \text{مساحت قاعده‌ی هرم} = \frac{1}{3} \times \text{حجم مکعب} = \frac{1}{3} \times \text{حجم هریک از هرم‌های بالا}$$



با انجام دادن آزمایش زیر، می‌توان نشان داد که این دستور برای هر نوع هرم درست است. دو ظرف به شکل‌های منشور و هرم که قاعده و ارتفاع مساوی داشته باشند، انتخاب می‌کنیم. ظرفی را که به شکل هرم است، از آب پُر می‌کنیم و در ظرف منشور شکل خالی می‌کنیم. مقدار آب، $\frac{1}{3}$ گنجایش منشور می‌شود.

$$\text{حجم منشور} \times \frac{1}{3} = \text{حجم هرم}$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{حجم هرم}$$

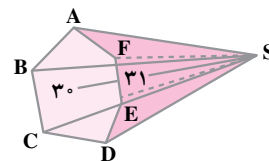
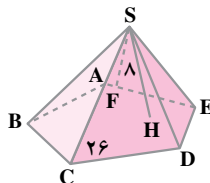
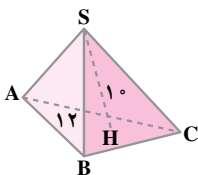
پس،

به‌طور کلی، حجم یک هرم برابر است با یک سوم حاصل ضرب مساحت قاعده‌ی آن در ارتفاع

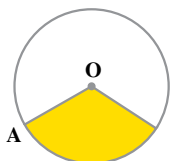
آن.

کار در کلاس

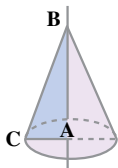
مساحت قاعده و ارتفاع هر هرم داده شده است. حجم آن‌ها را حساب کنید.



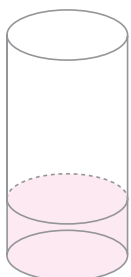
مخروط



در شکل روبه‌رو، روش ساختن جسمی را که **مخروط** نامیده می‌شود، مشاهده می‌کنید.



می‌توان تصور کرد که یک مخروط از دوران مثلثی قائم‌الزاویه، حول یک ضلع زاویه قائمه آن، پدید می‌آید.



دستور محاسبه‌ی حجم مخروط هم مانند حجم هرم است. درستی این مطلب را می‌توانیم با آزمایش روبه‌رو تحقیق کنیم؛ دو ظرف به شکل‌های استوانه و مخروط که قاعده و ارتفاع مساوی داشته باشند، انتخاب می‌کنیم. ظرف مخروط شکل را از آب پُر کرده و در ظرف استوانه‌ای شکل خالی می‌کنیم. مقدار آب، $\frac{1}{3}$ گنجایش

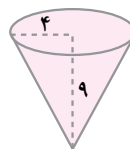
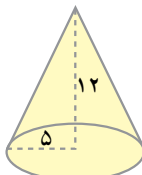
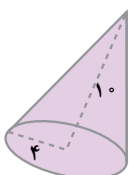
ظرف استوانه‌ای شکل است. $\text{حجم استوانه} \times \frac{1}{3} = \text{حجم مخروط}$

پس، $\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$

به‌طور کلی، حجم یک مخروط برابر است با یک سوم حاصل ضرب مساحت قاعده‌ی آن در ارتفاع آن.

کار در کلاس

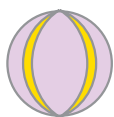
۱- شعاع قاعده و ارتفاع هر مخروط داده شده است. حجم هریک را حساب کنید.



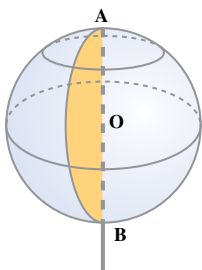
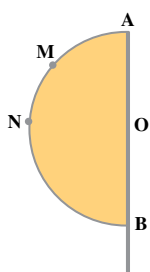
۲- یک مثلث قائم الزاویه با ضلع‌های قائم ۳ و ۴ سانتی متر، یک بار حول ضلع ۳ سانتی متری و یک بار حول ضلع ۴ سانتی متری دوران داده شده است. حجم مخروط حاصل از هر دوران را حساب کنید.



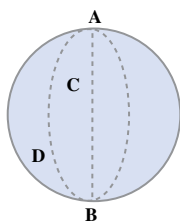
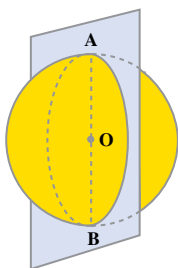
کره



توپ نمونه‌ای از اجسام کروی شکل (به شکل کره) است.



می‌توان تصور کرد که یک کره از دوران یک نیم‌دایره، حول قطر آن پدید می‌آید. در این دوران، هر نقطه‌ی نیم‌دایره، دایره‌ای را پدید می‌آورد که مرکز آن روی قطر AB (محور دوران) قرار دارد. هریک از این دایره‌ها، مدار نامیده می‌شود.



اگر کره را با صفحه‌ای که از محور دوران آن می‌گذرد، قطع کنیم، فصل مشترک، دایره‌ای است که نصف‌النهار نامیده می‌شود.

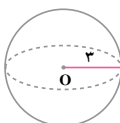
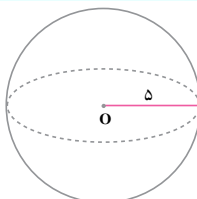
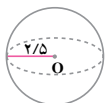
در دبیرستان خواهید دید که مساحت کره و حجم آن از قاعده‌های زیر به دست می‌آیند.

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2 \quad \text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

کار در کلاس

۱- حجم و مساحت هریک

از کره‌های زیر را حساب کنید.

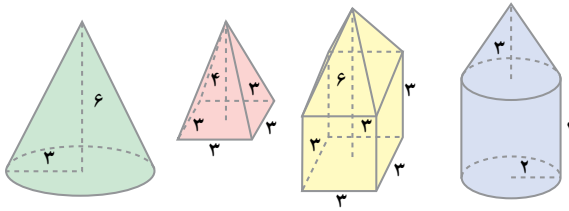


- ۲- نیم‌دایره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر حول قطر آن دوران داده شده است. حجم و مساحت کره‌ی حاصل را حساب کنید.
- ۳- دایره‌ای به قطر 12 سانتی‌متر حول قطر آن دوران داده شده است. حجم و مساحت کره‌ی حاصل را حساب کنید.

تمرین



۱- شکل بعضی اجسام و اندازه‌های آن‌ها به صورت‌های زیر است؛ حجم هر یک را حساب کنید.



- ۲- مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های قائم 6 و 8 سانتی‌متر، حول ضلع 8 سانتی‌متری دوران داده شده است. حجم مخروط حاصل را حساب کنید.
- ۳- اندازه‌های اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی یک مثلث قائم‌الزاویه 5 و 12 است. حجم حاصل از دوران این مثلث حول هر یک از ضلع‌های زاویه‌ی قائمه آن را حساب کنید. از مقایسه‌ی آن‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

- رسم شکل
- جدول نظام‌دار
- الگویابی
- حذف حالت‌های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش

حل مسئله



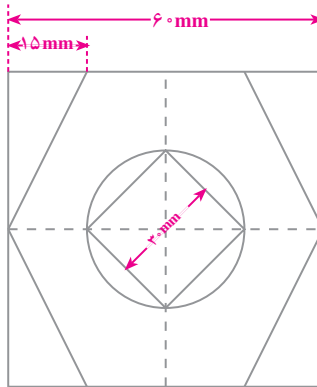
یک چاه استوانه‌ای شکل به قطر 2 متر و ارتفاع 10 متر حفر شده است. خاک



این چاه روی زمین به صورت یک مخروط با قاعده‌ی دایره‌ای به شعاع 2 متر ریخته شده است. ارتفاع این مخروط را پیدا کنید. (وقتی خاک حاصل از حفر کردن

زمین را بیرون می‌ریزند، حجم آن تقریباً $1/5$ برابر می‌شود.)

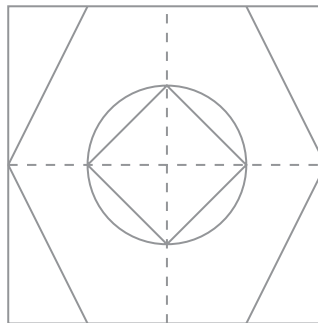
الف- ابتدا اندازه‌های داده شده در این قسمت را ۲ برابر کنید؛ سپس، دستورالعمل رسم را براساس آن کامل کنید. سایر اندازه‌های مورد نیاز را با توجه به عددهای داده شده پیدا کنید و بنویسید.



ب-

- ۱- مربعی به ضلع — سانتی متر در وسط کاغذ رسم کنید.
- ۲- وسط ضلع‌های مربع را با خط چین به هم وصل کنید.
- ۳- به مرکز وسط مربع و به شعاع — سانتی متر، یک دایره رسم کنید.
- ۴- روی ضلع‌های بالا و پایین مربع از هر طرف به اندازه‌ی — سانتی متر جدا کرده و آن را به وسط ضلع‌های دیگر وصل کنید.
- ۵- مربع داخل دایره را رسم کنید.

پ- شکل نهایی



ت- تا این جا با کشیدن رسم در مقیاس مورد نظر و اجرای دستورالعمل آن آشنا شدید. آیا شما هم می‌توانید دستورالعمل دیگری برای کشیدن رسم، بنویسید؟ در این مورد با دوستان خود گفت‌وگو کنید و یک دستورالعمل مثل قسمت ب بنویسید.

تمرین دوره‌ای ۲

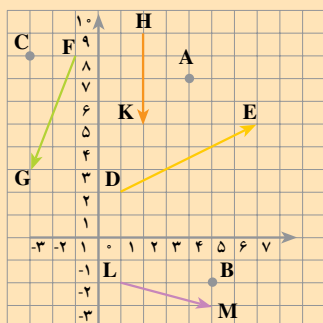


۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد توانی بنویسید.

$$\begin{array}{ccc} (-4)^2 \times (-4)^7 & 7^8 \div 7^5 & 5^2 \times 5^9 \\ 7^4 \times 8^4 & 9^5 \div 4^5 & 4^6 \times 9^6 \end{array}$$

۲- جذر هریک از عددهای زیر را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

$$\begin{array}{ccc} 38/7 & 30.21 & 42/5 \end{array}$$



۳- به شکل روبه‌رو توجه کنید؛ مختصات هریک از نقاط

و بردارهای زیر را پیدا کنید.

$$\vec{FG}, \vec{DE}, \vec{C}, \vec{B}, \vec{A}, \vec{HK}, \vec{LM}.$$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ccc} 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & (-2) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} & 5 \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} & 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

۵- با توجه به مختصات بردارهای واحد، $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، هریک از بردارهای زیر را

برحسب بردارهای واحد بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5i + 7j, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۶- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$\begin{array}{ccc} 5(2x - 7y) - 2(5x + 2y) & 6(x - 3y) + 9(3x + 2y) \\ 7(2x + 3y) & 3(4x + 5y) \\ \underline{-(3x + 21y)} & \underline{-2(6x - 4y)} \end{array}$$

۷- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$2x - 5 = 7 \qquad 3x - 4 = 4 \qquad 7x - \frac{5}{3} = 3x$$

۸- نمودار هریک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور مشخص کنید.

الف - $\{x \mid 2 < x < 6\}$ ب - $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$

پ - $\{x \mid -4 \leq x\}$ ت - $\{x \mid x < 2\}$

۹- نمودار هریک از مجموعه‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

الف - $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ ب - $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

پ - $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} x=0 \text{ یا } 5 \\ y=1 \end{matrix} \right\}$ ت - $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} x=2 \\ y=2 \text{ یا } 3 \end{matrix} \right\}$

۱۰- هریک از خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$y = 3x + 1 \qquad y = 4x$$

$$x = 4 \qquad 3y + 5x = 1$$

۱۱- شیب هریک از خط‌های زیر را پیدا کنید؛ سپس، مشخص کنید که در یک دستگاه

مختصات، کدام خط‌ها با هم موازی‌اند.

الف - $y = 2x$ ب - $8x - 4y = 1$ پ - $3x - y = 1$

ت - $y = 3x + 4$ ث - $5y = x - 5$ ج - $3y = 6x + 1$

۱۲- مختصات نقطه‌ای از خط $5y - 2x = 7$ را که طول آن ۳ است، پیدا کنید. آیا نقطه‌ی

$$A = \left[+\frac{7}{5} \right]$$

روی این خط است؟

۱۳- معادله‌ی خط a را که از مبدأ بگذرد و شیب آن ۲ باشد، بنویسید؛ سپس، این خط را در

یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۴- معادله‌ی خط b را که از مبدأ بگذرد و با خط $x + y = 1$ موازی باشد، بنویسید. این خط

را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۵- معادله‌ی خطی را که از $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد و با $y = 2x - 3$ موازی باشد، بنویسید.

۱۶- عدد a را تعیین کنید؛ طوری که خط $y = ax - 1$ از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.



۱۷- عدد b را تعیین کنید؛ طوری که خط $y = 2x + b$ از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۸- عدد a را تعیین کنید؛ طوری که خط $2y - ax = 1$ از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۹- نمودار مجموعه‌ی $\{x \mid -2 < x \leq 4\}$ را روی محور مشخص کنید.

۲۰- هریک از خط‌های $y = 2x + 7$ و $3x - 5y = 6$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۲۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ -3x + 7y = 11 \end{cases} \quad \text{پ} \quad \begin{cases} 4x - y = 10 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \quad \text{ب} \quad \begin{cases} 3x - 4y = 29 \\ x - y = 8 \end{cases} \quad \text{الف}$$

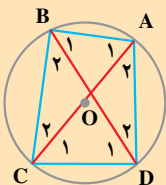
۲۲- نمره‌های علوم یک کلاس ۳۰ نفره به صورت زیر است.

۷	۸	۸	۱۰	۱۱	۱۱	۱۱	۱۱/۵	۱۲	۱۲
۱۲/۵	۱۳	۱۳	۱۴	۱۵	۱۵	۱۵/۵	۱۵/۵	۱۶	۱۶/۵
۱۷	۱۷/۵	۱۷/۵	۱۸	۱۸/۵	۱۸/۵	۱۹	۱۹	۱۹/۵	۲۰

پس از کامل کردن جدول زیر برای این کلاس، میانگین کلاس را حساب کنید.

دسته	فراوانی	متوسط هر دسته	فراوانی \times متوسط
۹ تا ۹			
۱۰ تا ۱۱			
۱۲ تا ۱۴			
۱۵ تا ۱۶			
۱۷ تا ۲۰			
جمع کل			

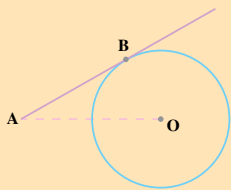
$$\text{میانگین کلاس} = \frac{\text{جمع کل}}{\text{تعداد دانش‌آموزان}} = \frac{\quad}{\quad}$$



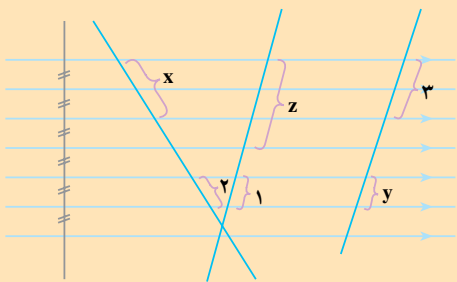
۲۳- در شکل مقابل، AC قطر دایره است.

الف - چرا $\hat{ADC} = \hat{ABC}$ است؟

ب - A_1 با کدام زاویه مساوی است؟

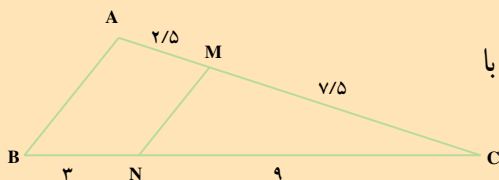


۲۴- نقطه‌ی A به فاصله‌ی 10 سانتی متر از مرکز دایره‌ی C قرار دارد. شعاع دایره برابر با 6 سانتی متر است و AB بر این دایره مماس است. طول پاره خط AB را حساب کنید.

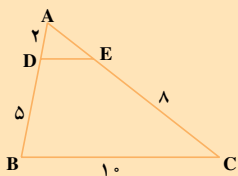


۲۵- در شکل روبه‌رو، اندازه‌های مجهول را حساب کنید.

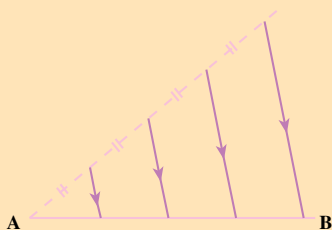
۲۶- پاره خطی به طول 9 سانتی متر رسم کنید؛ سپس، آن را به دو قسمت تقسیم کنید؛ طوری که یکی از قسمت‌ها 3 برابر دیگری باشد.



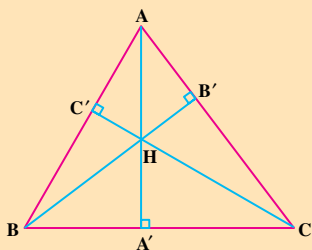
۲۷- در شکل روبه‌رو، چرا MN موازی با AB است؟



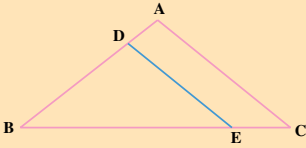
۲۸- در شکل روبه‌رو $DE \parallel BC$ است. اندازه‌های AE و DE را حساب کنید.



۲۹- اگر AB برابر 6 سانتی متر باشد، اندازه‌های هریک از پاره خط‌هایی که روی AB جدا شده است، چند سانتی متر است؟



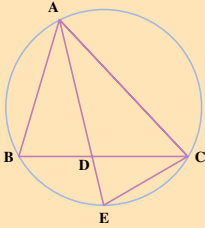
۳۰- در شکل روبه‌رو، AA' ، BB' و CC' ارتفاعات مثلث ABC هستند. مثلث $A'BH$ با کدام مثلث متشابه است؟ چرا؟



۳۱- در شکل روبه‌رو، $DE \parallel AC$ است. چرا دو مثلث

ABC و DBE متشابه‌اند؟

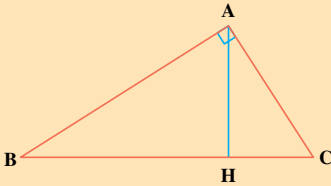
نسبت اضلاع متناظر آن‌ها را بنویسید.



۳۲- AE نیمساز زاویه A است؛ چرا دو مثلث ABD و AEC

متشابه‌اند؟

تناسب بین اضلاع متناظر آن‌ها را بنویسید.



۳۳- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ و AH ارتفاع وارد بر

وتر BC است. چرا دو مثلث ABC و AHC متشابه‌اند؟ تناسب

بین اضلاع متناظر این دو مثلث را بنویسید.

- رسم شکل
- جدول نظام‌دار
- الگویابی
- حذف حالت‌های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش

حل مسئله



۱- گنجایش یک پارچ، پنج برابر گنجایش یک لیوان است.

مجموع گنجایش پارچ و لیوان ۲ لیتر است. گنجایش پارچ و گنجایش لیوان

چه قدر است؟

۲- اگر حسن ۳ دفتر و ۵ خودکار بخرد، ۱۰۰ تومان از پولش باقی می‌ماند. اگر

او ۲ دفتر و ۸ خودکار بخرد، برایش پولی باقی نمی‌ماند. قیمت ۲ دفتر با قیمت ۵ خودکار

مساوی است. الف - قیمت یک دفتر و قیمت یک خودکار را حساب کنید. ب- حسن

چه قدر پول دارد؟

۳- دو کارگر یکی باتجربه و یکی کم‌تجربه است. کارگر باتجربه برای رنگ کردن

یک دیوار، ۱۰ ساعت زمان لازم دارد. کارگر کم‌تجربه همان دیوار را در ۱۵ ساعت

رنگ می‌کند. برای این که دیوار در کوتاه‌ترین زمان رنگ شود، باید چه کسری از آن را

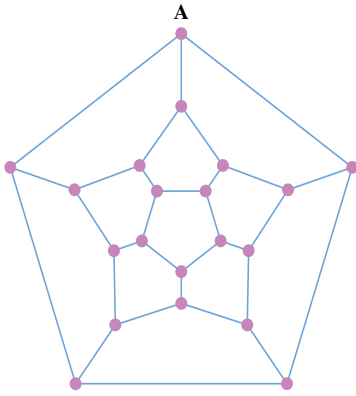
به کارگر باتجربه و چه کسری را به کارگر کم‌تجربه بسپریم تا هم‌زمان رنگ زدن را آغاز

کنند؟ در این صورت، رنگ‌آمیزی دیوار چه قدر طول می‌کشد؟

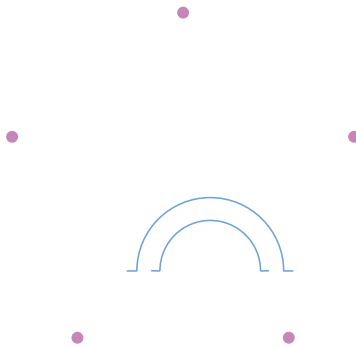
۴- نمره‌ی ریاضی دانش‌آموزان کلاستان را در نیم سال اول و میان نیم سال دوم

تهیه کنید. آن‌گاه میانگین نمره‌ی ریاضی کلاس خود را در هریک از دو نوبت حساب کنید.

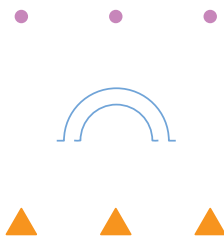
فروشنده‌ی دوره‌گرد



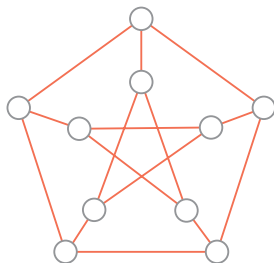
شکل روبه‌رو، نقشه‌ی ۲۰ خانه‌ی روستایی و راه‌های بین آن‌ها را نشان می‌دهد. یک فروشنده‌ی دوره‌گرد می‌خواهد هر روز از خانه‌ی A شروع کند و مسیری را طی کند که از هر خانه، فقط یک بار بگذرد و سرانجام، به نقطه‌ی A بازگردد. مسیر او را مشخص کنید. هر \bullet یک خانه‌ی روستایی را نشان می‌دهد.



در شکل روبه‌رو، هر \bullet یک شهرک است. می‌خواهیم بین هر دو شهرک یک جاده بکشیم؛ طوری که هیچ دو جاده‌ای تقاطع نداشته باشند. با استفاده از پل، نقشه‌ی راه‌ها را رسم کنید.



هر \bullet نماینده‌ی یک معدن و هر \blacktriangle نماینده‌ی یک کارخانه است. می‌خواهیم از هر معدن، جاده‌ای به هریک از کارخانه‌ها بکشیم؛ طوری که هیچ‌یک از جاده‌ها دیگری را قطع نکند. نقشه‌ی جاده‌ها را تهیه کنید.



در شکل روبه‌رو، هر \circ یک رأس نامیده می‌شود. دو رأس را در صورتی که با یک پاره‌خط به هم وصل شده باشند، مجاور می‌نامیم. با به‌کار بردن ۳ رنگ، رأس‌ها را طوری رنگ کنید که رأس‌های مجاور هم‌رنگ نباشند.

