

مدل‌سازی ریاضی

مدل به معنی نمونه و الگویی است که براساس آن واقعیتی را مجسم می‌کنیم. اسباب‌بازی‌ها، نمونه‌های آشنا از مدل‌هایی هستند که کودکان از طریق آن‌ها می‌توانند دنیای واقعی را تجسم و درک کنند و به تصورات خود عینیت بخشند. درحقیقت، انسان‌ها در مراحل مختلف زندگی برای درک واقعیت‌ها ناگزیر از مدل‌سازی هستند. یک نمونه‌ی جالب مدل‌سازی کره‌ی جغرافیایی است که در تشریح و توضیح مختصات جغرافیایی زمین مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در شروع آموزش ریاضیات برای درک بهتر بسیاری از مفاهیم از مدل‌سازی استفاده می‌شود. مثلاً برای تدریس مفهوم عدد، نمایش اعداد حقیقی روی محور و نمایش نقطه در دستگاه مختصات دکارتی از مدل‌سازی بهره می‌گیریم. و این روند تا مراحل بالاتر آموزش هم‌چنان ادامه دارد.

مدل‌های فیزیک نیوتنی و فیزیک نسبیت اینشتین نیز نمونه‌هایی از مدل‌سازی قوانین طبیعت هستند. فیزیک نیوتنی مدلی از جهان ارائه می‌کند که اگرچه کامل و بی‌نقص نیست اما در تبیین بسیاری از پدیده‌های طبیعی مفید است. با این حال، این مدل در مورد حرکت ذراتی که سرعتی نزدیک به سرعت نور دارند پاسخگو نیست و مدل ریاضی نسبیت اینشتین در این زمینه رهگشا است. هدف این فصل، ارائه‌ی مدل‌سازی ریاضی چند مسأله از زندگی واقعی و حل آن‌ها است.

۴-۱- مسائل رشد^۱

فعالیت ۴-۱

مریم و دوستانش به حفظ محیط زیست اهمیت زیادی می‌دهند و اخبار مربوط به تحولات کره‌ی مسکون را با دقت دنبال می‌کنند. در روز اول مهر، مریم ادعا کرد که در خبر آمده است «لایه‌ی

ازن زمین به سرعت در حال از بین رفتن است و خطر جدی، زندگی ساکنان کره‌ی زمین را در ده سال آینده تهدید می‌کند!» مریم تلفنی این خبر را به دو نفر از دوستانش گفت و از هریک از آن‌ها خواست که خبر را تا روز بعد، به دو نفر دیگر اطلاع دهند. روز دوم، هریک از این دو نفر، خبر را به دو نفر دیگر رساند یعنی در روز دوم مهر، چهار نفر دیگر خبر را شنیدند و در روز سوم هشت نفر دیگر به آن‌ها که خبر را شنیده بودند، اضافه شدند. اگر خبر به همین ترتیب پخش شود، در روز دهم مهر چند نفر خبر را می‌شنوند؟ تا روز دهم، مجموعاً چند نفر خبر را خواهند شنید؟ برای یافتن پاسخ، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

با توجه به جدول (۱)، می‌بینیم که سرعت پخش یا رشد خبر چقدر بوده است!

جدول (۱)

روز: n	تعداد افرادی که خبر را در روز n ^{ام} می‌شنوند.	تعداد کل افرادی که تا روز n ^{ام} خبر را شنیده‌اند — مریم هم جزء این عده است.
قبل از شروع به پخش خبر، تنها مریم آن را شنیده است.	۱	۱
۱	۲	۳
۲	۴	۷
۳	۸	۱۵
۴	۱۶	۳۱
۵	۳۲	۶۳
۶	۶۴	۱۲۷
۷	۱۲۸	۲۵۵
۸	۲۵۶	۵۱۱
۹	۵۱۲	۱۰۲۳
۱۰	۱۰۲۴	۲۰۴۷

تمرین ۱: اگر مریم از دوستانش خواسته بود که هر پنج دقیقه یک بار خبر را به اطلاع دو نفر دیگر برسانند، چند دقیقه طول می‌کشید تا ۲۰۴۷ نفر خبر را بشنوند؟

اگر تعداد افرادی که در پایان روز بیستم، بیست و هشتم یا هر روز دیگر از خبر آگاهی پیدا می‌کنند مورد نظر باشد، قطعاً باید به دنبال راه میان‌بری بگردیم و گزینه محاسبات، طولانی، وقت‌گیر و کسل‌کننده می‌شوند. به همین منظور، جدول (۱) را برحسب توان‌های ۲ بازنویسی می‌کنیم. شما هم جای علامت سؤال‌ها را با استفاده از ماشین حساب، پر کنید:

جدول (۲)

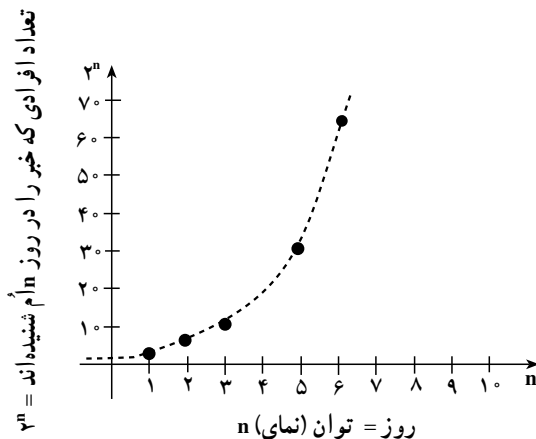
روز: n	تعداد افرادی که در روز nم خبر را شنیده‌اند.	تعداد کل افرادی که تا روز nم خبر را شنیده‌اند — مریم هم جزء این عده است.
قبل از شروع به پخش خبر، تنها مریم آن را شنیده است.	$1 = 2^0$	$1 = 2^{0+1} - 1$
۱	$2 = 2^1$	$3 = 2^{1+1} - 1$
۲	$4 = 2^2$	$7 = 2^{2+1} - 1$
۳	$8 = 2^3$	$15 = 2^{3+1} - 1$
۱۰	$1024 = 2^{10}$	$2047 = 2^{10+1} - 1$
۱۱	$2048 = 2^{11}$	$4095 = 2^{11+1} - 1$
؟	۶۵۵۳۶	؟
؟	؟	۵۲۴۲۸۷
۲۰	2^{20}	$2^{20+1} - 1$
۲۸	2^{28}	$2^{28+1} - 1$
n	2^n	$2^{n+1} - 1$

با دقت در جدول، مشاهده می‌کنیم که با گذشت یک روز، تعداد شنوندگان خبر در آن روز دو برابر روز قبل می‌شوند و تعداد کل افراد (ستون سوم) تقریباً دو برابر تعداد شنوندگان خبر در آن روز می‌شوند. این مشاهده، رابطه‌ی بین دو کمیت یا دو متغیر را به ما نشان می‌دهد یعنی تعداد شنوندگان

خبر در هر روز، تابعی از آن روز است. رابطه‌ی بین تعداد روزها و تعداد شنوندگان خبر در آن روز، یک تابع نمایی است، زیرا رشد تعداد افراد شنونده‌ی خبر، به صورت توان‌ها یا نماهای ۲ است.

۴-۱-۱ نمودار رشد نمایی: الگویی را که در ستون دوم جدول مشاهده کردیم به صورت

نمودار نمایش می‌دهیم:



شکل ۱- تعداد افرادی که در روز n ام خبر را شنیده‌اند.

نمودار توان‌های دو، نمونه‌ای از یک تابع نمایی است و تصویر فوق رابطه‌ی بین n و 2^n را نشان می‌دهد. این رابطه را می‌توانیم به صورت $b = 2^n$ نیز نمایش دهیم. در واقع، روابطی از نوع $b = a^n$ که در آن a بزرگ‌تر از یک است ($a > 1$) شکلی مشابه با این نمودار دارند. حرف a معرف پایه و حرف n معرف نما یا توان است.

مثال ۱: با توجه به نمودار فوق، می‌توانیم نماهای کسری ۲ را تقریب بزنیم. مثلاً برای به دست

آوردن مقدار $b = 2^{\frac{7}{2}}$ ، چون $\frac{7}{2}$ یعنی $\frac{3}{5}$ بین ۳ و ۴ است، در نتیجه مقدار $2^{\frac{7}{2}}$ نیز بین 2^3 و 2^4 یا

بین ۸ و ۱۶ است. پس مقدار تقریبی $2^{\frac{7}{2}}$ برابر ۱۲ است.

مثال ۲: اگر بخواهیم بدانیم که چه توانی از ۲ مساوی ۷۵ است، به نمودار مراجعه کرده،

جواب تقریبی $6/2$ را به دست می‌آوریم زیرا ۷۵ بین ۶۴ و ۱۲۸ یعنی 2^6 و 2^7 است:

$$2^6 \cdot 2^n \cdot 2^7$$

$$64 \cdot 75 \cdot 128$$

یعنی n بین ۶ و ۷ است و چون ۷۵ به ۶۴ نزدیک‌تر است، پس n به شش نزدیک‌تر است. (این دو مثال

را مقایسه کنید.)

تمرین ۲: با استفاده از نمودار :

الف) مقدار تقریبی n را در رابطه $2^n = 56$ پیدا کنید.

ب) مقدار تقریبی $2^{\frac{17}{3}}$ را به دست آورید.

تمرین ۳: قسمت‌های الف) و ب) از تمرین ۲ چه رابطه‌ای با لگاریتم دارند؟ توضیح دهید.

فعالیت ۲-۴

فرض کنیم که هزینه‌ی تحصیل عمومی از سال ۱۳۷۰ خورشیدی با آهنگ^۱ سالانه‌ی ۱۰ درصد^۲ رو به افزایش بوده است و این روند تقریباً به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. اگر در سال ۱۳۷۰ که میلاد به کلاس اول رفت، هزینه‌ی تحصیل^۳ او ۱۸۰۰۰ تومان بوده باشد، این هزینه در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی (پس از ۱۲ سال) یعنی در سال ۱۳۸۲ چه قدر خواهد بود؟ برای پاسخ به این سؤال، دو مسیر مختلف را در نظر می‌گیریم:

مسیر ۱: هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان یک سال چنین است:

$$a = 10\% + \text{هزینه‌ی اولیه}$$

اگر هزینه‌ی اولیه را یک تومان فرض کنیم آن‌گاه:

$$a = 1 + \frac{10}{100} \times 1$$

$$a = 1 + 0/1$$

$$a = 1/1$$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال ۱۳۷۰

در پایان سال ۱۳۷۱، هزینه‌ی تحصیل میلاد $1/1$ هزینه‌ی تحصیل سال قبل او، یعنی $1/1 \times 1/1$

است زیرا $(1/1)(1/1) = (0/1) + (1/1)$. در سال سوم، هزینه‌ی تحصیل میلاد $1/1$ هزینه‌ی

سال قبل او یعنی

$$(1/1 \times 1/1) \times 1/1$$

۱- Rate (نرخ)

۲- آهنگ رشد سالانه ۱۰ درصد یک حالت فرضی است. برای محاسبه‌ی هزینه واقعی از اطلاعات بانک مرکزی

استفاده نمایید.

۳- هزینه‌ی تحصیل شامل لوازم تحریر، کتاب و هزینه‌ی رفت و آمد مدرسه است.

است. اگر هزینه‌های تحصیل میلاد را در پایان هر سال به‌طور منظم بنویسیم، می‌توانیم هزینه‌ی تحصیل او را در پایان سال دوازدهم حدس بزنیم و سپس محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال اول} &= 1/1 = (1/1)^1 \\ \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال دوم} &= (1/1) \times (1/1) = (1/1)^2 \\ \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال سوم} &= (1/1 \times 1/1) \times (1/1) = (1/1)^3 \\ \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال چهارم} &= (1/1 \times 1/1 \times 1/1) \times (1/1) = (1/1)^4 \\ \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال پنجم} &= (1/1 \times 1/1 \times 1/1 \times 1/1) \times (1/1) = (1/1)^5 \\ \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال دوازدهم} &= (1/1 \times 1/1 \times \dots \times 1/1) \times (1/1) = (1/1)^{12} \end{aligned}$$

۱۱ بار

اگر هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان یک سال، یعنی $1/1$ را a بنامیم، هزینه‌ی تحصیل او پس از $t = 12$ به $(1/1)^{12}$ می‌رسد. این مقدار را b می‌نامیم که نشان‌دهنده‌ی رشد هزینه‌ی تحصیلی میلاد پس از گذشت $t = 12$ دوره‌ی زمانی است. با توجه به آن‌چه که در این فعالیت انجام دادیم، روابط زیر را به‌دست آوردیم

$$(1/1)^{12} = b$$

یا

$$\boxed{a^t = b}$$

a = یک به اضافه‌ی درصد افزایش (فاکتور رشد در یک واحد زمانی)؛

t = دوره‌ی زمانی؛

b = فاکتوری که مقدار اولیه در آن ضرب می‌شود تا هزینه را در t دوره‌ی زمانی به دست دهد

(فاکتور رشد در t دوره‌ی زمانی).

رابطه‌ی فوق را با این فرض که هزینه‌ی اولیه یک تومان بود به دست آوردیم. چون هزینه‌ی

اولیه، 18000 تومان است، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم با ضرب هزینه‌ی اولیه (18000)

تومان) در فاکتور رشد در 12 دوره‌ی زمانی، یعنی $b = (1/1)^{12}$ به دست می‌آید

$$(1/1)^{12} \times \text{هزینه‌ی اولیه} = \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم}$$

$$= 18000 \times (1/1)^{12}$$

برای محاسبه‌ی عبارت فوق یا از طرفین لگاریتم می‌گیریم و یا با استفاده از تابع نمایی y^x در

ماشین حساب علمی، مقدار $(1/1)^{12}$ را به دست می‌آوریم و سپس در 18000 ضرب می‌کنیم در نتیجه

$$\text{هزینه‌ی تحصیل در سال دوازدهم} = 18000 \times 3/138 = 56491/71078$$

تمرین ۴- با استفاده از لگاریتم، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم را به دست آورید.

مسیر ۲- به کمک ماشین حساب، هزینه‌ی تحصیل میلاد را در هر سال با استفاده‌ی متوالی

از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{هزینه در شروع سال} + \text{هزینه در شروع سال} = \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان هر سال}$$

$$(1) \quad 19800 = 18000 + 0/1(18000) = \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان اولین سال} : 1370$$

$$(2) \quad 21780 = 19800 + 0/1(19800) = \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان دومین سال} : 1371$$

$$(3) \quad 23958 = 21780 + 0/1(21780) = \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان سومین سال} : 1372$$

$$(4) \quad 56491/70 = 51356 + 0/1(51356) = \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان دوازدهمین سال} : 1381$$

با دقت در چگونگی رشد هزینه در محاسبات فوق، می‌توانیم مراحل بالا را به صورت دیگری بازنویسی کنیم

$$(1-1) \quad 19800 = 18000 \cdot (1 + 0/1) = 18000 \cdot (1/1)^1 = \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان اولین سال تحصیلی}$$

$$(2-2) \quad 21780 = 19800 \cdot (1 + 0/1) = 19800 \cdot (1/1)^1, \quad \text{از رابطه‌ی 1-1، مقدار } 19800 \text{ را در رابطه‌ی 2-2 جایگزین می‌کنیم.}$$

$$23958 = 21780 \cdot (1/1)^1 = 18000 \cdot (1/1)^2, \quad \text{رابطه‌ی 2-2 را نیز بازنویسی می‌کنیم}$$

$$23958 = 18000 \cdot (1/1)^2 = 18000 \cdot (1/1)^2, \quad \text{رابطه‌ی 2-2 را نیز بازنویسی می‌کنیم}$$

رابطه‌ی (۳) را نیز بازنویسی می‌کنیم

$$\text{هزینه‌ی تحصیل در پایان سومین سال} = 21780 \cdot (1 + 0/1)$$

$$= 18000 \cdot (1/1)^2 \cdot (1/1)$$

$$= 18000 \cdot (1/1)^3, \quad \text{با همین استدلال، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم را حدس می‌زنیم}$$

با همین استدلال، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم را حدس می‌زنیم

$$56491/70 = 18000 \cdot (1/1)^{12}, \quad \text{می‌توانیم به جای هزینه‌ی اولیه یعنی } 18000 \text{ تومان، } A_0 \text{ را قرار دهیم و مراحل فوق را از نو بنویسیم}$$

می‌توانیم به جای هزینه‌ی اولیه یعنی ۱۸۰۰۰ تومان، A_0 را قرار دهیم و مراحل فوق را از نو بنویسیم

$$A_0 = 18000$$

$$A_1 = 18000 + 18000 \cdot (0/1) = 18000 \cdot (1/1)$$

یا

$$A_1 = A_0 + A_0(i/1)$$

$$A_1 = A_0(1/1) \quad (5)$$

به طور مشابه

$$A_2 = A_1 + A_1(i/1) = A_1(1/1) \quad (6)$$

$$A_2 = A_2 + A_2(i/1) = A_2(1/1) \quad (7)$$

با همین استدلال،

$$A_{12} = A_{11}(1/1)$$

مقدارهای A_1 و A_2 را از (5) و (6) به دست آورده و در (7) جایگزین می‌کنیم

$$A_1 = A_0(1/1)$$

$$A_2 = A_1(1/1) = A_0(1/1)(1/1) = A_0(1/1)^2$$

$$A_2 = A_2(1/1) = A_0(1/1)^2(1/1) = A_0(1/1)^3$$

به همین ترتیب A_{12} را به دست می‌آوریم

$$A_{12} = A_0(1/1)^{12}$$

و در حالت کلی

$$A_t = A_0(1/1)^t$$

که در آن t تعداد سال‌هاست.

اگر در حالت کلی، آهنگ رشد هزینه را r در نظر بگیریم، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$A_t = A_0(1+r)^t$$

که در آن:

$$A_0 = \text{هزینه‌ی اولیه؛}$$

$$r = \text{آهنگ رشد سالانه‌ی هزینه؛}$$

$$t = \text{تعداد سال‌ها؛}$$

$$A_t = \text{هزینه‌ی انباشته شده بعد از } t \text{ سال؛}$$

اختلاف این روش با روش مسیر ۱ در آن است که در این جا هزینه‌ی انباشته شده بعد از t سال

یعنی A_t را مستقیماً به دست آوردیم در حالی که در مسیر ۱ ابتدا b یعنی فاکتور رشد در t را

محاسبه کردیم و سپس با ضرب هزینه‌ی اولیه یعنی A_0 در آن، A_t را حساب کردیم که در آن

$$b = a^t = (1+r)^t$$

a = آهنگ یا فاکتور رشد در یک سال (رشد سالانه)؛

b = آهنگ یا فاکتور رشد در t سال؛

t = تعداد سال‌ها؛

مثال ۳: متخصصان بر این باور هستند که زمین قابل کشت و زرع کوهی مسکون حداکثر

می‌تواند ۴۰ میلیارد نفر را غذا دهد^۱. در شروع سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت تقریبی کوهی زمین ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر جمعیت به‌طور نمایی و با ضریب ثابت ۲٪ در سال رشد کند، چه زمانی جمعیت به ۴۰ میلیارد نفر خواهد رسید.

حل: این مسأله را از هر دو مسیر پیشنهادی در فعالیت قبل حل می‌کنیم.

مسیر ۱: با توجه به این که جمعیت به‌طور نمایی رشد می‌کند، پس با استفاده از رابطه‌ی $a^t = b$ ،

زمان خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$a = 1 + \frac{2}{100}$$

$$a = 1/02$$

یا

فاکتور رشد در t سال یعنی b برابر است با جمعیت در t سال آینده تقسیم بر جمعیت در سال

۱۹۹۰ (زمان شروع)

$$b = \frac{40,000,000,000}{5/2 \times 1,000,000,000} = \frac{40 \times 10^9}{5/2 \times 10^9} = 7/692$$

با دانستن a و b ، تنها مجهول رابطه‌ی $a^t = b$ یعنی زمان t را محاسبه می‌کنیم:

$$(1/02)^t = 7/692$$

$$\log(1/02)^t = \log 7/692$$

$$t(\log 1/02) = \log 7/692$$

با مراجعه به جدول لگاریتم و یا به کمک ماشین حساب، مقادیرهای فوق را پیدا می‌کنیم:

$$t(0/0086) = 0/886$$

$$t = \frac{0/886}{0/0086} = 103/02$$

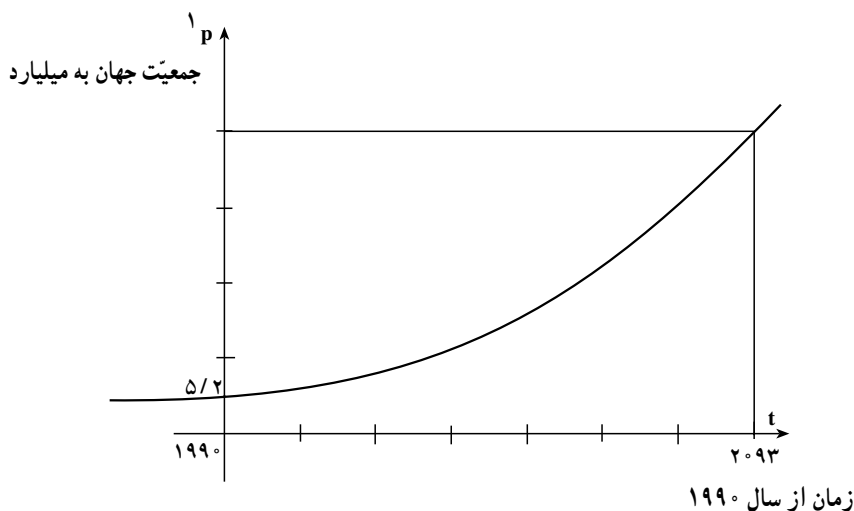
۱- مطمئناً با پیشرفت صنعت و تکنولوژی، راه‌های گوناگون دیگری برای تهیه‌ی غذا در کوهی زمین پیدا خواهد شد.

یعنی جمعیت کره‌ی زمین به طور تقریبی در سال

۱۹۹۰. ۱۰۳. ۲۰۹۳

به ۴۰ میلیارد نفر خواهد رسید.

در این مسأله یک تابع نمایی با پایه‌ی $۱/۰۲$ وجود دارد که نشان دهنده‌ی آهنگ رشد جمعیت در هر سال است. این تابع به این دلیل نمایی نامیده می‌شود که متغیر t در نما یا توان قرار دارد.



شکل ۲- جمعیت تقریبی جهان: رشد نمایی

مسیر ۲: داده‌های مسأله یعنی

$$A_t . 40 \times 10^9$$

$$A_0 . 5/2 \times 10^9$$

$$r . 2\% . \frac{2}{100} . 0/02$$

را در رابطه‌ی $A_t . A_0(1. r)^t$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$40 \times 10^9 . 5/2 \times 10^9 (1. 0/02)^t$$

یا

$$40 . 5/2 (1/02)^t$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم

$$\log 4^0 = \log_{5/2}(1/0.2)^t$$

$$\log(4 \times 1^0) = \log_{5/2} + \log(1/0.2)^t$$

$$\log 4 + \log 1^0 = \log_{5/2} + t \log 1/0.2 \quad (8)$$

با مراجعه به جدول لگاریتم، یا با استفاده از ماشین حساب، مقدار لگاریتم‌های فوق را به دست می‌آوریم

$$\log 4 = 0.602 \text{ و } \log_{5/2} = 0.716 \text{ و } \log 1/0.2 = 0.0086$$

سپس با جای‌گذاری آن‌ها در رابطه‌ی (8)، مقدار t را پیدا می‌کنیم

$$0.602 + 1 = 0.716 + t \times 0.0086$$

$$1/602 - 0.716 = 0.0086t$$

$$t = \frac{1/602 - 0.716}{0.0086} = \frac{0.886}{0.0086} = 103.02$$

در شکل ۲، مشاهده می‌شود که هر چه زمان به جلو می‌رود، جمعیت سریع‌تر و سریع‌تر رشد می‌کند و این ویژگی یک تابع نمایی است. این نمودار نشان می‌دهد که حتی اگر در ابتدا، یک تابع نمایی آهسته‌آهسته رشد کند، با گذشت زمان، این رشد سریع‌تر و سریع‌تر خواهد شد. شاید آگاهی از این موضوع به ما کمک کند تا بهتر با مشکلات ازدیاد جمعیت آشنا شویم!

در فعالیت قبلی، اگر رشد جمعیت کره‌ی زمین را از سال ۱۹۹۰ به بعد با آهنگ رشد $1/0.2$ و در سال‌های مختلف حساب کنیم به نتایج جالبی می‌رسیم. به محاسبات زیر توجه کنید.

جمعیت کره‌ی زمین پس از گذشت ۳، ۳۵، ۵۰، ۶۶، ۷۰ و ۱۰۵ سال را از سال ۱۹۹۰ به بعد و با آهنگ رشد سالانه‌ی ۲ درصد حساب می‌کنیم

$${}^2 P_t = P_0 (1+r)^t \quad (9)$$

$$P_0 = 5/2 \text{ میلیارد } 1990 \text{ سال - شروع اولیه} \quad (10)$$

$$P_{30} = 5/2(1/0.2)^{30} = 9/419 \text{ میلیارد} \quad (11)$$

$$P_{35} = 5/2(1/0.2)^{35} = 10/399 \text{ میلیارد} \quad (12)$$

$$P_{50} = 5/2(1/0.2)^{50} = 13/996 \text{ میلیارد} \quad (13)$$

۱- با تبدیل $\log 4^0$ به $\log 4 + \log 1^0$ ، ارتباط بین لگاریتم‌گیری با نماد علمی بهتر دیده می‌شود.

۲- Growth rate

۳- در این رابطه به جای A_1 و A_2 ، از نمادهای P_1 و P_2 که معرف جمعیت (Population) هستند، استفاده می‌کنیم.

$$P_{66} = 5/2(1/0.2)^{66} = 19/213 \text{ میلیارد} \quad (14)$$

$$P_{70} = 5/2(1/0.2)^{70} = 20/797! \quad 5/2 \times 4 \text{ میلیارد} \quad (15)$$

$$P_{105} = 5/2(1/0.2)^{105} = 41/593. \quad 5/2 \times 8 \text{ میلیارد} \quad (16)$$

در محاسبات فوق، مشاهده می‌کنیم که رابطه‌های (۱۲)، (۱۵) و (۱۶) از ویژگی خاصی برخوردار هستند. رابطه‌ی (۱۲) نشان می‌دهد که پس از گذشت ۳۵ سال، جمعیت کره‌ی زمین به دو برابر جمعیت اولیه آن (شروع سال ۱۹۹۰) می‌رسد. رابطه‌ی (۱۵) نشان‌دهنده‌ی چهاربرابری جمعیت کره‌ی زمین پس از گذشت ۷۰ سال یعنی 2×35 سال است. رابطه‌ی (۱۶) حاکی از هشت برابر شدن جمعیت کره‌ی زمین پس از گذشت ۱۰۵ سال یعنی 3×35 سال است. این یافته‌ها را در جدولی منظم می‌کنیم تا رابطه‌ی بین آن‌ها را بهتر ببینیم:

جدول (۳)

تعداد سال‌ها t	تعداد دوره‌ی زمانی T	جمعیت کره‌ی زمین
۳۵	۱	$5/2 \times 2^1$
۷۰	۲	$(5/2 \times 2) \times 2 = 5/2 \times 4$
۱۰۵	۳	$(5/2 \times 2 \times 2) \times 2 = 5/2 \times 8$

جمعیت کره‌ی زمین در هر دوره‌ی زمانی^۱، یعنی هر ۳۵ سال یک‌بار، به دو برابر می‌رسد. این دوره‌ی زمانی (۳۵ سال) را زمان دو برابر شدن^۲ جمعیت کره‌ی زمین می‌نامیم.

زمان دو برابر شدن یک تابع نمایی رشد، زمانی است که مقدار اولیه دو برابر شود. هر تابع نمایی رشد دارای یک زمان دو برابر شدن ثابت است.

می‌توانیم به جای آهنگ رشد سالانه‌ی جمعیت، آهنگ رشد ماهانه و حتی آهنگ رشد روزانه را به دست آوریم که به واقعیت نیز نزدیک‌تر است. مسأله‌ی قبلی را با توجه به آهنگ رشد ماهانه بررسی می‌کنیم. چون در رابطه‌ی

$$P_t = P_0(1+r)^t$$

۱- Time period

۲- Doubling time

r آهنگ رشد سالانه است. در نتیجه آهنگ رشد ماهانه $\frac{r}{12}$ خواهد بود. به عنوان مثال، جمعیت کره‌ی زمین در ۳۵ سال آینده با توجه به جمعیت اولیه $5/2$ میلیارد نفری در سال 1990 و قراردادن زمان برحسب ماه عبارت است از:

$$P_{35} = 5/2 \left(1 + \frac{0/02}{12}\right)^{12 \times 35} = 10/465 \text{ میلیارد}$$

درحالی که اگر آهنگ رشد سالانه را در نظر بگیریم، در ۳۵ سال آینده، جمعیت کره زمین تقریباً دو برابر یعنی $P_{35} = 10/399$ میلیارد می‌شود که کم‌تر از تخمین جمعیت با آهنگ رشد ماهانه است.

بهتر است برای مقایسه‌ی دقیق‌تر، جمعیت دنیا را با در نظر گرفتن آهنگ رشد روزانه نیز بررسی کنیم. در چنین وضعی، به جای $r = 0/02$ ، $\frac{r}{365}$ و یا $\frac{0/02}{365}$ را قرار می‌دهیم، در این صورت:

$$P_{35} = 5/2 \left(1 + \frac{0/02}{365}\right)^{365 \times 35} = 10/471$$

مشاهده می‌کنیم که آهنگ رشد روزانه‌ی جمعیت دقیق‌تر از آهنگ رشد ماهانه و باز هم دقیق‌تر از آهنگ رشد سالانه است. به طور کلی، اگر تقسیم‌بندی باز هم کوچک‌تری از سال را در نظر بگیریم، دقت ما بالاتر می‌رود. اگر سال را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت.

$$P_t = P_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

۴-۲- مسائل زوال^۱

فعالیت ۴-۳

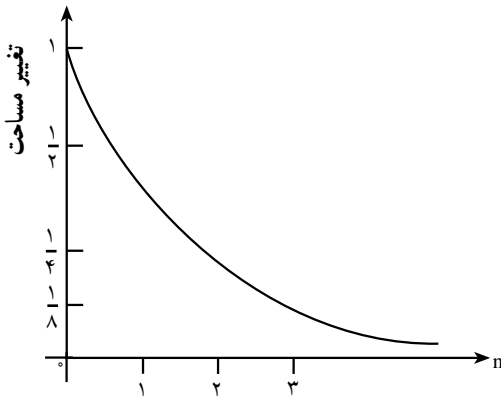
یک صفحه کاغذ سفید را در دست بگیرید و آن را تا بزنید. دوباره کاغذ تاخورده را تای جدید بزنید و این تازدن‌ها را تا آن جایی که می‌توانید ادامه دهید. بعد از اولین تا زدن، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آن‌ها نصف مساحت قبلی یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. جدول (۴) چگونگی تغییر تعداد ناحیه‌هایی که بر اثر تازدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند و چگونگی تغییر مساحت‌های آن ناحیه‌ها را بررسی می‌کند:

^۱- Decay

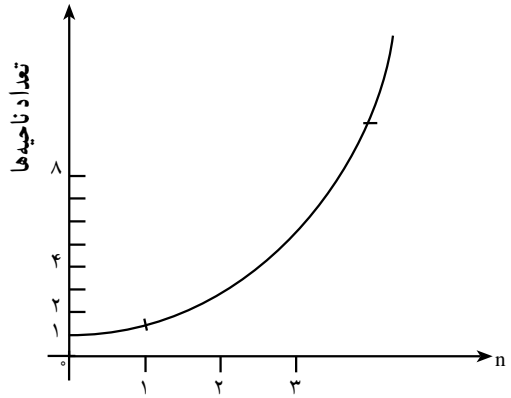
جدول (۴)

تعداد نازدها n	تعداد ناحیه‌ها	چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌ها
۰	$1 = 2^0$	$1 = \frac{1}{2^0} = \left(\frac{1}{2}\right)^0$
۱	$2 = 2^1$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$
۲	$4 = 2^2$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
۳	$8 = 2^3$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
n	2^n	$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

با توجه به داده‌های جدول بالا، دو نمودار زیر را رسم می‌کنیم:



شکل ۴- زوال



شکل ۳- رشد

همان‌طور که در دو نمودار دیده می‌شود، هم‌چنان که تعداد ناحیه‌ها بر اثر تا کردن‌های متوالی بیشتر و بیشتر می‌شود، مساحت ناحیه‌ها کمتر و کمتر می‌شود! در واقع، تعداد ناحیه‌ها به‌طور نمایی رشد می‌کند، مساحت ناحیه‌ها به‌طور نمایی رو به زوال می‌رود. با بررسی عمیق‌تر نمودار (۴) مشاهده می‌کنیم که فاکتور زوال $a = \frac{1}{2}$ است که از یک کوچک‌تر است در حالی که در نمودار (۳) فاکتور رشد $a = 2$ است که از یک بزرگ‌تر است.

۴-۲-۱- چگونگی تعیین قدمت سنگواره (زوال کربن)

فعالیت ۴-۴

کربن به وسیله‌ی موجودات زنده جذب می‌شود. نسبت ایزوتوپ‌های C^{12} ، C^{13} و C^{14} در موجودات زنده ثابت است. با این حال، به محض این که موجودات زنده بمیرند، جذب ایزوتوپ C^{14} به وسیله‌ی آن‌ها متوقف می‌شود و C^{14} موجود در آن‌ها شروع به زوال می‌کند. دانستن این که با چه سرعتی C^{14} روبه زوال می‌رود، به ما فرصت می‌دهد تا قدمت موجودات را پیدا کنیم و این فن (تکنیک) وسیله‌ی قدرتمندی برای باستان‌شناسان است که به آن آزمایش C^{14} گفته می‌شود. لازم است گفته شود که ۵۷۰۰ سال طول می‌کشد تا مقدار ایزوتوپ C^{14} به نصف مقدار اولیه‌ی خود برسد.

مثال ۴: کربن یک استخوان فسیل شده شامل تنها ۲۰ درصد مقدار معمولی C^{14} است. می‌خواهیم قدمت استخوان را تخمین بزنیم.

حل: می‌دانیم که ۵۷۰۰ سال طول می‌کشد تا مقدار ایزوتوپ C^{14} کربن به نصف کاهش یابد. این زمان، نیم‌عمر و ۵۷۰۰ سال، یک دوره‌ی زمانی برای زوال C^{14} در کربن نامیده می‌شود. در واقع، ما به دنبال پیدا کردن دوره‌ی زمانی مشخصی هستیم که با گذشت آن، مقدار ایزوتوپ C^{14} کربن به ۲۰٪ می‌رسد. الگوی زیر می‌تواند راهنمای ما باشد:

جدول (۵)

دوره‌ی زمانی	تعداد سال‌ها	مقدار C^{14} باقی‌مانده	درصد مقدار باقی‌مانده
۱	۵۷۰۰	$\frac{1}{2}$	۵۰٪
۲	$۵۷۰۰ \times ۲ = ۱۱۴۰۰$	$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	۲۵٪
۳	$۵۷۰۰ \times ۳ = ۱۷۱۰۰$	$(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	۱۲/۵٪

با مشاهده‌ی جدول درمی‌یابیم که در مدتی بیشتر از دو دوره‌ی زمانی و کم‌تر از سه دوره‌ی زمانی، مقدار C^{14} به ۲۰ درصد مقدار اولیه‌ی خود می‌رسد. اکنون که زمان تقریبی را پیدا کردیم، با دانستن این که میزان C^{14} در کربن به صورت نمایی روبه زوال می‌رود و با استفاده از

۱- ایزوتوپ‌های کربن دارای تعداد پروتون‌ها و الکترون‌های مساوی (۶) هستند ولی تعداد نوترون‌های آن‌ها متفاوت است. این تعداد در C^{12} ، C^{13} و C^{14} به ترتیب برابر ۶، ۷ و ۸ است.

رابطه‌ی $\mathbf{a}^T = \mathbf{b}$ ، زمان دقیق را پیدا می‌کنیم
فاکتور زوال در یک دوره‌ی زمانی

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{b} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

فاکتور زوال در T دوره‌ی زمانی

در نتیجه

$$\left(\frac{1}{2}\right)^T = \frac{1}{5}$$

(۱)

رابطه‌ی (۱) مدلی مناسب برای به‌دست آوردن T است. با استفاده از (۱) و به‌کارگیری روش‌های محاسباتی متنوع، می‌توانیم مقدار T و سپس $t = 5700 \cdot T$ را پیدا کنیم.
روش ۱: لگاریتم گرفتن از دو طرف (۱)

$$T \log \frac{1}{2} = \log \frac{1}{5}$$

$$T(-0/301) = -0/698$$

$$T = \frac{-0/698}{-0/301}$$

$$T = 2/322$$

چون هر دوره‌ی زمانی برای زوال مقدار C^{14} در کربن 5700 سال است، در نتیجه زمان دقیق برابر است با

$$t = 5700 \times T = 5700 \times 2/322$$

$$t = 13235/4$$

یعنی استخوان فسیلی که شامل تنها 20 درصد C^{14} است قدمتی برابر با $13235/4$ سال دارد.

روش ۲: استفاده از نمودار توان‌های کسری 10 (فصل لگاریتم)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^T = \frac{1}{5}$$

(۲)

دو طرف (۲) را به صورت معکوس می‌نویسیم (به چه دلیل؟):

$$2^T = 5 \quad (3)$$

با توجه به نمودار جدول مذکور، مقادیر ۲ و ۵ را برحسب توان‌های کسری 1° می‌نویسیم

$$5 = 1^{\circ/699} \quad , \quad 2 = 1^{\circ/301}$$

و آن‌ها را در (۳) جایگزین می‌کنیم

$$1^{\circ/301} \#^T = 1^{\circ/699} \quad (4)$$

$$1^{\circ/301} T = 1^{\circ/699}$$

چون پایه‌ها در (۴) با هم برابرند، در نتیجه توان‌ها نیز با هم مساویند

$$0/301 T = 0/699 \quad (5)$$

$$T = \frac{0/699}{0/301}$$

تعداد دوره‌های زمانی لازم برای رسیدن C^{14} به 20% مقدار اولیه برابر است با

$$T = 2/322$$

و مدت زمان برحسب سال برابر است با

$$t = 5700 \cdot T = 5700 \times 2/322$$

$$t = 13235/4$$

می‌بینیم که زمان دقیق به زمان تقریبی که در جدول (۵) به دست آوردیم، یعنی بین ۲ و ۳ دوره‌ی زمانی بسیار نزدیک است.

فعالیت ۴-۵

مسأله: برای بیهوش کردن یک سگ، 30 میلی‌گرم داروی سدیم پنتوباریتال برای هر یک کیلوگرم وزن بدن لازم است. اگر دارو به طور نمایی در بدن روبه‌زوال برود، با در نظر گرفتن نیم‌عمر دارو که 4 ساعت است، تقریباً چه مقدار دارو برای بیهوش نگه داشتن این سگ 20 کیلوگرمی به مدت 45 دقیقه لازم است؟

حل: کلید اصلی حل این مسأله، دانستن زوال نمایی دارو در بدن است به این معنا که بعد از هر دوره‌ی زمانی (۴ ساعت) دارو به نصف مقدار اولیه‌ی خود در بدن می‌رسد و ادامه‌ی نصف شدن‌ها همان زوال نمایی است.

در ضمن، باید بدانیم ۴۵ دقیقه چه نسبتی از یک دوره‌ی زمانی ۴ ساعتی است:

$$۴۵ \text{ دقیقه} = \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

یا $\frac{۴۵}{۴ \times ۶۰} = \frac{۹}{۴ \times ۱۲} = \frac{۳}{۴ \times ۴} = \frac{۳}{۱۶}$ دوره‌ی زمانی

با توجه به داده‌های مسأله، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

جدول (۶)

مقدار داروی باقی مانده بر حسب توان‌های $\frac{۱}{۲}$	تعداد ساعت‌ها	دوره‌ی زمانی
$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۳}{۱۶}}$	$\frac{۳}{۱۶} \times ۴$	$\frac{۳}{۱۶}$
$(\frac{۱}{۲})^1$	۱×۴	۱
$(\frac{۱}{۲})^2$	۲×۴	۲

داده‌های مسأله یعنی

$$\frac{۱}{۲} = \text{فاکتور زوال در یک واحد زمانی} = \frac{۱}{۲}$$

$$b = \text{فاکتور زوال در } \frac{۳}{۱۶} \text{ واحد زمانی}$$

$$۰/۱۸۷۵ = \frac{۳}{۱۶} = t = \text{دوره‌ی زمانی مورد نظر}$$

را در رابطه‌ی $a^t = b$ قرار می‌دهیم. آنگاه

$$(۰/۵)^{۰/۱۸۷۵} = b$$

$$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۳}{۱۶}} = b.$$

یا

(۶)

رابطه‌ی (۶) مدل مناسبی را برای پیدا کردن فاکتور زوال در $\frac{3}{16}$ واحد زمانی به دست می‌دهد. برای انجام محاسبات، راحت‌ترین کار استفاده از ماشین حساب علمی است: با توجه به وزن بدن سگ که ۲۰ کیلوگرم است، مقدار دارویی که در هر لحظه تا پایان عمل باید در بدن سگ وجود داشته باشد تا او را بیهوش نگه دارد، برابر $600 = 20 \times 30$ میلی‌گرم است. در واقع، مقدار داروی بیهوشی لازم برای مدت عمل باید بیش از ۶۰۰ میلی‌گرم تا پایان عمل در بدن باشد. با محاسبات فوق، مقدار فاکتور زوال در ۴۵ دقیقه که همان $\frac{3}{16}$ دوره‌ی زمانی است را نیز پیدا کرده‌ایم

$$b = 0 / 878$$

تنها مجهول مسأله، مقدار داروی لازم در حین عمل است؛ یعنی چه مقدار سدیم پنتوباریتال باید به بدن سگ تزریق شود تا با توجه به فاکتور زوال $b = 0 / 878$ ، هم‌چنان ۶۰۰ میلی‌گرم دارو در بدن باقی بماند.

$$600 = 0 / 878 \times \text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق}$$

$$\text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق} = \frac{600}{0 / 878}$$

$$\boxed{\text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق} = 683 / 37}$$

تمرین ۵: با روش‌های دیگر، از جمله مراجعه به جدول لگاریتم، محاسبات فوق را انجام دهید.

مسائل

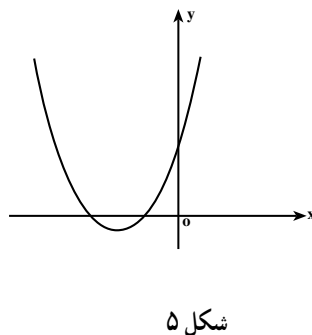
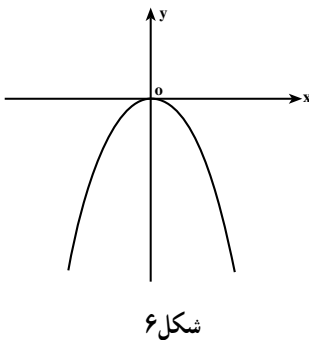
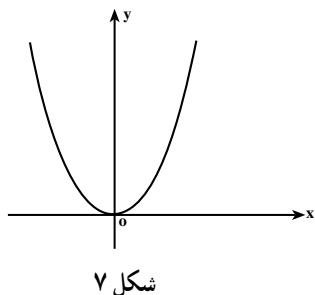
- اگر آهنگ رشد جمعیت در کشوری $1/2\%$ در سال باشد، چند سال طول می‌کشد تا جمعیت دو برابر شود؟ (جواب را با تقریب یک رقم اعشار بنویسید)
- از یکی از آرامگاه‌های سومریان، یک ظرف سفالی با قدمت ۴۵ قرن یافت شده است. این قدمت با توجه به شواهد تاریخی است. برای تأیید آن، یک آزمایش C^{14} روی آن انجام شد. انتظار دارید چند درصد از کربن C^{14} اولیه، باقی مانده باشد؟
- ایزوتوپ هیدروژن 3H که نیمه عمر آن $12/3$ سال است در طبقات بالایی جو تشکیل می‌شود و همراه باران به زمین می‌آید. اگر میزان این ایزوتوپ در چوب یک کشتی قدیمی 10% همان

ایزوتوپ در چوب یک کشتی جدید مشابه باشد، سن آن را تقریب بزنید.
 ۴- معلوم شده است که میزان کربن C^{14} موجود در درختانی که توسط یخچال‌های متحرک عصر چهارم یخبندان نابود شده‌اند، ۲۷٪ میزان کربن C^{14} در درختان زنده است. درباره‌ی تاریخ شروع این عصر یخبندان چه می‌توانید بگویید؟

۴-۳- بهینه‌سازی

دامنه‌ی مسائل بهینه‌سازی سیار وسیع است، با این حال، در این کتاب، مسائلی از بهینه‌سازی را مطرح می‌کنیم که با دانستن رفتار و خصوصیات توابع درجه‌ی دوم قابل بررسی باشند.

فعالیت ۴-۶



- ۱- از منحنی‌های بالا کدام یک ماکزیمم و کدام یک می‌نیمم دارند؟
- ۲- توابع $y = x^2 + 1$ و $y = -x^2 + 3$ را رسم کنید و وجود ماکزیمم و می‌نیمم را بررسی کنید.
- ۳- توابع $y = 2x^2 + 2x + 1$ و $y = -x^2 + 2x + 1$ را رسم کنید و وجود ماکزیمم و می‌نیمم را بررسی کنید.

۴- از سؤال‌های ۱ تا ۳ چه نتیجه‌ای درباره‌ی ماکزیمم و می‌نیمم تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ برای دو حالت $a > 0$ و $a < 0$ می‌گیرید؟

- ۵- اگر a ، سهمی رو به بالا است یا رو به پایین؟ تابع ماکزیمم دارد یا می‌نیمم؟ اگر a ، سهمی رو به بالا است یا رو به پایین؟ تابع ماکزیمم دارد یا می‌نیمم؟
- ۶- اگر $a = 0$ ، در مورد ماکزیمم و می‌نیمم تابع چه می‌توان گفت؟
- ۷- طول نقطه‌ای را که در آن تابع ماکزیمم یا می‌نیمم دارد تعیین کنید.
- ۸- مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم تابع f را تعیین کنید و سپس مختصات نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم آن را بنویسید.

- ۹- آیا جواب سؤال‌های ۵ تا ۸ برای هر تابع درجه‌ی دوم درست است؟ چرا؟
- ۱۰- آیا می‌توانید بدون قلم و کاغذ، نمودار و نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم هر تابع درجه‌ی دوم را تصور کنید؟ جواب خود را توجیه کنید.
- ۱۱- بدون استفاده از قلم و کاغذ نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم توابع زیر را پیدا کنید:
- الف) $f(x) = 4x^2 - 3x$ ؛
- ب) $g(x) = x^2 - 2x + 1$
- ۱۲- آیا تابع درجه‌ی دومی وجود دارند که هم ماکزیمم و هم می‌نیمم داشته باشند؟ توضیح دهید.

فعالیت ۴-۷

۴-۴- بازاریابی

بخش تحقیقات و بازاریابی یک شرکت، پس از تحقیق و بررسی وضعیت بازار در مورد یک کالای جدید که توسط شرکت تولید می‌شود، معادله‌ی تقاضا را با توجه به این که بر اثر افزایش قیمت، تقاضا کم می‌شود، مدل‌سازی ریاضی کرده به مدیریت ارائه می‌کند:

$$x = 6000 - 30P \quad (1)$$

معادله‌ی تقاضا

که در آن x تعداد واحد کالایی است که مصرف کنندگان در یک ماه خرید می‌کنند و p (برحسب تومان) قیمت هر واحد کالا است. همچنین بخش مالی شرکت، هزینه‌ی تمام شده‌ی تولید کالای جدید را با معادله‌ی زیر به مدیریت شرکت ارائه کرده است.

$$C = 72000 + 60x \quad (2)$$

معادله‌ی هزینه

که در آن ۷۲۰۰۰ تومان هزینه‌ی ثابت تولید مربوط به دستگاه‌ها، استهلاک و هزینه‌های مشابه است و ۶۰ تومان هزینه‌ی متغیر تولید هر واحد کالا مربوط به دستمزد کارگر، مواد اولیه، انبارداری و حمل و نقل است. با توجه به قیمت کالا، یعنی p و تعداد واحد کالای تولید شده، x ، معادله‌ی درآمد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\text{(قیمت هر واحد کالا)} \times \text{(تعداد واحد کالا)} = \text{درآمد}$$

$$R = x \times p \quad \text{: معادله‌ی درآمد} \quad (۳)$$

رابطه‌ی (۲)، هزینه‌ی C را به عنوان تابعی از x بیان می‌کند و رابطه‌ی (۱)، تقاضای x را بعنوان تابعی از p مشخص می‌نماید.

مدیر شرکت درصدد پیدا کردن مقدار تولیدی بود که بیشترین سود را عاید شرکت نماید. به همین منظور، بخش تحقیقات مشغول مطالعه گردید تا راهی پیدا کند که شرکت به سود ماکزیمم برسد. اولین حدس آن‌ها این بود که سود ماکزیمم وقتی عاید می‌شود که درآمد شرکت ماکزیمم گردد. اکنون به بررسی این حدس می‌پردازیم و سطح تولیدی را می‌یابیم که درآمد را ماکزیمم کند.

۴-۱- ماکزیمم کردن درآمد: برای اینکار لازم است تابع درآمد را برحسب x بسازیم.

معادله (۱) را بصورت

$$۳۰p = ۶۰۰۰ - x$$

می‌نویسیم و p را برحسب x محاسبه می‌کنیم:

$$p = \frac{۶۰۰۰ - x}{۳۰}$$

$$p = ۲۰۰ - \frac{۱}{۳۰}x$$

یا

p را در (۳) جایگزین می‌کنیم:

$$R(x) = x\left(۲۰۰ - \frac{۱}{۳۰}x\right)$$

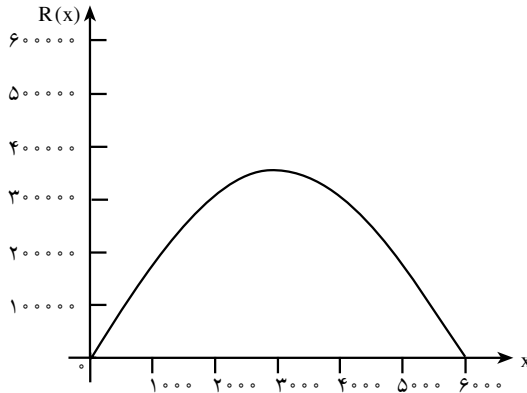
بنابراین مدل ریاضی به صورت زیر تبدیل می گردد :

$$R(x) = 200x - \frac{1}{300}x^2$$

با قرار دادن $R(x) = 0$ محل تلاقی نمودار تابع $R(x)$ را با محور x ها محاسبه می کنیم که مقادیر زیر به دست می آید

$$x = 0, \quad x = 6000$$

نمودار تابع درجه ی دوم $R(x)$ به صورت زیر است :



شکل ۸- نمودار تابع $R(x)$

از طرف دیگر طول نقطه رأس سهمی برابر است با :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{2 \times (-\frac{1}{300})} = 3000$$

طول این نقطه از روی نمودار نیز محاسبه می شود. نمودار محور x ها را در دو نقطه $O = (0, 0)$ و $A = (6000, 0)$ قطع می کند. طول رأس سهمی وسط این دو نقطه است. بنابراین :

$$x = \frac{0 + 6000}{2} = 3000$$

و ماکزیم درآمد برحسب تومان برابر است با

$$\begin{aligned} R(3000) &= 200(3000) - \frac{1}{30}(3000)^2 \\ &= 600000 - 300000 \\ &= 300000 \end{aligned}$$

$R(3000) = 300000$	بیشترین درآمد برحسب تومان
--------------------	---------------------------

اما آیا این مقدار درآمد، سود را ماکزیم خواهد کرد؟ به بررسی این سؤال می پردازیم.

۴-۲- ماکزیم کردن سود: با توجه به هدف شرکت ماکزیم کردن تابع سود

هزینه - درآمد = سود

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

مورد نظر است. برای این کار، با استفاده از رابطه ی (۲) می توان نوشت:

$$P(x) = (200x - \frac{x^2}{30}) - (72000 + 60x)$$

$$= \frac{-x^2}{30} + 140x - 72000$$

که تابعی درجه دوم است. در نتیجه، با توجه به علامت ضریب x^2 ، تابع دارای ماکزیمی است که همواره در رأس سهمی اتفاق می افتد بنابراین:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(140)}{2(-\frac{1}{30})} = \frac{70}{\frac{1}{30}}$$

$x = 2100$

$$P(2100) = \frac{-(2100)^2}{30} + 140(2100) - 72000$$

$$= \frac{-4410000}{30} + 2940000 - 72000$$

$$= -147000 + 222000 = 75000$$

۱- Profit

بیشترین سود برحسب تومان

ماکزیم $P(x) = 75000$

همچنین، شرکت باید قیمت فروش هر واحد کالا را به گونه‌ای تعیین کند تا سود ماکزیمم گردد. با استفاده از معادله‌ی (۴) می‌توان قیمت هر واحد کالا را به‌دست آورد:

$$P(2100) = 2000 - \frac{1}{30}(2100)$$

$$= 2000 - 70$$

$$= 1930$$

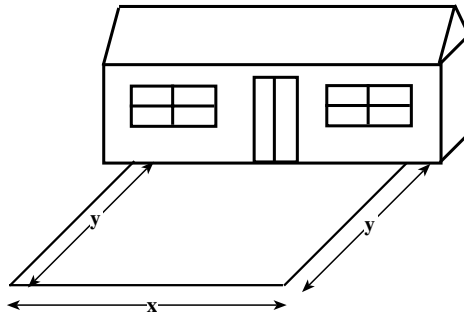
قیمت هر واحد کالا برحسب تومان

تمرین: در حالت اول که درآمد ماکزیمم بود، سود را محاسبه کنید و آن را با سود ماکزیمم

مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

فعالیت ۴-۸

جنگلبانی می‌خواهد محوطه‌ی مستطیل شکلی جلوی محل سکونت خود بسازد. برای این منظور، مقدار ۱۰۰ مترمربع سیم توری به ارتفاع یک متر برای حصارکشی سه طرف محوطه در اختیار دارد. طول و عرض محوطه‌ی مستطیل شکل را چگونه انتخاب کند تا مساحت محصور شده ماکزیمم شود؟ برای حل این مسأله، می‌توان از شکل فرضی زیر کمک گرفت:



شکل ۹- مسأله جنگلبان

کمیت‌های متغیر، طول و عرض و مساحت محوطه هستند. که آن‌ها را به ترتیب x ، y و A نامگذاری می‌کنیم. سپس رابطه‌ی بین متغیرها را بررسی می‌کنیم. چون جنگلبان فقط ۱۰۰ مترمربع سیم توری دارد، پس محیط محوطه مورد نظر او ۱۰۰ متر است:

$$\text{محیط محوطه} = 100 = y + x + y$$

یا

$$100 = x + 2y \quad (1)$$

رابطه‌ی دیگری که بین متغیرها وجود دارد مربوط به مساحت محوطه است. چون محوطه مستطیل شکل است پس:

$$A = x \cdot y \quad (2)$$

از رابطه‌ی (۱)، x را بر حسب متغیر y به دست آورده و در رابطه‌ی (۲) جایگزین می‌کنیم
 $x = 100 - 2y$

و اگر رابطه‌ی اخیر را در (۲) جایگزین کنیم داریم

$$A = (100 - 2y)y$$

$$= 100y - 2y^2$$

بنابراین

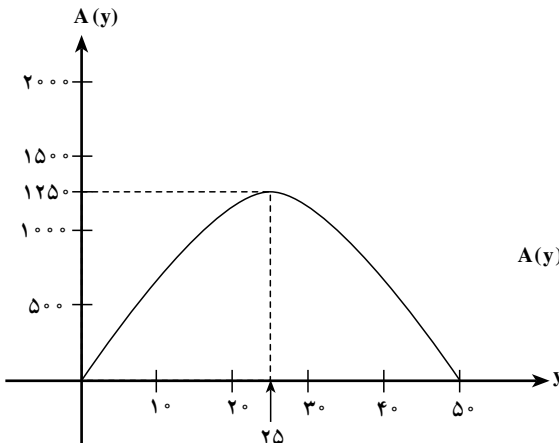
$$A(y) = 100y - 2y^2$$

چون هدف پیدا کردن طول و عرض محوطه به طریقی است که مساحت ماکزیم شود، در نتیجه باید ماکزیم تابع

$$A(y) = 100y - 2y^2$$

را به دست آورد.

تابع $A(y)$ در $y = 0$ و $y = 50$ مساوی صفر می‌شود (این مقادیر را خودتان به دست آورید)



شکل ۱۰- نمودار تابع $A(y) = 100y - 2y^2$

رأس سهمی نقطه‌ی ماکزیمم تابع است. چون

$$y = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = 25$$

طول رأس سهمی

پس مقدار ماکزیمم تابع برابر است با :

$$\begin{aligned} A(25) &= 100(25) - 2(25)^2 \\ &= 2500 - 1250 \\ &= 1250 \text{ مترمربع} \end{aligned}$$

مسائل

۱- هرگاه در یک جریب زمین ($4047m^2$)، ۲۰، درخت گردو با فاصله‌ی مساوی از هم کاشته شوند، پس از رشد کافی در یک سال از هر درخت ۶۰ کیلوگرم گردو برداشت خواهد شد. برای هر درخت اضافی که کاشته شود، ۲ کیلوگرم از میانگین سالانه محصول درختان کم می‌گردد. برای به‌دست آوردن بیشترین محصول گردو در هر جریب چند درخت اضافه باید کاشته شود؟ در این صورت چه قدر محصول گردو برداشت می‌شود؟

۲- یک شرکت x واحد کالا در هفته تولید کرده و به فروش می‌رساند. تابع هزینه و تابع تقاضای هفتگی با معادلات زیر داده شده است :

$$C(x) = 5000 + 2x \text{ تابع هزینه}$$

$$x = 1000 - 10P \text{ تابع تقاضا}$$

(الف) چند واحد کالا تولید کند و با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین درآمد به‌دست آید؟

(ب) چند واحد کالا تولید کند و با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین سود به‌دست آید؟

(پ) آیا بیشترین سود زمانی رخ می‌دهد که درآمد هم ماکزیمم گردد؟

۳- یک ویژگی از اعداد حقیقی: بعضی از اعداد کوچک‌تر از مربع خودشان هستند مثلاً

۲ کوچک‌تر از $4 = 2^2$ است و بعضی از اعداد بزرگ‌تر از مربع خودشان هستند مانند $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{9}$ اعداد صفر و یک برابر مربع خودشان می‌باشند. ولی هر عدد حقیقی بین صفر و یک همواره از مربع خودش کوچک‌تر است. عددی بین ۰ و ۱ بیابید که اختلافش با مربع آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۴- جعبه‌ی در باز: یک کارخانه ساخت وسایل بسته‌بندی می‌خواهد جعبه‌های در باز بسازد.

ورقه‌هایی که در اختیار کارخانه است 18×18 می‌باشد. می‌خواهیم ابعاد جعبه‌ها را طوری تعیین

کنیم که بیشترین حجم را داشته باشند. برای این کار چند برگ کاغذ شطرنجی 18×18 تهیه کنید و هر بار یک مربع به ضلع $2, 1$ و ... واحد از چهار گوشه‌ی کاغذ بردارید و کناره‌ها را تا کنید سپس حجم را با شمارش تعداد مکعب‌هایی که در آن جا می‌گیرد و یا با روش محاسبه‌ی حجم مکعب، محاسبه کنید و در جدول زیر بنویسید.

الف) حجم ماکزیمم چه قدر است؟ ابعاد مربوط به حجم ماکزیمم چه قدر است؟

جدول (۷)

ضلع مربع بریده شده	۱	۲	۳
حجم			

ب) اگر طول ضلع مربع بریده شده را x بگیریم اندازه‌ی ابعاد جعبه چه قدر است؟
 پ) حجم را برحسب x بیان کنید. تابع از درجه‌ی چند است؟
 ت) نقاط جدول را روی یک دستگاه مختصات رسم کرده و آن‌ها را با منحنی همواری به هم وصل کنید.