

۱۹. به کمک تمرین قبل  $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{\circ\circ}$  را محاسبه کنید.

## ۲.۴ دترمینان‌ها

در سال دوم دیده‌ایم که می‌توانیم به یک ماتریس  $2 \times 2$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  یک عدد وابسته

کنیم که به آن دترمینان ماتریس  $A$  می‌گفتند و با  $|A|$  یا  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  نمایش می‌دادند و به صورت

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

تعریف می‌شد. اکنون در این بخش می‌خواهیم مفهوم دترمینان را برای ماتریس  $3 \times 3$  تعریف کنیم. در زیر تعاریفی می‌آوریم و به کمک آنها این مفهوم را شرح می‌دهیم.

**تعریف.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت  $i, j$  – امین کهاد

ماتریس  $A$  را که با  $M_{ij}$  نمایش می‌دهیم ماتریسی  $2 \times 2$  تعریف می‌کنیم که از حذف سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $A$  به دست می‌آید.

مثال ۱. برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ ، داریم  $M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$  و

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

**تعریف.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت  $i, j$  – امین همسازۀ

ماتریس  $A$  را که با  $A_{ij}$  نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|,$$

که در آن  $|M_{ij}|$  دترمینان ماتریس  $2 \times 2$  ی  $M_{ij}$  است.

مثال ۲. برای ماتریس مثال قبل، داریم:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10.$$

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت اعداد

$$(1) \quad a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$(2) \quad a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$(3) \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$(4) \quad a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$(5) \quad a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$(6) \quad a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

همگی با هم مساوی هستند.

**اثبات.** برابری دو عدد ظاهر شده در ۱ و ۲ را برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

بررسی می کنیم.

$$\text{عدد ظاهر شده در ۱} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\
&\quad a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{21}[-(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})] + a_{22}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + \\
&\quad a_{23}[-(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})] \\
&= a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \\
&\quad a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= 2 \text{ عدد ظاهر شده در } 2.
\end{aligned}$$

درستی این که تمامی اعداد ظاهر شده در قضیه با هم برابرند، محاسباتی مشابه محاسبات بالا

دارد. ■

**تعریف.** فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  ماتریسی دلخواه باشد. دترمینان  $A$  را که

با  $|A|$  یا  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  نمایش می‌دهیم، یکی از ۶ عدد مساوی معرفی شده در قضیه ۱ تعریف

می‌کنیم.

تذکر. اگر  $|A|$  را از عدد معرفی شده در ۱ محاسبه کنیم، می‌گوییم  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به سطر اول حساب کرده‌ایم. اگر مثلاً از عدد معرفی شده در ۶ محاسبه کنیم می‌گوییم  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به ستون سوم حساب کرده‌ایم و الی آخر.

مثال ۳. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  را در نظر می‌گیریم.  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به سطر

دوم پیدا می‌کنیم :

$$\begin{aligned} |A| &= 4A_{21} + 2A_{22} + 3A_{23} \\ &= 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4(16) + 2(14) - 3(11) = -69. \end{aligned}$$

اگر  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به ستون سوم محاسبه می‌کردیم نیز، نتیجه بالا به دست می‌آمد :

$$\begin{aligned} |A| &= 2A_{13} + 3A_{23} + 4A_{33} \\ &= 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(10) - 3(11) + 4(-14) = -69. \end{aligned}$$

مثال ۴. می‌خواهیم  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$  را محاسبه کنیم. در اینجا به خاطر وجود دو صفر در سطر

اول، به صرفه است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به سطر اول محاسبه کنیم :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

مثال ۵. می‌خواهیم  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$  را محاسبه کنیم. در اینجا نیز به خاطر وجود دو صفر

در ستون اول، به صرفه است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به ستون اول محاسبه کنیم :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} b & c \\ 0 & f \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} = adf.$$

تذکر. از مثال قبل درمی‌یابیم که برای ماتریس‌های  $3 \times 3$  که بالا مثلثی هستند، دترمینان برابر

است با حاصلضرب درآیه‌های روی قطر اصلی آن ماتریس. دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  که پایین مثلثی و یا قطری هستند نیز چنین می‌باشد.

**قضیه ۲.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  و  $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$  دو ماتریس دلخواه باشند. در این صورت  $|AB| = |A||B|$ .

**اثبات.** بررسی درستی این قضیه به کمک محاسبه، سرراست ولی طاقت‌فرسا می‌باشد که آن را به صورت یک تمرین رها می‌کنیم. ■

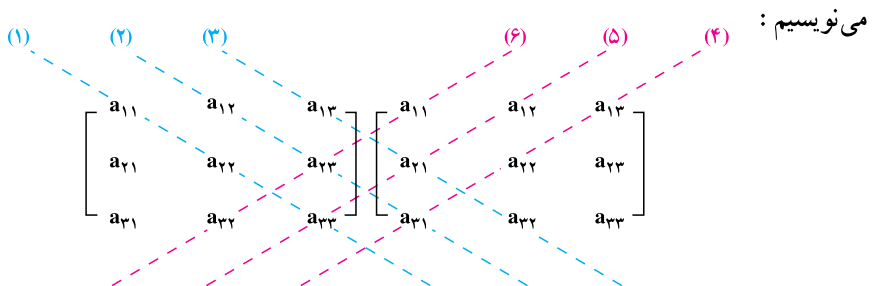
**نتیجه.** فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  ماتریسی دلخواه باشد و  $n$  یک عدد طبیعی. در این صورت  $|A^n| = |A|^n$ .

**اثبات.** بنابر قضیه ۲،  $|A^2| = |AA| = |A||A| = |A|^2$ ،  $|A^3| = |A^2A| = |A^2||A| = |A|^2|A| = |A|^3$  و لذا به کمک استقرا به سادگی به دست می‌آید  $|A^n| = |A|^n$ . ■

### دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های $3 \times 3$

در زیر روشی را جهت محاسبه دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  که منسوب به ساروس است ارائه

می‌کنیم. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  را در نظر می‌گیریم. این ماتریس را ۲ بار کنار هم



به خطوط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و درآیه‌های روی آنها توجه کنید. درآیه‌های روی خط ۱ را در هم ضرب می‌کنیم. این کار را برای درآیه‌های روی خط ۲ و خط ۳ نیز انجام می‌دهیم و سپس سه عدد به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. گیریم حاصلجمع این سه عدد  $p$  باشد. اکنون همین عمل را برای خطوط ۴، ۵، ۶ تکرار می‌کنیم. اگر  $q$  عددی باشد که در این مرحله به وجود می‌آید، آنگاه به راحتی دیده می‌شود که  $p - q$  با ۶ عدد مساوی معرفی شده در قضیه ۱ برابر است و لذا  $|A| = p - q$ . این روش محاسبه دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  به روش ساروس معروف است. آنچه در بالا گفتیم را در فرمول زیر خلاصه می‌کنیم:

$$|A| = \underbrace{(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})}_p - \underbrace{(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})}_q.$$

حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۱	حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۲	حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۳	حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۴	حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۵	حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۶
----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

**مثال ۶.** ماتریس معرفی شده در مثال ۳ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم به روش ساروس مقدار دترمینان آن را محاسبه کنیم:

$$|A| = (24 - 15 + 16) - (-4 + 18 + 11) = 25 - 94 = -69.$$

### ویژگی‌های دترمینان ماتریس‌های $3 \times 3$

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  را بیان خواهیم کرد. کلیه این ویژگی‌ها را در مورد سطرها مطرح و سپس ثابت می‌کنیم. این ویژگی‌ها در مورد ستون‌ها نیز برقرار است و اثبات در حالت ستونی مشابه اثبات در حالت سطری است.

**ویژگی ۱ دترمینان.** اگر کلیه درآیه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی  $3 \times 3$  مانند

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

را در عدد حقیقی  $\lambda$  ضرب کنیم و یک ماتریس جدید به دست آوریم،

آنگاه دترمینان ماتریس جدید،  $\lambda$  برابر دترمینان ماتریس  $A$  است.

برای بررسی درستی ویژگی ۱، گیریم  $B$  ماتریس  $3 \times 3$  جدید به دست آمده از ضرب یک سطر ماتریس  $A$  (مثلاً سطر  $i$ ام آن) در عدد ثابت  $\lambda$  باشد. با بسط دترمینان  $B$  نسبت به سطر  $i$ ام به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |B| &= \lambda a_{i1} B_{i1} + \lambda a_{i2} B_{i2} + \lambda a_{i3} B_{i3} \\ &= \lambda (a_{i1} B_{i1} + a_{i2} B_{i2} + a_{i3} B_{i3}). \end{aligned}$$

اما چون سطرهای  $A$  و  $B$ ، بجز احتمالاً سطر  $i$ ام، یکسان هستند، لذا به وضوح  $A_{i1} = B_{i1}$ ،  $A_{i2} = B_{i2}$  و  $A_{i3} = B_{i3}$  در نتیجه

$$\begin{aligned} |B| &= \lambda (a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3}) \\ &= \lambda |A|, \end{aligned}$$

که درستی این ویژگی را نتیجه می‌دهد.

**مثال ۷.** بنابر ویژگی ۱ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

**نتیجه.** برای ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  و عدد ثابت  $\lambda$ ،

$$|\lambda A| = \lambda^3 |A|.$$

**اشارات.** کافی است سه بار از ویژگی ۱ استفاده کنیم:

$$|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 |A|. \quad \blacksquare$$

**ویژگی ۲ دترمینان.** اگر کلیه درآیه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی  $3 \times 3$  مانند

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ برابر صفر باشند، آنگاه } |A| = 0.$$

برای بررسی درستی ویژگی ۲، گیریم کلیه درآیه‌های یک سطر ماتریس  $A$  (مثلاً سطر  $i$ ام آن) برابر صفر باشد. با بسط دترمینان  $A$  نسبت به سطر  $i$ ام به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \\ &= 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + 0 \cdot A_{i3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{مثال ۸.} \quad \text{بنابر ویژگی ۲ می‌توانیم بنویسیم} \quad \begin{vmatrix} 88 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

**ویژگی ۳ دترمینان.** اگر در ماتریسی  $3 \times 3$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  جای دو

سطر (دو ستون) را عوض کنیم تا ماتریس جدیدی به دست آوریم، آنگاه دترمینان ماتریس جدید، قرینه دترمینان ماتریس  $A$  است.

برای بررسی درستی ویژگی ۳، ابتدا فرض می‌کنیم جای دو سطر متوالی مثلاً سطر اول و دوم را عوض کرده‌ایم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$



حال دترمینان A را با بسط نسبت به سطر اول و دترمینان B را با بسط نسبت به سطر دوم پیدا می‌کنیم

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

$$|B| = a_{11}B_{11} + a_{12}B_{12} + a_{13}B_{13}.$$

ولی برای  $j=1, 2, 3$  داریم  $A_{1j} = (-1)^{1+j}|M_{1j}|$  که در آن  $M_{1j}$  ماتریس حاصل از حذف

سطر اول و ستون  $j$ ام ماتریس A است و  $B_{1j} = (-1)^{2+j}|\overline{M}_{1j}|$  که در آن  $\overline{M}_{1j}$  ماتریس حاصل از

حذف سطر دوم و ستون  $j$ ام ماتریس B است. اما توجه می‌کنیم که  $\overline{M}_{1j} = M_{1j}$  و لذا

$$B_{1j} = (-1)^{2+j}|\overline{M}_{1j}| = -(-1)^{1+j}|M_{1j}| = -A_{1j}.$$

پس

$$|B| = a_{11}(-A_{11}) + a_{12}(-A_{12}) + a_{13}(-A_{13})$$

$$= -(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13})$$

$$= -|A|.$$

تعویض سطر دوم و سوم نیز وضعیتی مشابه دارد. ولی اگر بخواهیم سطر اول و سوم را جابه‌جا

کنیم ابتدا سطر اول و دوم را جابه‌جا کرده، سپس سطر دوم و سوم و بالاخره سطر اول و دوم را

جابه‌جا می‌کنیم که مجدداً مقدار دترمینان در  $-1 = (-1)(-1)(-1)$  ضرب می‌شود و لذا در هر حال

دترمینان ماتریس جدید، قرینه دترمینان ماتریس A است.

$$\text{مثال ۹. بنابر ویژگی ۳ داریم} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

**ویژگی ۴ دترمینان.** اگر ماتریسی  $3 \times 3$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  دارای دو سطر

(دو ستون) یکسان باشد، آنگاه  $|A| = 0$ .

برای بررسی درستی ویژگی ۴، گیریم سطر  $i_1$ ام و  $i_2$ ام ماتریس A یکسان باشند. اگر جای سطر

$i_1$ ام و سطر  $i_2$ ام را با هم تعویض کنیم، آنگاه به خاطر یکسان بودن این دو سطر ماتریس حاصل همان

A است. پس بنابر ویژگی ۳،  $|A| = -|A|$ ،  $2|A| = 0$ ، یا  $|A| = 0$ .

$$\text{مثال } 10. \text{ بنابر ویژگی } 4 \text{ داریم } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ اگر در ماتریسی } 3 \times 3 \text{ مانند}$$

یک سطر (ستون) مضربی از یک سطر (ستون) دیگر باشد، آنگاه  $|A| = 0$ .

برای بررسی درستی ویژگی 5، گیریم سطر  $i_1$  ام ماتریس  $A$ ،  $\lambda$  برابر سطر  $i_2$  ام آن باشد. بنابر ویژگی 1 می‌توانیم بنویسیم  $|A| = \lambda|B|$  که در آن  $B$  ماتریسی است که سطر  $i_1$  ام و سطر  $i_2$  ام آن یکسان است. اما ویژگی 4 نتیجه می‌دهد که  $|B| = 0$  و لذا  $|A| = \lambda \times 0 = 0$ .

$$\text{مثال } 11. \text{ بنابر ویژگی } 5 \text{ داریم } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 14 & 1 \\ 7 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**ویژگی 6 دترمینان.** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  بوده که سطر  $i$  ام آن به صورت

$$b_{i1} + c_{i1} \quad b_{i2} + c_{i2} \quad b_{i3} + c_{i3}$$

باشد. اگر  $B$  و  $C$  را ماتریس‌های  $3 \times 3$  بگیریم که سطرهای آن، بجز احتمالاً سطر  $i$  ام، با سطرهای  $A$  یکی است و سطر  $i$  ام  $B$

$$b_{i1} \quad b_{i2} \quad b_{i3}$$

و سطر  $i$  ام  $C$

$$c_{i1} \quad c_{i2} \quad c_{i3}$$

است، آنگاه

$$|A| = |B| + |C|.$$

برای بررسی درستی ویژگی ۶،  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به سطر  $i$ ام محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = (b_{i1} + c_{i1})A_{i1} + (b_{i2} + c_{i2})A_{i2} + (b_{i3} + c_{i3})A_{i3}$$

$$= (b_{i1}A_{i1} + b_{i2}A_{i2} + b_{i3}A_{i3}) + (c_{i1}A_{i1} + c_{i2}A_{i2} + c_{i3}A_{i3}).$$

اما چون سطرهای  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، بجز احتمالاً سطر  $i$ ام، همگی یکسان هستند، لذا به وضوح

$$A_{i1} = B_{i1} = C_{i1}, \quad A_{i2} = B_{i2} = C_{i2}, \quad \text{و} \quad A_{i3} = B_{i3} = C_{i3} \quad \text{در نتیجه}$$

$$|A| = (b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + b_{i3}B_{i3}) + (c_{i1}C_{i1} + c_{i2}C_{i2} + c_{i3}C_{i3})$$

$$= |B| + |C|.$$

تذکر. مشابه ویژگی ۶ برای ستون‌ها نیز برقرار است.

مثال ۱۲. بنابر ویژگی ۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 4+1 & 1+2 & 2+1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

همچنین

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5+1 \\ 5 & 3 & 1+2 \\ 4 & 2 & 4+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

**ویژگی ۷ دترمینان.** اگر در ماتریسی  $3 \times 3$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  حاصلضرب

در آیه‌های یک سطر (ستون) در یک عدد ثابت را به سطر (ستون) دیگر بیافزاییم تا ماتریس جدید حاصل شود، آنگاه دترمینان ماتریس جدید برابر است با دترمینان ماتریس  $A$ .

برای بررسی درستی ویژگی ۷، گیریم سطر  $i$ ام ماتریس  $A$

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3}$$

و سطر  $i_2$  ام آن

$$a_{i_2,1} \quad a_{i_2,2} \quad a_{i_2,3}$$

باشد. ماتریس  $B$  یک ماتریس  $3 \times 3$  است که تمام سطرهایش، بجز احتمالاً سطر  $i_2$  ام آن، با سطرهای  $A$  یکسان است و سطر  $i_2$  ام آن به صورت زیر است:

$$a_{i_2,1} + \lambda a_{i_1,1} \quad a_{i_2,2} + \lambda a_{i_1,2} \quad a_{i_2,3} + \lambda a_{i_1,3}$$

اگر ثابت کنیم  $|B| = |A|$ ، در واقع ویژگی  $\gamma$  را ثابت کرده ایم.

اکنون  $C$  و  $D$  را ماتریس‌هایی  $3 \times 3$  می‌گیریم که تمام سطرهایشان، بجز احتمالاً سطر  $i_2$  ام،

با سطرهای  $B$  و در نتیجه با سطرهای  $A$  یکسان است. سطر  $i_2$  ام  $C$  را

$$a_{i_2,1} \quad a_{i_2,2} \quad a_{i_2,3}$$

می‌گیریم و سطر  $i_2$  ام  $D$  را

$$\lambda a_{i_1,1} \quad \lambda a_{i_1,2} \quad \lambda a_{i_1,3}$$

فرض می‌کنیم. بنابر ویژگی  $\epsilon$  می‌توانیم بنویسیم  $|B| = |C| + |D|$ .

اما دقت می‌کنیم که تمام سطرهای  $C$  با  $A$  یکی است، حتی سطر  $i_2$  ام آن. لذا  $C$  همان  $A$

است، پس  $|C| = |A|$ . از طرفی سطر  $i_2$  ام  $D$ ،  $\lambda$  برابر سطر  $i_1$  ام آن است. پس بنابر ویژگی  $\delta$ ،

$$|D| = 0 \quad \text{و} \quad |B| = |A| + 0 = |A|$$

مثال ۱۳. بنابر ویژگی  $\gamma$  داریم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+6 & 2+8 & 5+12 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+2 & 5 \\ 3 & 4+6 & 6 \\ 1 & 1+2 & 0 \end{vmatrix}$$

مثال ۱۴. در مثال‌های ۳ و ۶ به دو روش دترمینان  $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$  را محاسبه کردیم: روش

بسط دادن و روش ساروس. اکنون می‌خواهیم به کمک ویژگی  $\gamma$  مقدار این دترمینان را محاسبه کنیم.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 - \frac{4}{3}(3) & 2 - \frac{4}{3}(5) & 3 - \frac{4}{3}(2) \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 + \frac{1}{3}(3) & 2 + \frac{1}{3}(5) & 4 + \frac{1}{3}(2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 - \frac{11}{14}(2) & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} - \frac{11}{14}\left(\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} - \frac{11}{14}\left(\frac{14}{3}\right) & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & \frac{48}{14} & 2 \\ 0 & \frac{-207}{42} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$$

$$= 3 \left( \frac{-207}{42} \right) \left( \frac{14}{3} \right) = -69.$$

ویژگی ۸ دترمینان. برای هر ماتریس  $3 \times 3$  مانند

$$\cdot |A^t| = |A|, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

برای بررسی درستی ویژگی ۸ توجه می‌کنیم که اگر  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ، آنگاه

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ و لذا از بسط دترمینان } A^t \text{ نسبت به سطر اول به دست می‌آوریم}$$

$$\begin{aligned} |A^t| &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= |A|. \end{aligned}$$

مثال ۱۵. بنابر ویژگی ۸ داریم

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$



تمرین

۱. فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ . مقدار  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به هر یک از سطرها

و ستون‌ها پیدا کنید. همچنین  $|A|$  را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

۲. به کمک بسط دادن یا روش ساروس مقدار دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \text{ (الف)}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ (ج)}$$

۳. قضیه ۲ را ثابت کنید.

۴. بدون بسط دادن و روش ساروس و تنها به کمک ویژگی‌های دترمینان، مقدار هریک از

دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \text{ (د)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \text{ (ج)}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \text{ (و)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \text{ (ه)}$$

۵. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y) \text{ (الف)}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z \text{ (ب)}$$

$$ج) \begin{vmatrix} 1 & 2x & yz \\ 1 & y & 2xz \\ 1 & z & 2xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$د) \begin{vmatrix} 1 & 1+x & x^2(y+z) \\ 1 & 1+y & y^2(x+z) \\ 1 & 1+z & z^2(x+y) \end{vmatrix} = 0$$

$$ه) \begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$$

$$و) \begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & 2x+y+z & y \\ z & x & x+2y+z \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

۶. با در نظر گرفتن  $A = \begin{bmatrix} y & z & 0 \\ x & 0 & z \\ 0 & x & y \end{bmatrix}$  و محاسبه  $AA^t$ ، مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

۷. فرض کنید بتوان یک ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  را به صورت حاصلضرب یک ماتریس

$3 \times 2$  در یک ماتریس  $2 \times 3$  نوشت. ثابت کنید  $|A| = 0$ .

۸. فرض کنید  $\lambda$  و  $\mu$  دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها، مقدار دترمینان

ماتریس  $A = [\lambda i + \mu j]_{3 \times 3}$  را محاسبه کنید.

۹. فرض کنید  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ،  $b = (b_1, b_2, b_3)$  و  $c = (c_1, c_2, c_3)$  بردارهایی از  $\mathbb{R}^3$



باشند. ثابت کنید  $a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$  و به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها نتیجه بگیرید که

$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$ . با توجه به این تمرین چه ارتباطی بین هندسه، هندسه تحلیلی و جبر خطی در جلد کتاب مشاهده می‌کنید.

۱۰. اگر  $A = (a_1, a_2)$ ،  $B = (b_1, b_2)$  و  $C = (c_1, c_2)$  رؤوس یک مثلث از صفحه  $\mathbb{R}^2$  باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدرمطلق مقدار زیر

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

۱۱. نشان دهید  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$  معادله خطی است که از نقاط  $(a, b)$  و  $(c, d)$  در  $\mathbb{R}^2$

می‌گذرد.

۱۲. فرض کنید A و B دو ماتریس  $3 \times 3$  باشند که A متقارن است. ثابت کنید

$$|A + B| = |A + B^t|$$

۱۳. فرض کنید A یک ماتریس پاد متقارن  $3 \times 3$  باشد. ثابت کنید  $|A| = 0$ .

۱۴. مربع واحد، مربعی است با رؤوس به مختصات  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . شکل هندسی F

را مربع واحد در نظر می‌گیریم. اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  که دترمینانی مخالف صفر دارد، روی F اثر کند چه شکلی در صفحه پدید می‌آورد؟ مساحت شکل جدید را محاسبه کنید.