فصل ۵

احتمال مقدماتی

در گفت و شنودهای روزمره، معمولاً از شانس وقوع پیشامدها سخن می‌گوییم. مثلاً از شانس برنده شدن تیم فوتبال مورد علاقه‌ی خود یا از شانس بارندگی در یکی از ماه‌های تابستان حرف می‌زنیم. گاهی به جای **شانس** از کلمه‌ی **احتمال** استفاده می‌شود.

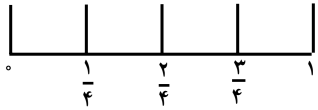
اصطلاحات **شانس** و **احتمال** در توصیف پدیده‌هایی به‌کار می‌روند که نمی‌توان نتیجه‌ی آنها را پیش از وقوع به‌طور قطع تعیین کرد زیرا نسبت به آنچه رخ خواهد داد اطمینان نداریم: نمی‌دانیم آیا تیم فوتبال مورد علاقه‌ی ما در بازی برنده خواهد شد؟ آیا در روز خاصی از تابستان بارندگی خواهیم داشت؟ در مقابل، پدیده‌هایی وجود دارند که می‌توان نتیجه‌ی آن‌ها را از پیش به‌طور قطع تعیین نمود: مطمئن هستیم که فردا خورشید دوباره طلوع خواهد کرد یا اگر به چای، شکر اضافه کنیم انفجار رخ نخواهد داد. در این‌گونه موارد به نتیجه‌ی پیشامد **مطمئن** هستیم.

احتمال به‌چه کار می‌آید؟ شاید مهمترین کاربرد احتمال کمک به تصمیم‌گیری در جریان زندگی روزمره باشد. اگر دونده‌ای بداند که شانس او در به‌دست آوردن مدال طلا اندک است، ممکن است تصمیم بگیرد با جدیّت بیشتری تمرین کند. اگر بدانید شانس اینکه یک داروی گیاهی معینی بیماری شما را برطرف سازد اندک است، ممکن است تصمیم بگیرید که از آن دارو استفاده نکنید. اگر احتمال زیادی بدهید که باران خواهد بارید و قصد بیرون رفتن از منزل را داشته باشید، با خود یک چتر یا بارانی همراه می‌برید. در انواع تصمیم‌گیری‌های صنعتی، علمی، اجتماعی و شخصی، احتمال دخالت دارد. مثلاً مدیران صنایع تولیدی به دانستن احتمال سودآوری محصول جدید یا احتمال بی‌عیب و نقص بودن قطعه‌ی ساخته شده علاقه‌مند هستند.

> پدیده‌هایی که می‌توان نتیجه‌ی آن‌ها را پیش از وقوع به‌طور قطع تعیین کرد **پدیده‌های قطعی** و پدیده‌هایی که نمی‌توان نتیجه‌ی آن‌ها را پیش از وقوع به‌طور قطع معین نمود، **پدیده‌های تصادفی** نامیده می‌شوند.

تمرین

۱ــ برای آشنایی بیشتر با پدیده‌های تصادفی، درباره‌ی هر کدام از پیشامدهای زیر فکر کنید. ببینید وقوع کدام‌یک محتمل‌تر است و شانس وقوع کدام، اندک. از مقیاس عددی زیر استفاده کنید و به هر پیشامد برحسب میزان شانس وقوعی که برای آن حدس می‌زنید، عددی بین ۰ و ۱ نسبت دهید. ۰ را به پدیده‌های غیرممکن و ۱ را به پدیده‌های قطعی نسبت دهید.



الف) طی این هفته دست کم یک روز در مدرسه غیبت خواهید داشت ؛

ب) یک روز در این هفته برای صبحانه کره و عسل خواهید خورد ؛

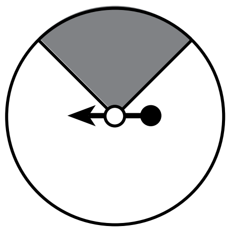
پ) در شهر شما در ماه تیر برف می‌بارد ؛

ت) خورشید فردا طلوع خواهد کرد ؛

ث) انسان می‌تواند دو ماه بدون آب زندگی کند ؛

ج) اولین بچه‌ای که بعد از این لحظه به دنیا خواهد آمد پسر است.

۲ــ مطابق شکل زیر، عقربه‌ای که در مرکز صفحه لولا شده، صفحه را به دو ناحیه‌ی **قرمز** و **سفید** تقسیم کرده است. این صفحه همراه با عقربه‌ی لولا شده به آن‌را **صفحه عقربه** می‌گوییم.



صفحه‌ی عقربه

الف) اگر عقربه را بچرخانید و سپس رها کنید آیا شانس این‌که نوک عقربه روی هر کدام از این ناحیه‌ها بایستد یکسان است؟ اگر هست چرا؟ اگر نیست بیشتر احتمال می‌دهید که روی کدام ناحیه بایستد؟ چرا؟

ب) آیا می‌توانید با اطمینان بگویید که اگر عقربه را ۱۰۰ بار بچرخانید لااقل یک‌بار نوک عقربه روی ناحیه‌ی قرمز قرار می‌گیرد؟

پ) آیا امکان دارد با ۱۰۰ بار چرخاندن باز هم نوک عقربه روی ناحیه‌ی قرمز

قرار نگیرد؟

۳ــ به بعضی از پیشامدهایی که ممکن است در زندگی شما رخ دهند فکر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) سه پیشامد قطعی را نام ببرید.

ب) سه پیشامد غیرممکن را نام ببرید.

پ) سه پیشامد را نام ببرید که به وقوع آن خوش‌بین هستید.

ت) سه پیشامد را نام ببرید که شانس وقوع آن‌ها کم باشد.

۵ ــ ۱ــ آزمایش‌های تصادفی

بسیاری از پدیده‌ها و اتفاقات در زندگی روزانه شانسی یا تصادفی هستند. یعنی نتیجه‌ی آن‌ها را از پیش به‌طور قطع نمی‌دانیم اما شاید بتوانیم همه‌ی نتایج ممکن را فهرست کنیم. با مشاهده و بررسی تعداد دفعاتی که هر کدام از آن نتایج رخ می‌دهد، می‌خواهیم به پیشامدها عددهایی را نسبت دهیم که معرّف **شانس** یا **احتمال** وقوع آنها هستند.

پدیده‌ی ساده‌ای را در نظر می‌گیریم : داور یک بازی فوتبال می‌خواهد با پرتاب کردن یک سکه، تعیین کند که در شروع بازی، توپ در اختیار کدام‌یک از دو تیم باشد. آیا سکه به «پشت» می‌نشیند یا به «رو»[1]؟ نمی‌توانیم نتیجه‌ی پرتاب را از پیش تعیین کنیم ولی می‌دانیم که فقط دو نتیجه وجود خواهد داشت. می‌توانیم با پرتاب مکرر یک سکه،و مشاهده‌ی نتیجه‌ی حاصل از آن، نتایج ممکن آزمایش پرتاب سکه را بررسی کنیم. در علم احتمال، به عملی که برای جمع‌آوری داده‌ها صورت می‌پذیرد، **آزمایش** می‌گوییم و اگر نتیجه‌ی این آزمایش را از پیش نتوان به‌طور قطع معین کرد، آن را **آزمایش تصادفی** می‌نامیم. آزمایش پرتاب سکه یک آزمایش تصادفی است زیرا پیش از پرتاب سکه نمی‌توان به‌طور قطع معین کرد که «رو» خواهد آمد یا «پشت». با این حال، تمام نتایج ممکن در این آزمایش همین دو تا هستند.

*مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی، **فضای نمونه‌ای** آن نامیده می‌شود.*

۱ــ آن طرفی از سکه را که عدد روی آن نوشته شده است «رو» و طرف دیگر را «پشت» می‌نامیم.

فعالیت ۵ ــ ۱

یک سکه را ۵۰ بار پرتاب کنید و نتایج این آزمایش تصادفی را در جدولی همانند جدول زیر گردآوری کنید.

جدول (۱)

	خط نشان	تعداد کل
رو		
پشت		
کل		۵۰

هر بار که سکه را پرتاب می‌کنید نتیجه را با یک علامت، زیر ستون «خط‌نشان» ثبت کنید و در انتها آن‌ها را بشمارید و عدد حاصل را زیر ستون «تعداد کل» یادداشت کنید.

۱ــ نسبت تعداد دفعاتی که سکه «رو» آمده است به تعداد کل پرتاب‌ها، یعنی ۵۰ را به‌دست آورید ؛

به عبارت دیگر کسر

$$\text{نسبت «روها»} = \frac{\text{تعداد روها}}{\text{تعداد پرتاب‌ها}}،$$

را حساب کنید.

۲ــ نسبت پرتاب‌هایی که «پشت» آمده است را نیز مانند قسمت ۱ حساب کنید.

۳ــ نتیجه‌ی آزمایش خود را با نتایجی که دیگر دانش‌آموزان کلاس به‌دست آورده‌اند مقایسه کنید. آیا در نتایج تفاوتی به چشم می‌خورد؟

۴ــ آیا نتایج این آزمایش، همان چیزی بود که شما انتظار داشتید؟

*نسبت «رو»هایی که در آزمایش پرتاب سکه به‌دست آمد همان **فراوانی نسبی** است.*

اگر در ۵۰ بار پرتاب سکه، ۱۶ بار «رو» ظاهر شود، عدد $\frac{۱۶}{۵۰}$ یعنی فراوانی نسبی تعداد «رو»ها، **تخمین احتمال** یا شانس مشاهده‌ی «رو» در این آزمایش نامیده می‌شود. بنابراین از فراوانی نسبی برای تخمین احتمال استفاده می‌کنیم. ممکن است تعداد روهایی که شما مشاهده کرده‌اید عدد دیگری باشد، در این صورت تخمین شما هم برای احتمال به‌دست آوردن «رو» متفاوت خواهد بود. اعداد مختلفی که با انجام فعالیت ۵ ــ ۱ برای تعداد روها به‌دست آورده‌اید، تخمین‌های مختلفی برای تعداد روها خواهد بود. بنابراین، تخمین احتمال رخ دادن یک نتیجه ممکن است از آزمایشی به آزمایش دیگر فرق کند.

گاهی تخمین احتمال بدون انجام آزمایش تقریباً غیرممکن است. برای مثال اگر بخواهید احتمال این‌که در یک تقاطع ماشین‌ها از سمت چپ وارد شوند را تخمین بزنید، باید تعدادی از ماشین‌ها را مشاهده کنید و ببینید چند تا از آن‌ها از سمت چپ وارد می‌شوند. اگر از ۵۰ ماشینی که مشاهده کرده‌اید ۲۰ تای آن‌ها از سمت چپ وارد تقاطع شوند، تخمین احتمال $۰/۴۰ = \frac{۲۰}{۵۰}$ خواهد بود.

تخمین احتمال معمولاً برای یک یا چند نتیجه از مجموعه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی به‌کار می‌رود. این نتایج خاص، زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی را تشکیل می‌دهند که آن را **پیشامد** می‌نامیم. تاکنون اصطلاح **پیشامد** را به معنای اتفاقات روزمره و طبیعی به‌کار برده‌ایم ولی از این پس **معنای اخیر** آن موردنظر است. تخمین احتمال پیشامد E[1] را می‌توان با کسر

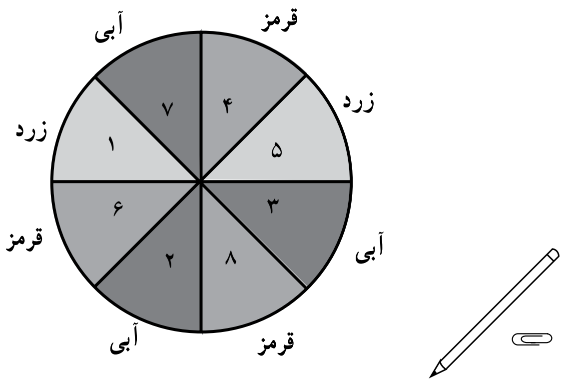
$$P(E) = \frac{\text{تعداد نتایج مشاهده شده که در} E \text{ هستند}}{\text{تعداد کل مشاهدات در آزمایش}} \ ^{۲}$$

تعریف کرد که همان فراوانی نسبی است. بنابراین اگر یک سکه را ۵۰ بار پرتاب کنیم و ۱۶ بار «رو» بیاید، E عبارت است از پیشامد «رو آمدن» و $P(E) = \frac{۱۶}{۵۰} = ۰/۳۲$.

فعالیت ۵ ــ ۲

مطابق شکل، یک صفحه عقربه را به هشت قسمت مساوی تقسیم کنید، به‌جای عقربه‌ی چرخان می‌توانید یک گیره‌ی کاغذ بردارید و آن را حول مدادی که نوک آن را در مرکز صفحه عقربه

۱ــ Event
۲ــ Probability



قرار داده‌اید، بچرخانید. قسمت‌ها را شماره‌گذاری کنید و آن‌ها را با سه رنگ **قرمز**، **زرد** و **آبی**، رنگ کنید. عقربه را ۳۰ بار بچرخانید و هر بار رنگی را که نوک عقربه روی آن می‌ایستد یادداشت کنید. اگر عقربه روی یک خط ایستاد، دوباره آن را بچرخانید تا روی یکی از قسمت‌ها قرار گیرد. حال به کمک داده‌هایی که به دست آورده‌اید به سؤالات زیر پاسخ دهید :

۱ــ در این ۳۰ بار آیا ایستادن روی رنگ **قرمز** محتمل‌تر است یا **زرد**؟ چرا؟

۲ــ در این ۳۰ بار آیا ایستادن روی رنگ **آبی** محتمل‌تر است یا **قرمز**؟ چرا؟

۳ــ اگر یک دفعه‌ی دیگر عقربه را بچرخانید، احتمال ایستادن نوک عقربه روی رنگ **زرد** را تخمین بزنید ؛

۴ــ اگر یک دفعه‌ی دیگر عقربه را بچرخانید، احتمال ایستادن نوک عقربه روی رنگ **آبی** را تخمین بزنید ؛

۵ ــ اگر این عقربه را ۹۰ بار دیگر بچرخانید، انتظار شما از ایستادن عقربه روی رنگ **آبی** چه عددی است؟

۶ــ اعدادی را که به‌دست آورده‌اید با آنچه دیگر دانش‌آموزان کلاس به دست آورده‌اند مقایسه کنید و تعداد کل رنگ‌های **قرمز**، **آبی** و **زرد** مشاهده شده توسط کل کلاس را یادداشت کنید و مجدداً به سؤالات ۱ تا ۵ پاسخ دهید.

فعالیت ۵ ــ ۳

یک **تاس**[1] را ۶۰ بار پرتاب کنید و ببینید چه عددی ظاهر می‌شود. نتایج را در جدول زیر یادداشت کنید. مانند قبل مقابل هر عدد به ازای هر بار ظاهر شدن، یک خط در سطر خط‌نشان بکشید.

جدول (۲)

	تعداد ۱	تعداد۲	تعداد۳	تعداد ۴	تعداد ۵	تعداد ۶
خط نشان						
کل						

حال به کمک داده‌هایی که به‌دست آورده‌اید به سؤالات زیر پاسخ دهید :

۱ــ آیا در این پرتاب‌ها، همه‌ی شش عدد را مشاهده کرده‌اید؟ آیا انتظار داشتید در ۶۰ بار پرتاب، هر یک از اعداد لااقل یک بار ظاهر شود؟ توضیح دهید ؛

۲ــ احتمال ظاهر شدن عدد ۵ را تخمین بزنید ؛

۳ــ احتمال ظاهر شدن عدد ۴ را تخمین بزنید ؛

۴ــ پاسخ سؤال‌های ۲ و ۳را مقایسه کنید ؛

۵ ــ احتمال ظاهر شدن عدد زوج را تخمین بزنید. این پاسخ را با پاسخ سؤال ۳ مقایسه کنید ؛

۶ــ احتمال ظاهر شدن عدد بزرگتر از ۴ را تخمین بزنید ؛

۷ــ اگر تاس را ۱۰۰ بار دیگر پرتاب کنید، چند بار ظاهرشدن عدد ۵ را انتظار می‌کشید؟

۸ ــ نتایجی را که ۱۰ نفر از دانش‌آموزان کلاس به‌دست آورده‌اند در جدولی مطابق جدول (۳) گردآوری کنید.

۱ــ تاس مکعبی است که روی وجوه آن اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده است.

جدول (۳)

جدول مرکب						
نفر	تعداد ۱	تعداد ۲	تعداد ۳	تعداد ۴	تعداد ۵	تعداد ۶
الف						
ب						
پ						
ت						
ث						
ج						
چ						
ح						
خ						
د						

۹ــ با استفاده از داده‌های به‌دست آمده توسط این ۱۰ نفر ؛

الف) احتمال ظاهر شدن عدد ۵ را تخمین بزنید و جواب را با پاسخ سؤال ۲ مقایسه کنید ؛

ب) احتمال ظاهر شدن عدد ۴ را تخمین بزنید و پاسخ را با پاسخ سؤال ۳ مقایسه کنید ؛

پ) احتمال ظاهر شدن عدد زوج را تخمین بزنید. این پاسخ را با پاسخ سؤال ۵ مقایسه کنید.

فعالیت ۵ ــ ۴

مدادتان را بردارید و آماده‌ی یادداشت کردن یک عدد شوید. آماده‌اید! بی درنگ یکی از اعداد بین ۱ تا ۴ را یادداشت کنید. سپس در جدول زیر تعداد دانش‌آموزان کلاس خود را که یکی از اعداد ۱ تا ۴ را انتخاب کرده‌اند بنویسید.

جدول (۴)

۴	۳	۲	۱

۱ــ هر عدد چند بار انتخاب شده است؟

۲ــ فراوانی نسبی کدامیک از این اعداد بزرگ‌تر است؟

۳ــ اگر از بین اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴، فراوانی انتخاب عدد ۳ بیشتر از بقیه باشد، بنابر تجربه احتمال این که شخصی خارج از کلاس شما عدد ۳ را برگزیند برابر فراوانی نسبی ۳ است. به کمک جدول فوق این احتمال را برای همه‌ی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ تخمین بزنید.

۴ــ احتمال اینکه دانش‌آموزان اعداد یکی از ۱، ۲ و ۴ را انتخاب کرده باشند پیدا کنید.

تمرین ۱: در صورت وجود، دو تا از سینماهای شهر خود را انتخاب کنید[1]. یکی را (الف) بنامید و دیگری را (ب). حال از تعدادی از دانش‌آموزان مدرسه‌ی خود بپرسید که به کدام‌یک از این سینماها رفته‌اند. توجه کنید که این دانش‌آموزان را **به تصادف** از میان دانش‌آموزان مدرسه انتخاب کنید. تعداد آن‌هایی را که به هر کدام از این سینماها رفته‌اند یا نرفته‌اند در جدول زیر ثبت کنید :

جدول (۵)

	به (ب) رفته است	به (ب) نرفته است	تعداد کل
به (الف) رفته است			
به (الف) نرفته است			
تعداد کل			

اکنون دانش‌آموزی را انتخاب کنید که از او نپرسیده‌اید. براساس داده‌هایی که از دانش‌آموزان مورد سؤال به‌دست آورده‌اید :

الف) احتمال این‌که او به سینمای (الف) رفته باشد را تخمین بزنید ؛

ب) احتمال این‌که او به سینمای (ب) رفته باشد را تخمین بزنید ؛

پ) احتمال این‌که او اصلاً به هیچ کدام از این دو سینما نرفته باشد را تخمین بزنید ؛

ت) اگر ۱۰۰ دانش‌آموز در مدرسه‌ی شما وجود داشته باشند که از آن‌ها نپرسیده‌اید، انتظار دارید چند نفر از آن‌ها به هر دو سینما رفته باشند؟

۱ــ اگر در شهر شما سینما وجود ندارد، می‌توانید دو شبکه‌ی تلویزیونی را انتخاب کنید.

۵ــ۲ــ احتمال نظری

در هر بار پرتاب سکه[1] فقط دو نتیجه‌ی ممکن وجود دارد و شانس ظاهر شدن آن‌ها یکسان است، یعنی **احتمال** آمدن «رو» در پرتاب سکه، $\frac{۱}{۲}$ است و می‌نویسیم :

$$P(\text{ر}) = \frac{۱}{۲}$$ [2]

به همین صورت احتمال آمدن «پشت» نیز $\frac{۱}{۲}$ است. در مورد پرتاب تاس، ۶ نتیجه‌ی ممکن برای اعدادی که ظاهر می‌شوند وجود دارد که شانس ظاهر شدن آن‌ها نیز برابر است. از این‌رو، احتمال مشاهده‌ی عدد ۳ در پرتاب یک تاس $\frac{۱}{۶}$ است.

مثال ۱: فرض کنید می‌خواهیم پیشامد «آمدن عدد زوج» را پیدا کنیم. سه تا از شش نتیجه‌ی ممکن یعنی اعداد ۲، ۴ و ۶ در این پیشامد قرار دارند. بنابراین احتمال آمدن عدد زوج $\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶}$ است.

اگر نتایج آزمایشی، هم شانس و E یک پیشامد مربوط به این آزمایش باشد، احتمال E را به‌صورت

$$P(E) = \frac{\text{تعداد عناصر } E}{\text{تعداد کل عناصر}} = \frac{m}{n} \qquad (۱)$$

تعریف می‌کنیم. از این تعریف **فقط** وقتی استفاده می‌کنیم که نتایج آزمایش هم شانس هستند.

> *به هریک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی یک **برآمد** و به احتمال‌هایی که به کمک آنچه به‌طور ایده‌آل باید رخ دهد تعیین می‌گردند و داده‌های حاصل از آزمایش در آن نقش ندارند، **احتمال نظری** گفته می‌شود.*

در حل مسائل احتمال ابتدا مجموعه‌ی همه‌ی برآمدهای ممکن آزمایش تصادفی را می‌یابیم ؛ سپس پیشامدی که احتمال آن خواسته شده است را به‌صورت زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای معین می‌کنیم ؛ در نهایت احتمال نظری آن پیشامد را به کمک قوانین احتمال به‌دست می‌آوریم. در

۱ــ منظور، سکه‌ی سالم است.

۲ــ از این پس قرار می‌گذاریم که به جای $P(\{۰\})$ بنویسیم $P(۰)$، به همین صورت به جای $P(\{(۰,۰)\})$ می‌نویسیم $P(۰,۰)$.

حالتی که برآمدها هم شانس هستند، احتمال نظری از رابطه‌ی (۱) به‌دست می‌آید. توجه کنید که ممکن است برآمدهای یک آزمایش تصادفی هم شانس نباشند.

احتمال نظری آمدن «رو» در یکبار پرتاب سکه $\frac{۱}{۲}$ است، اما وقتی سکه‌ای را ۵۰ بار پرتاب می‌کنیم (فعالیت ۵ ــ ۱) معمولاً به‌طور دقیق ۲۵ «رو» به‌دست نمی‌آوریم. فراوانی نسبی «رو» در آزمایش ۵۰ بار پرتاب سکه حتی از دانش‌آموزی به دانش‌آموز دیگر متفاوت است. اگر تعداد پرتاب‌ها به‌جای ۵۰ بار، ۱۰۰۰ بار می‌بود، فراوانی نسبی نزدیک‌تر به $\frac{۱}{۲}$ می‌شد و عددهایی که دانش‌آموزان مختلف به‌دست می‌آوردند، تفاوت چندانی با هم نمی‌کرد. اگر آزمایش‌های تصادفی به دفعات زیاد تکرار شوند، احتمال تجربی به‌دست آمده به احتمال نظری نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. با استفاده از احتمال نظری، می‌توان احتمال وقوع پیشامد در **دراز مدّت** را به دو طریق حدس زد :

۱ــ اگر بتوانیم احتمال نظری یک پیشامد را معیّن کنیم، می‌توانیم از آن برای اندازه‌گیری احتمال پیشامدها استفاده کنیم ؛

۲ــ اگر نتوانیم احتمال نظری یک پیشامد را معیّن کنیم، باید آزمایش را انجام دهیم و با تعیین فراوانی نسبی وقوع آن پیشامد، احتمال وقوع آن‌را **تخمین** بزنیم.

فعالیت ۵ ــ ۵

درفعالیت ۵ ــ۲، چون صفحه عقربه را به هشت ناحیه‌ی برابر تقسیم کردیم، ایستادن عقربه روی ناحیه‌های مختلف هم شانس است. با استفاده از تعریف احتمال نظری :

۱ــ احتمال اینکه عقربه در ناحیه‌ی شماره‌ی ۳ بایستد را بیابید ؛

۲ــ احتمال اینکه عقربه در ناحیه‌ای با شماره‌ی زوج بایستد را بیابید ؛

۳ــ احتمال اینکه عقربه روی ناحیه‌ی **آبی** رنگ بایستد چقدر است؟

۴ــ عقربه را ۴۰ بار بچرخانید و فراوانی برآمدها را در جدول زیر ثبت کنید :

جدول (۶)

	کل	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
تعداد دفعات مشاهده	۴۰								

۵ ــ فراوانی نسبی دفعاتی که عقربه در ۴۰ بار چرخش در ناحیه‌ی شماره‌ی ۳ می‌ایستد چقدر است؟

۶ــ فراوانی نسبی دفعاتی که عقربه در ۴۰ بار چرخش، در ناحیه‌ی زوج می‌ایستد چقدر است؟ نتیجه را با پاسخ سؤال ۲ مقایسه کنید.

۷ــ فراوانی نسبی **آبی**‌های مشاهده شده در این ۴۰ بار چرخش چقدر است؟ نتیجه را با پاسخ سؤال ۳ مقایسه کنید ؛

۸ ــ سؤال‌های ۵، ۶ و ۷ تخمین‌های احتمال را به‌دست می‌دهند. اگر به جای ۴۰ بار چرخش، عقربه را ۴۰۰۰ بار بچرخانیم، در آن صورت احتمال‌های نظری را در سؤال‌های ۱، ۲ و ۳ **با احتمال‌های تجربی** مقایسه کنید.

فعالیت ۵ ــ ۶

۱ــ هر کدام از ارقام ۰ تا ۹ را روی ۱۰ کارت جداگانه بنویسید. آنگاه کارت‌ها را در یک جعبه قرار دهید و درهم بریزید. سپس بدون آنکه داخل جعبه را نگاه کنید، دست خود را داخل جعبه ببرید و یک کارت را بیرون بیاورید. احتمال اینکه عدد روی کارت

الف) ۱ باشد چقدر است؟

ب) زوج باشد چقدر است؟ (صفر را عدد زوج بگیرید)

پ) بزرگتر از ۷ باشد چقدر است؟

ت) بر ۳ بخش‌پذیر باشد چیست؟ (صفر هم بر ۳ بخش‌پذیر است.)

۲ــ اگر عدد روی کارتی که از جعبه بیرون کشیده‌اید صفر نباشد آن را به داخل جعبه برگردانید و مجدداً کارتی را بیرون آورید. آنقدر این کار را تکرار کنید تا عدد روی کارت بیرون آمده صفر نباشد. عدد روی این کارت را یادداشت کنید. حال کارت را به داخل جعبه برگردانید و جعبه را تکان دهید. کارت دیگری را بیرون بکشید و عدد روی آن را سمت راست عدد قبلی بنویسید تا یک عدد دو رقمی به‌دست آید. احتمال اینکه این عدد

الف) به ۳ ختم شود چقدر است؟

ب) زوج باشد چقدر است؟

عددهایی که به این صورت انتخاب می‌گردند، **عددهای تصادفی** نام دارند و شانس انتخاب شدن این عددها، با یکدیگر برابر است. عددهای تصادفی اغلب در انتخاب **نمونه‌های تصادفی** مورد استفاده قرار می‌گیرند. مثلاً فرض کنید ۱۰ دوست صمیمی دارید و می‌خواهید یکی از آن‌ها را به بازی بسکتبال دعوت کنید. می‌توانید آن‌ها را با شماره‌های ۰ تا ۹ شماره‌گذاری کنید و یک عدد را به تصادف از بین ۰ تا ۹ انتخاب کرده، آنگاه آن دوست خود که همان شماره را به او داده‌اید برای دعوت به بازی برگزینید.

تمرین ۲: اگر عددهای حاصل از تکرار آزمایش‌های فعالیّت ۵ــ۶ را به دنبال هم بنویسیم، یک دنباله ۲۵۰ رقمی به ازای ۲۵۰ بار انتخاب عدد به دست می‌آید :

۰۳۲۲۲۳۹۹۵۱۱۲۷۳۸۵۰۳۰۳۲۵۰۱۷۸۷۰۰۲...

این اعداد تصادفی را در جدولی به صورت زیر مرتب می‌کنیم. نمونه‌ی از این جدول را در زیر می‌بینید. که شامل ۲۵۰ رقم است و اعداد آن به ۵ ستون تقسیم شده‌اند تا بررسی آن‌ها راحت‌تر شود.

جدول (۷)

۰۳۲۲۲	۳۹۹۵۱	۱۲۷۳۸	۵۰۳۰۳	۲۵۰۱۷
۸۷۰۰۲	۶۱۷۸۹	۹۶۲۵۰	۹۹۳۳۷	۱۴۱۴۴
۶۸۸۴۰	۹۴۲۵۹	۰۱۹۶۱	۴۲۵۵۲	۹۱۸۴۳
۸۸۳۲۳	۲۸۸۲۸	۶۴۷۶۵	۰۸۲۴۴	۵۳۰۷۷
۵۵۱۷۰	۷۱۰۶۲	۶۴۱۵۹	۷۹۳۶۴	۵۳۰۸۸
۸۴۲۰۷	۵۲۱۲۳	۸۸۶۳۷	۱۹۳۶۹	۵۸۲۸۹
۰۰۰۲۷	۴۳۵۴۲	۳۷۰۳۰	۱۴۷۷۳	۷۳۰۸۷
۳۳۸۵۵	۰۰۸۲۴	۴۸۷۳۳	۸۱۲۹۷	۸۰۴۱۱
۵۰۸۹۷	۹۱۹۳۷	۰۸۸۷۱	۹۱۵۱۷	۱۹۶۶۸
۲۱۵۳۶	۳۹۴۵۱	۹۵۶۴۹	۶۲۵۵۶	۲۳۹۵۰

در جدولی از این نوع انتظار دارید

۱ــ چند تا ۱ ببینید؟

۲ــ چند رقم زوج ببینید؟

۳ــ چند رقم بزرگتر از ۷ ببینید؟

۴ــ چند رقم بخش‌پذیر بر ۳ ببینید؟

۵ــ تعداد ۱ها، تعداد رقم‌های زوج، تعداد رقم‌های بزرگتر از ۷ و تعداد رقم‌های بخش‌پذیر بر ۳ را در جدول فوق بشمارید. آیا فراوانی‌ها به اعدادی که انتظار دارید نزدیک هستند؟

تمرین ۳: صفحه‌ی مربوط به ماه فروردین را از یک تقویم دیواری جدا کنید و عددهای ۱ تا ۳۱ مربوط به روزهای آن را ببرید و دقت کنید که برش‌های شما هم‌اندازه باشند. آن‌ها را درون یک جعبه بریزید و کاملاً تکان دهید. قبل از انتخاب، احتمال این را بیابید که آن عدد :

الف) ۱۷ باشد ؛

ب) یک عدد فرد باشد ؛

پ) یک رقمی باشد.

تمرین ۴: اکنون کارتی را از درون جعبه بیرون بکشید و عدد روی آن را یادداشت کنید. سپس آن را به داخل جعبه برگردانید و جعبه را مجدداً تکان دهید و کارتی را خارج کنید. این آزمایش را ۲۰ بار تکرار کنید.

ت) بین این ۲۰ عدد انتخاب شده، نسبت اعداد فرد به کل اعداد را بیابید و نتیجه را با پاسخ سؤال (ب) مقایسه کنید ؛

ث) بین این ۲۰ عدد انتخاب شده، نسبت اعداد یک رقمی را بیابید و نتیجه را با پاسخ سؤال (پ) مقایسه کنید ؛

ج) اگر در یکی از شش ماه اوّل سال به دنیا آمده باشید، احتمال این‌که یکی از اعداد انتخاب شده از درون جعبه، همان روز تولد شما باشد چقدر است؟

چ) اهمیت هم‌اندازه بریدن عددهای تقویم در چیست؟

۵ــ۳ــ ارتباط بین فضای نمونه‌ای و احتمال نظری

در آزمایش پرتاب سکه فقط دو نتیجه یعنی «رو» و «پشت» وجود دارد، به همین دلیل فضای نمونه‌ای آن، تنها از دو عنصر تشکیل یافته است. فضای نمونه‌ای را معمولاً با علامت S[1] نشان می‌دهند. بنابراین در آزمایش پرتاب سکه

$$S = \{ر ,پ\}$$

۱ــ Sample space

حال فرض کنید به‌جای یک سکه، دو سکه به شماره‌های ۱ و ۲ را با هم پرتاب کنیم. این نیز یک آزمایش تصادفی است. فضای نمونه‌ای این آزمایش با آزمایش پرتاب **یک** سکه متفاوت است. هر کدام از دو سکه می‌تواند یا «رو» یا «پشت» بیاید. چون سکه ها را شماره‌گذاری کرده‌ایم «رو» یا «پشت» آمدن سکه‌ی اول با «رو» یا «پشت» آمدن سکه‌ی دوم تفاوت دارد. بنابراین، چهار برآمد وجود دارد : سکه‌ی اول و دوم هر دو «رو» بیایند، سکه‌ی اول و دوم هر دو «پشت» بیایند، سکه‌ی اول «رو» و سکه‌ی دوم «پشت» بیاید، سکه‌ی اول «پشت» و سکه‌ی دوم «رو» بیاید. به این ترتیب، فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب همزمان **دو** سکه همان حاصل‌ضرب دکارتی[1] فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب یک سکه در خودش می‌شود :

S = { (ر ,ر), (پ ,ر) , (ر ,پ), (پ،پ) }

با استفاده از فضای نمونه‌ای، می‌توانیم احتمال‌های نظری پیشامدهای مختلف را حساب کنیم. برای نمونه، چون فضای نمونه‌ای شامل ۴ عنصر است، احتمال آمدن (ر,ر) برابر $\frac{۱}{۴}$ است :

P(ر ,ر) = $\frac{۱}{۴}$

یا احتمال آمدن یک رو و یک پشت، یعنی احتمال پیشامد

E = { (ر ,پ), (پ ,ر) }

برابر با $\frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$ است.

فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب تاس عبارت است از

S = .۱,۲,۳,۴,۵,۶.

با استفاده از این فضای نمونه‌ای، پیشامد ظاهر شدن عدد بزرگتر از ۴ عبارت است از

E = . ۵,۶.

که احتمال نظری آن $\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ است.

این‌بار،دو تاس همگن یکی به رنگ **سبز** و دیگری به رنگ **قرمز** را همزمان پرتاب می‌کنیم. پرتاب هر یک از تاس‌ها، شش نتیجه دارد که همان ظاهر شدن اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ و ۶ است. پس پرتاب دو تاس، ۳۶ برآمد خواهد داشت. یعنی فضای نمونه‌ای این آزمایش، حاصل‌ضرب دکارتی

۱ــ حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A وB عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی زوج‌های مرتب‌های (x,y) که x در A و y در B است یعنی.

$$A \times B = \{(x, y) : x \ . \ A, y \ . \ B\}$$

فضای نمونه‌ای تاس سبز در فضای نمونه‌ای تاس قرمز است. در جدول (۸) همه‌ی برآمدهای این آزمایش تصادفی را فهرست کرده‌ایم :

جدول (۸)

تاس قرمز \ تاس سبز	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱،۱)	(۱،۲)	(۱،۳)	(۱،۴)	(۱،۵)	(۱،۶)
۲	(۲،۱)	(۲،۲)	(۲،۳)	(۲،۴)	(۲،۵)	(۲،۶)
۳	(۳،۱)	(۳،۲)	(۳،۳)	(۳،۴)	(۳،۵)	(۳،۶)
۴	(۴،۱)	(۴،۲)	(۴،۳)	(۴،۴)	(۴،۵)	(۴،۶)
۵	(۵،۱)	(۵،۲)	(۵،۳)	(۵،۴)	(۵،۵)	(۵،۶)
۶	(۶،۱)	(۶،۲)	(۶،۳)	(۶،۴)	(۶،۵)	(۶،۶)

فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب دو تاس را می‌توان به‌صورت

$$S = \{(x,y) | x = ۱,۲,۳,۴,۵,۶ \text{ و } y = ۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

نمایش داد. به دلیل همگنی تاس‌ها ، برآمدهای این آزمایش هم شانس هستند. بنابراین، احتمال نظری هر برآمد $\frac{۱}{۳۶}$ است. با این اطلاعات می‌توانیم احتمال‌های پیشامدهای مختلف را حساب کنیم. مثلاً احتمال این‌که اعداد ظاهر شده روی دو تاس یکسان باشند، یعنی احتمال پیشامد

$$E = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$$

برابر با $\frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۳۶}$ است.

تمرین ۵: انتخاب عدد از میان ارقام ۰ تا ۹ (عددهای تصادفی) را در فعالیت ۶ به یاد بیاورید.

این بار فرض کنید به‌جای یک عدد، دو عدد به تصادف از میان ارقام ۰ تا ۹ انتخاب شده باشد. فضای نمونه‌ای این آزمایش و تعداد عناصر آن را معین کنید.

۵ ــ ۴ــ پیشامدهای مکمل

فعالیت ۵ ــ ۷

۱ ــ فرض کنید دسته کلید شما، ۸ کلید دارد که یکی از آن‌ها مخصوص درِ اصلی منزل و یکی دیگر متعلق به درِ اتاق است. شب به منزل می‌رسید و برای باز کردن در، یکی از کلیدها را به تصادف انتخاب می‌کنید.

الف) احتمال اینکه بتوانید با کلید انتخابی در منزل را بازکنید چقدر است؟

ب) احتمال اینکه نتوانید با آن درِ منزل را باز کنید چه‌قدر است؟

۲ــ اگر با لمس کردن کلیدها، متوجه شوید که یکی از آن‌ها خیلی کوچکتر از کلید درِ اصلی و اتاق است، از این‌رو آن را کنار می‌گذارید و با یکی از کلیدهای باقیمانده درِ منزل را باز می‌کنید و وارد می‌شوید. سپس برای باز کردن درِ اتاق، یکی از آن‌ها را به تصادف برمی‌گزینید.

الف) احتمال اینکه این کلید درِ اتاق را باز کند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه این کلید درِ اتاق را باز نکند چقدر است؟

۳ــ از مقایسه‌ی پاسخ قسمت‌های الف و ب سؤال‌های ۱ و ۲ چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورید؟

گاهی، در هنگام بررسی پیشامدها و احتمال‌های آن‌ها، احتمال رخ ندادن پیشامد نیز مورد نظر است. اگر E یک پیشامد باشد، پیشامد رخ ندادن E را باE& نشان می‌دهیم و آن را **مکمل** E می‌نامیم.E& مکمل E نسبت به فضای نمونه‌ای S است، یعنی

E&= S – E

شاید با انجام فعالیت ۵ ــ۷، به رابطه‌ای که بین احتمال‌های یک پیشامد و مکمل آن وجود دارد پی برده باشید. حال با بررسی نتایج آزمایش‌هایی که در فعالیت‌های گذشته انجام داده‌اید، بار دیگر این رابطه را بررسی کنید.

جدول (۹)

آزمایش	E	P(E)	E&	P(E&
پرتاب سکه	رو بیاید	$\frac{۱}{۲}$	رو نیاید	$\frac{۱}{۲}$
صفحه عقربه	روی آبی بایستد	$\frac{۳}{۸}$	روی آبی نایستد	$\frac{۵}{۸}$
پرتاب تاس	چهار بیاید	$\frac{۱}{۶}$	چهار نیاید	$\frac{۵}{۶}$
پرتاب تاس	بزرگتر از ۴	$\frac{۲}{۶}$	کوچکتر یا مساوی ۴	$\frac{۴}{۶}$

در هر یک از پیشامدهای زیر، E، را ملاحظه نمایید و احتمال E را با احتمال مکمل آن یعنی E' ، مقایسه کنید. می‌بینید که

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱ \text{ ، } \frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۸}=۱ \text{ ، } \frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۶}=۱ \text{ و } \frac{۴}{۶}+\frac{۲}{۶}=۱$$

یعنی مجموع این دو احتمال همواره برابر ۱ است. بنابراین، برای پیشامد E و مکمل آن E' همیشه

$$P(E)+P(E')=۱$$

مثال ۲ : فرض کنید که گزارش‌های یک ایستگاه هواشناسی نشان می‌دهد که در ۱۲۰ روز، ۸۹ بار پیش‌بینی‌های وضع هوا درست بوده است. احتمال این‌که پیش‌بینی بعدی این ایستگاه درست نباشد، چقدر است؟

حل: اگر پیشامد این‌که پیش‌بینی درست باشد را با C و پیشامد این‌که پیش‌بینی درست نباشد را با C' نشان دهیم،

آنگاه مطابق داده‌های به‌دست آمده، $P(C)=\frac{۸۹}{۱۲۰}$. چون $P(C)+P(C')=۱$ ، پس $\frac{۸۹}{۱۲۰}+P(C')=۱$ ، و در نتیجه

$$P(C')=۱-\frac{۸۹}{۱۲۰}=\frac{۱۲۰-۸۹}{۱۲۰}=\frac{۳۱}{۱۲۰}$$

در هر دو مورد، دو کسر وجود دارد که مخرج آن‌ها برابر است و جمع صورت‌های آن‌ها برابر مخرج می‌شود :

$$۱+۱=۲ \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

$$۳+۵=۸ \quad \text{و} \quad \frac{۳}{۸}+\frac{۵}{۸}=۱$$

$$۸۹+۳۱=۱۲۰ \quad \text{و} \quad \frac{۸۹}{۱۲۰}+\frac{۳۱}{۱۲۰}=۱$$

تمرین ۶: در آزمایش صفحه عقربه، احتمال ایستادن عقربه روی ناحیه‌ی زرد رنگ $\frac{۲}{۸}$ است. احتمال این‌که عقربه روی ناحیه‌ی زرد رنگ نایستد چقدر است؟

یکی از کاربردهای جالب احتمال پیشامد مکمل، حل **مسألهی روز تولد** است. هر کس در یکی از ۳۶۵ روز سال (سال‌های کبیسه را که ۳۶۶ روز دارند در نظر نمی‌گیریم) به دنیا می‌آید. می‌خواهیم احتمال این که از میان ۵ نفر لااقل دو نفر در یک روز سال متولد شده باشند را بیابیم. بنابراین، E پیشامدی است که در جستجوی احتمال آن هستیم

E : لااقل دو نفر از ۵ نفر در یک روز سال به دنیا بیایند

به‌جای محاسبه‌ی P(E)، P(E&) را محاسبه می‌کنیم و آنگاه با کم کردن آن از ۱، P(E) را به‌دست می‌آوریم :

E& روزهای تولد هر پنج نفر با هم متفاوت باشد

چون هر کدام از این ۵ نفر می‌توانند در هر یک از ۳۶۵ روز سال به دنیا آمده باشند، فضای نمونه‌ای مربوط به تولّد هر نفر، ۳۶۵ عضو دارد. در نتیجه طبق اصل اساسی شمارش (اصل‌ضرب)، فضای نمونه‌ای مربوط به ۵ نفر، $۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵$ و یا به طور خلاصه $۳۶۵^{۵}$ عضو دارد. برای پیدا کردن تعداد عناصرE& ، می‌دانیم که نفر اول در هر یک از ۳۶۵ روز سال می‌تواند متولد شده باشد. چون باید روز تولد نفر دوم با نفر اول متفاوت باشد، نفر دوم در ۳۶۴ روز باقیمانده به دنیا می‌آید. چون روز تولد نفر سوم باید متفاوت با روزهای تولد دو نفر قبلی باشد، نفر سوم در ۳۶۳ روز باقیمانده به دنیا خواهد آمد. به همین ترتیب نفر چهارم در ۳۶۲ روز دیگر و نفر آخر در ۳۶۱ روز بعدی. طبق اصل اساسی شمارش

$$\text{تعداد اعضای}\ E\& = ۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ۳۶۲ \times ۳۶۱$$

و

$$P(E\& = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ۳۶۲ \times ۳۶۱}{(۳۶۵)^{۵}}$$

در نتیجه

$$P(E) = ۱ - P(E\& = ۱ - \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ۳۶۲ \times ۳۶۱}{(۳۶۵)^{۵}}$$

تمرین ۷: علی از دوستان خود درباره‌ی ورزش مورد علاقه‌ی آنان نظرخواهی کرد و درصد تعداد دوستانش را که به ورزش معینی علاقه‌مند بودند در جدولی به‌صورت صفحه‌ی‌بعد یادداشت کرد :

اگر علی با یکی دیگر از دوستانش برخورد کند و همین سؤال را از او بپرسد، احتمال این‌که ورزش مورد علاقه‌ی او

جدول (۱۰)

ورزش	درصد
فوتبال	۳۶
بسکتبال	۲۱
تنیس	۱۲
شنا	۵
کشتی	۵
تیراندازی	۴
ژیمناستیک	۴
دو	۱۳

۱ ــ بسکتبال باشد چه‌قدر است؟

۲ ــ فوتبال **نباشد** چه‌قدر است؟

۳ ــ تنیس باشد چه‌قدر است؟

۴ ــ تنیس **نباشد** چه‌قدر است؟

۵ ــ ۵ ــ پیشامدهای مرکب

گاهی یک پیشامد از دو یا چند پیشامد ساده تشکیل می‌شود. برای مثال، هر برآمد در آزمایش پرتاب دو سکه را به عنوان یک پیشامد درنظر گرفتیم، درصورتی که از برآمدهای دو سکه‌ی مختلف تشکیل یافته بود. این‌گونه پیشامدها، **پیشامدهای مرکب** نامیده می‌شوند.

*پیشامدی که از برآمدهای دو یا چند آزمایش مختلف تشکیل شده باشد، **پیشامد مرکب** نامیده می‌شود.*

فعالیت ۵ ــ ۸

۱ــ دو سکه‌ی متفاوت (مثلاً یک سکه‌ی ۱۰۰ ریالی و یک سکه‌ی ۵۰ ریالی) انتخاب کنید.

۲ــ دو سکه را ۵۰ بار پرتاب کنید. نتایج این پرتاب‌ها را با علامت خط‌نشان در جدولی همانند

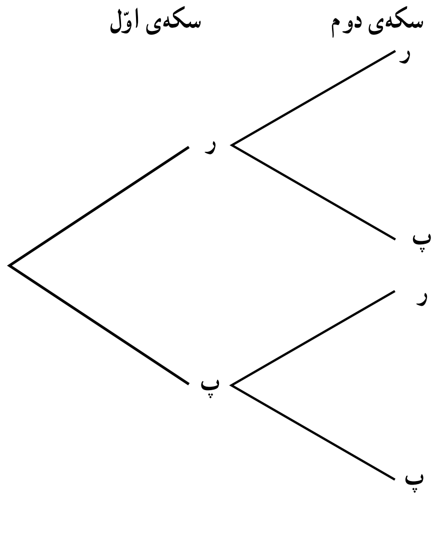
جدول زیر علامت بزنید.

جدول (۱۱)

کل	دو پشت	یک رو و یک پشت	دورو
۵۰			

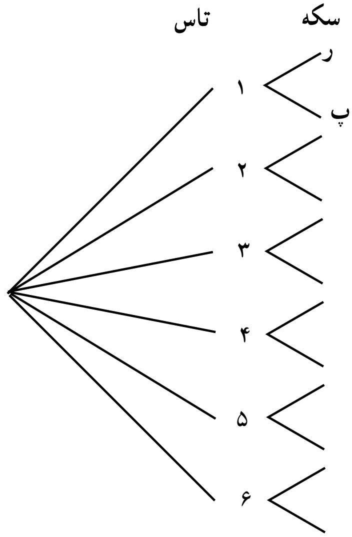
الف) در چه کسری از پرتاب‌ها «دو رو»، «دو پشت»، «یک رو و یک پشت» ظاهر می‌شود؟
ب) آیا انتظار چنین نتایجی را داشتید؟ اگر آری چرا و اگر نه چرا؟
پ) آیا سه پیشامد «دو رو آمدن»، «دو پشت آمدن» و «یک رو و یک پشت آمدن» هم‌شانس هستند؟
ت) احتمال ظاهر شدن یک رو و یک پشت را در پرتاب دو سکه چه‌قدر تخمین می‌زنید؟

برآمدهای پرتاب دو سکه را می‌توان از روش دیگری موسوم به **نمودار درختی** نیز به‌دست آورد: سکه‌ی اوّل یا «رو» می‌آید یا «پشت». حال اگر سکه‌ی اوّل «رو» آمده باشد در مقابل آن، سکه‌ی دوم می‌تواند «رو» یا «پشت» بیاید که نشان می‌دهد روی هم چهار برآمد برای این آزمایش ممکن است. نمایش مطلب فوق به شکل نمودار درختی و به‌صورت زیر است:



فعالیت ۵ ــ ۹

۱ ــ ابتدا یک تاس و به دنبال آن، یک سکه پرتاب کنید. برآمدهای ممکن چیست؟ نمودار درختی زیر را که نشان دهنده‌ی برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی است کامل کنید :



الف) تاس به چند حالت می‌نشیند؟

ب) سکه به چند حالت می‌نشیند؟

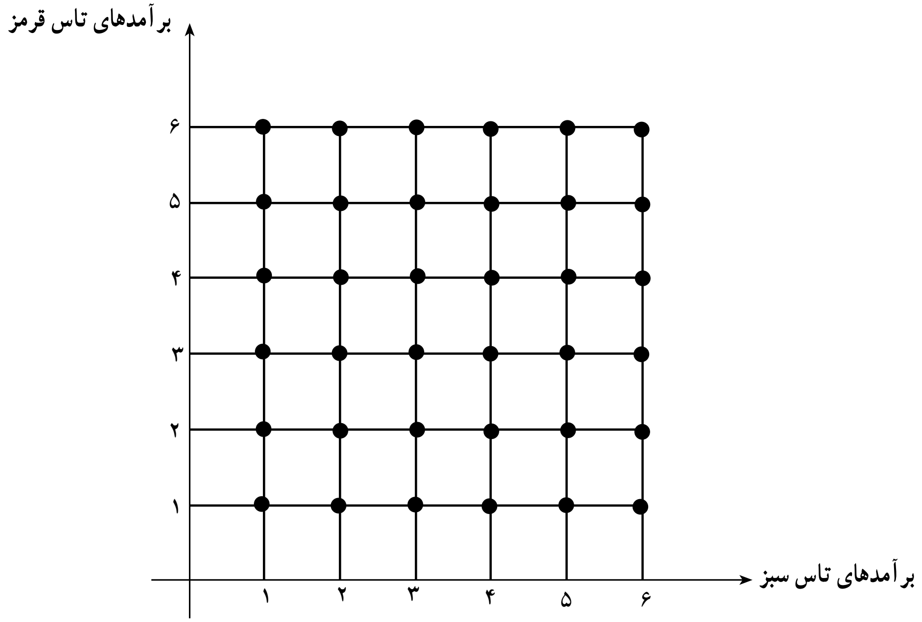
پ) این آزمایش (پرتاب تاس وبه دنبال آن پرتاب سکه) چند برآمد ممکن دارد؟

ت) آیا رابطه‌ای بین پاسخ سؤال‌های الف، ب و پ وجود دارد؟

ث) آیا برآمدها هم شانس هستند؟

ج) احتمال این‌که در پرتاب تاس، عدد ۴ و در پرتاب سکه «رو» ظاهر شود چقدر است؟

در آزمایش پرتاب دو تاس سبز و قرمز، فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو بود، که همگی هم‌شانس بودند و برآمدهای ممکن را در یک جدول گردآوری کردیم. نمایش برآمدهای ممکن این آزمایش به‌صورت آرایه‌ای ۳۶ نقطه‌ای در صفحه نیز ممکن است. برآمدهای تاس سبز را روی محور افقی و برآمدهای تاس قرمز را روی محور قائم نمایش می‌دهیم. نقاط تلاقی خطوط عمودی و افقی در نقاط برآمدهای این تاس‌ها، برآمدهای ممکن این آزمایش را نشان می‌دهند.



فعالیت ۵ ــ ۱۰

به آرایه‌ی ۳۶ نقطه‌ای که برای نشان دادن برآمدهای پرتاب دو تاس سبز و قرمز به‌کار بردیم نگاه کنید.

۱ــ حول نقاط (۱,۱) ، (۲,۲) ، (۳,۳) ، (۴,۴) ، (۵,۵) ، (۶,۶) یک نوار رسم کنید. احتمال اینکه اعداد ظاهر شده روی دو تاس با هم برابر باشند را به دست آورید ؛

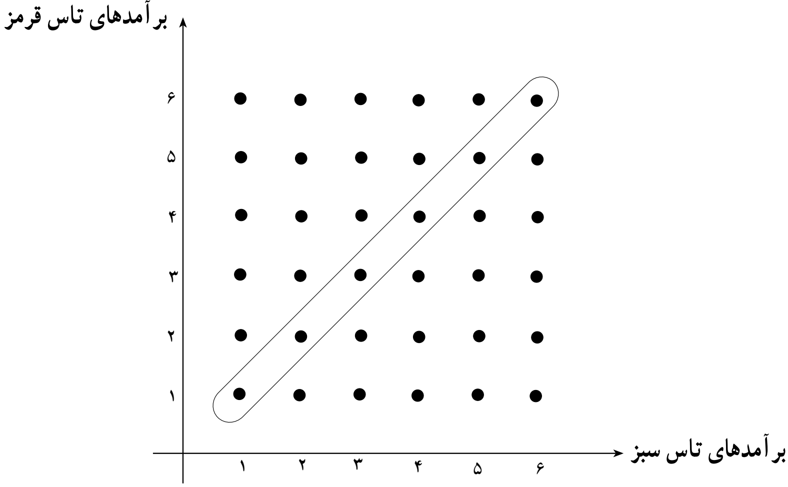
۲ــ حول نقاطی که نشان‌دهنده‌ی پیشامد «مجموع اعداد ظاهر شده = ۸» هستند، یک نوار رسم کنید. توجه کنید که مثلاً نقاط (۶,۲) و (۲,۶) برآمدهای مجزا هستند. احتمال این‌که مجموع اعداد ظاهر شده روی دو تاس :

الف) ۸ باشد چه‌قدر است؟

ب) ۸ نباشد چه‌قدر است؟

پ) ۸ باشد و نیز این دو عدد با هم برابر باشند چه‌قدر است؟

۳ــ اگر اعداد ظاهر شده روی دو تاس برابر باشند. احتمال این‌که مجموع آن‌ها ۸ باشد چه‌قدر است؟



در آزمایش‌های تصادفی، فوق، توانستیم به کمک نمودار درختی، برآمدهای آزمایش و تعداد آن‌ها را معین کنیم. برای تعیین تعداد برآمدهای ممکن یعنی تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای، کافی بود تعداد شاخه‌های انتهایی درخت را بشماریم. نتایج این آزمایش‌ها که در جدول (۸) گردآوری شده است، نشان می‌دهد که تعداد شاخه‌های انتهایی درخت را می‌توان با یک عمل ضرب به‌دست آورد.

می‌توان به جای رسم کامل نمودار درختی مربوط به یک آزمایش مرکب و فهرست کردن تمام برآمدهای ممکن ؛ با ضرب کردن، تعداد برآمدها را به‌دست آورد. که این عمل همان **اصل اساسی شمارش** (اصل ضرب) است. مثلاً اگر از شهر (الف) به شهر (ب) دو راه و از شهر (ب) به شهر (پ) سه راه موجود باشد، برای رفتن از شهر (الف) به شهر (پ) ۶ راه وجود خواهد داشت.

*اگر عملی به m طریق ممکن و عمل دیگری به n طریق ممکن انجام گیرد، طبق **اصل اساسی شمارش** (اصل ضرب) دو عمل با هم به $m \times n$ طریق ممکن انجام خواهد گرفت.*

تمرین ۸: صفحه‌ی عقربه‌ی A را به شش قطاع برابر با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ تقسیم می‌کنیم. صفحه عقربه‌ی B را نیز به ۸ قطاع برابر با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ تقسیم می‌کنیم. ابتدا عقربه‌ی مربوط به A و به دنبال آن عقربه‌ی مربوط به B را می‌چرخانیم.

الف) تعداد برآمدهای ممکن چندتا است؟

ب) آیا برآمدها همگی هم شانس هستند؟

پ) احتمال اینکه عقربه‌ی A روی ناحیه‌ی ۳ و عقربه‌ی B روی ناحیه‌ی ۸ بایستد چه‌قدر است؟

منابع

۱ـ Adams, R.A. (1983). **Single variable calculus**. New York : Addison-Wesley Publishers Limited.

۲ـ Billstein, R.; Libeskind, S., Lott , J. (1984). **A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers**. (3rd Ed.) Benjamin - Cummings Publishing Co.

۳ـ Devlin, K. (1994). **Mathematics the science of patterns**. Scientific American Library. Distributed by W. H. Freeman and Company.

۴ـ Hughes - Hallett, D.; Gleason, A. M. & et al. (1992). **Calculus: Produced by the consortium based at Harvard and Funded by a National Science Foundation Grant**. John Wiley & Sons, Inc.

۵ ـ Hostetler, L. I. (1993). **Precalculus**. D. C. Heath and Company.

۶ـ Jacobs, H. R. (1982). Mathematics: A human endeavor. (2nd Ed.) W. H. Freeman.

۷ـ National Council of Teachers of Mathematics. (1989). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. NCTM, Reston, Virginia.

۸ ـ National Council of Teachers of Mathematics. (1993). **Patterns and functions: Addenda Series, Grades 5-8**. (4th printing). NCTM,Reston, Virginia.

۹ـ National Council of Teachers of Mathematics. (1991). **Connecting Mathematics : Addenda Series , Grades 9-12.** NCTM, Reston, Virginia.

۱۰ـ National Research Council. (1990). **On the shoulders of Giants: New approach to numeracy.** by A. L. Steen (Ed.). National Academy Press, Washington, D.C.

۱۱ـ Polya, G. (1962). **Mathematical discovery (vol. I).** John Wiley & Sons, INC.

۱۲ـ Polya, G. (1965). Mathematical discovery (vol. I). John Wiley & Sons, INC.

۱۳ـ Quantitative Literacy Series (1987). **Exploring Probability**. Dale Seymour Publications.

۱۴ـ Sawyer, W. W. (1961). **Mathematician's delight**. (12th Ed.) Penguin Books.

۱۵ـ بختیاری، جواد. **جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق.**

۱۶ـ زنگنه، بیژن و همکاران. (۱۳۷۳). **جبر و احتمال: نظام جدید آموزش متوسطه.** دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تهران.

۱۷ـ شهریاری، پرویز (مترجم) **خلاقیّت ریاضی**، نوشته‌ی جرج پولیا، انتشارات فاطمی، (۱۳۷۲).

۱۸ـ واروسفل، آندره، اعداد و اسرار آن. ترجمه‌ی عباس کرکان، ۱۳۴۵، سازمان کتاب‌های جیبی.