فصل ۹

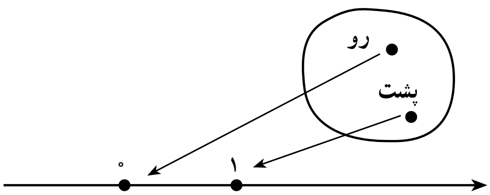
توزیع های گسسته‌ی احتمال

۹ــ۱ــ متغیر تصادفی گسسته

به‌طوری که قبلاً گفتیم در هر آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای را مشخص می‌کنیم و به رخداد هر پیشامد آن عددی بین ۰ و ۱ به عنوان احتمال نسبت می‌دهیم. حال می‌خواهیم مجموعه‌ی دیگری را به‌جای فضای نمونه‌ای قرار دهیم. ابتدا به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱: وقتی سکه‌ای را می‌اندازیم، S دارای دو برآمد رو و پشت است. تابع X را بدین صورت تعریف می‌کنیم که حوزه‌ی تعریف (دامنه) آن مجموعه‌ی S با دو عضو رو و پشت و حوزه‌ی مقادیر (برد) آن دو عدد ۰ و ۱ از محور اعداد حقیقی باشد. به عبارت دیگر

$$\begin{cases} X(\text{رو}) = 0 \\ X(\text{پشت}) = 1 \end{cases}$$



شکل ۱

چنین تابع X را متغیر تصادفی می‌گوییم که دو مقدار ۰ و ۱را اختیار می‌کند. چون احتمال رخداد برآمد رو $\frac{1}{2}$ است پس $X=0$ که نمایش ساده‌ی $X(\text{رو}) = 0$ است و در واقع نمادی برای رخداد برآمد رو است، دارای همان احتمال $\frac{1}{2}$ و همین‌طور احتمال $X=1$ برابر $\frac{1}{2}$ است. در واقع به‌جای جدول

برآمد	رو	پشت
احتمال	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

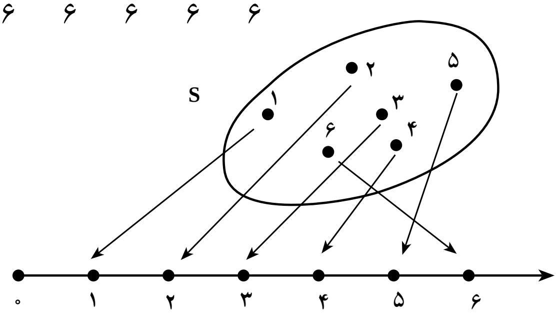
جدول

x_i	۰	۱
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

را قرار می‌دهیم. x_i ها مقادیر X و p_i ها احتمال‌های متناظر با آن‌ها هستند. توجه کردید که فضای نمونه‌ای، $S=\{$ پشت، رو $\}$ ، جای خود را به مجموعه‌ی $\{0,1\}$ داده است. Δ

مثال ۲: در انداختن یک تاس همگن مجموعه‌ی S دارای ۶ برآمد است. به هر برآمد S ، احتمال $\frac{1}{6}$ را نسبت می‌دهیم. اگر X تابعی باشد که بر هر برآمد S عددی صحیح از ۱ تا ۶ را که همان اعداد حک شده بر وجوه تاس‌اند نسبت دهد، یعنی بر هر برآمد S نقطه‌ای از محور اعداد حقیقی را نسبت دهیم، متغیر تصادفی X با مقادیر صحیح ۱ تا ۶ به‌وجود می‌آید که احتمال هر مقدار آن، همان احتمال برآمد S متناظر با آن است (شکل ۲). پس جدول زیر برای ریزش تاس نتیجه می‌شود.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



شکل ۲

Δ

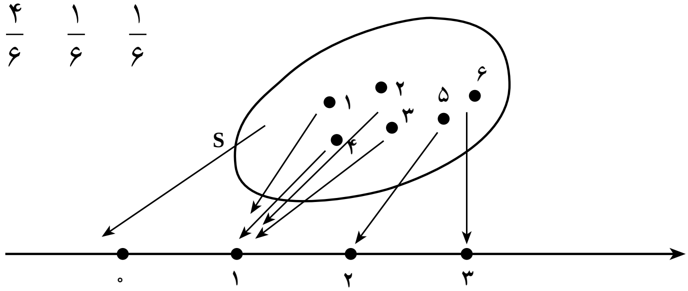
مثال ۳: بر فضای نمونه‌ای S، در مثال قبل، می‌توان متغیر تصادفی دیگری را تعریف کرد. تابع X را تابعی بگیرید که شماره‌های ۱،۲،۳ و ۴ را با نقطه‌ی به طول ۱ و شماره‌ی ۵ را با نقطه‌ی به طول ۲، و شماره‌ی ۶ را با نقطه‌ی به طول ۳ از محور اعداد حقیقی متناظر کند (مطابق شکل ۳)

در این صورت

$$\begin{cases} X(\text{شماره‌ی ۱}) = X(\text{شماره‌ی ۲}) = X(\text{شماره‌ی ۳}) = X(\text{شماره‌ی ۴}) = ۱ \\ X(\text{شماره‌ی ۵}) = ۲ \\ X(\text{شماره‌ی ۶}) = ۳ \end{cases}$$

بنابراین جدول احتمال زیر به‌دست می‌آید.

x_i	۱	۲	۳
p_i	$\frac{۴}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$



شکل ۳

توجه کنید که رخداد $(X = ۱)$ یعنی رخداد پیشامد {شماره‌ی ۴, شماره‌ی۳, شماره‌ی۲, شماره‌ی۱}،و می‌دانیم این پیشامد دارای احتمال $\frac{۴}{۶}$ است. Δ

در متغیرهای تصادفی این سه مثال، تعداد مقادیری که هر متغیر اختیار می‌کرد متناهی بود. متغیر تصادفی را در احتمال مقدماتی به صورت زیر تعریف می‌کنند :

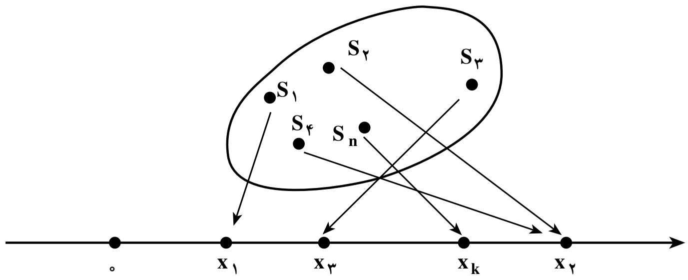
تعریف متغیر تصادفی[1] تابعی از فضای نمونه‌ای S بر اعداد حقیقی است. این تابع را با X نشان می‌دهیم.

همان‌طور که در مثال‌های قبل دیدیم مجموعه‌ی اعداد حقیقی یک فضای نمونه‌ای جدید است. اگر حوزه‌ی مقادیر X متناهی یا شمارا نامتناهی باشد متغیر تصادفی X را **گسسته** می‌گوییم. برای درک مطلب فرض کنید فضای نمونه‌ای $S = \{s_۱, \cdots, s_n\}$ را داریم و احتمال‌هایی که به ترتیب به برآمدهای S تخصیص داده‌ایم $p_۱, p_۲, \cdots, p_n$ باشند. تابعی مانند X را درنظر می‌گیریم که حوزه‌ی تعریف آن S و حوزه‌ی مقادیر آن نقاطی از محور اعداد حقیقی است، به قسمی که هر برآمد یا هر پیشامد S ، با نقطه‌ای از محور مزبور متناظر باشد. در این صورت مطابق شکل ۴،

۱ــ در واقع متغیر تصادفی، نه متغیر است و نه تصادفی است، بلکه یک تابع روی مدل احتمال است.

$$X(s_1)=x_1, X(s_2)=x_2, X(s_3)=x_3, X(s_4)=x_2, \cdots, X(s_n)=x_k$$

تابع X ، متغیر تصادفی است و x_1 ، x_2 ، ... و x_k مقادیر آن هستند.



شکل ۴

۹ــ۲ــ تابع جرم احتمال

تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی گسسته X ، تابعی است که به هریک از مقادیر X ، یعنی به هر یک از x_i ها $i=1,2,\cdots,k$ احتمال $P(X=x_i)=p_i$ را نسبت می‌دهد. به صورت جدول، داریم :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

بدیهی است که $p_1+p_2+\cdots+p_k=1$. اگر نقاط به طول x_1 ، x_2 ، ... و x_k را نقاطی مادّی تلقی کنیم می‌توانیم p_1 ، p_2 ، ... و p_k را بــه ترتیب جرم این نقاط بگیریم. بــه همین دلیل رابطـه‌ی

$$P(X=x_i)=p_i \quad \text{و} \quad i=1,2,\cdots,n$$

را **تابع جرم احتمال** یا صرفاً **تابع احتمال** متغیر تصادفی X می‌نامند. جدول بالا نشان می‌دهد که مقدار کل احتمال ۱ به چه ترتیب بین مقادیر متغیر X **توزیع** شده است و آن را جدول توزیع احتمال می‌گویند. تعداد مقادیری که X پذیرفته است متناهی هست. گاهی تعداد مقادیری که X اختیار می‌کند نامتناهی ولی شماراست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴ : جامعه‌ی کودکان زیر ده سال را درنظر بگیرید. هر کودک را برای این‌که ببینید به بیماری هموفیلی مبتلاست یا نه آزمایش می‌کنند. فرض کنید متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف کنیم :

تعداد کودکانی که باید آزمایش شوند تا اولین مورد هموفیلی ظاهر شود = X

ببینیم که X چه مقادیری را انتخاب می‌کند. ممکن است اولین نفری که در جامعه‌ی مزبور آزمایش می‌شود به هموفیلی مبتلا باشد پس در این صورت $X=۱$. ممکن است اولین نفر مبتلا نبوده، دومین نفر مبتلا باشد پس $X=۲$ و نظایر آن. می‌توانید مجسم کنید که ممکن است یک میلیون کودک آزمایش شوند و کودکی مبتلا پیدا نشود یعنی X می‌تواند بیش از یک میلیون هم باشد. به همین ترتیب مقادیری که X می‌تواند اختیار کند شمارا بوده ولی نامتناهی است. در این حالت داریم

$$P(X=x_i)=p_i \ ، \ i=۱,۲,\cdots$$

بدیهی است، $\sum_{i=۱}^{\infty} p_i = ۱$. یعنی باید احتمال ۱ را بین بی‌نهایت مقدار x_i توزیع کرد. Δ

تذکر: هر تابع احتمال مربوط به متغیر تصادفی گسسته X دارای ویژگی‌های زیر است :

۱ـ $i=۱,۲,\cdots \quad ، \quad ۰ \le P(X=x_i) \le ۱$

۲ـ $\sum_i P(X=x_i)=۱$

برعکس اگر تابعی به صورت $i=۱,۲,\cdots, P(X=x_i)=p_i$ دارای دو ویژگی بالا باشد یک تابع احتمال است.

مثال ۵: سکه‌ای را متوالیاً می‌اندازیم. سکه منصف نیست. تعداد دفعاتی که سکه را می‌اندازیم تا برای اولین بار رو ظاهر شود متغیر تصادفی X می‌نامیم.

الف) X چه مقادیری اختیار می‌کند؟ ب) احتمال رخداد هر مقدار X چیست؟

الف) ممکن است در بار اول رو ظاهر شود پس $X=۱$. اگر بار اول رو ظاهر نشود ولی بار دوم رو بیاید $X=۲$. به همین ترتیب ممکن است تا پرتاب شماره‌ی ۳، ۴، ۵،...، ۱۰۰۰،... برای بار اول رو ظاهر نشود، پس X همه‌ی مقادیر صحیح طبیعی را اختیار می‌کند.

ب) فرض می‌کنیم در پرتاب i ام برای اولین بار رو بیاید می‌خواهیم احتمال این پیشامد یعنی $P(X=i)$ را به‌دست آوریم. اگر در یک بار انداختن سکه، H معرف برآمد رو و T معرف برآمد پشت باشد، پیشامد

$$\underbrace{TT\cdots T}_{\text{بار } (i-۱)}H$$

بدین معناست که $i-۱$ بار متوالیاً پشت بیاید و در i امین بار رو ظاهر شود. باید احتمال این پیشامد را که مستلزم رخداد i برآمد است به‌دست آوریم. سکه منصف نیست یعنی احتمال رو آمدن و احتمال پشت آمدن $\frac{۱}{۲}$ نیست. فرض می‌کنیم احتمال ظاهر شدن رو p و احتمال ظاهر شدن پشت q

باشد. واضح است که $p+q=1$. هر انداختن سکه از انداختن‌های دیگر مستقل است. حال قبل از محاسبه‌ی احتمال موردنظر متذکر می‌شویم که اگر برای چند آزمایش تصادفی جدا از هم فضاهای نمونه‌ای و مدل‌های احتمال را بسازیم و اگر A_1 پیشامدی از فضای اول، A_2 پیشامدی از فضای دوم، ... باشد آن‌گاه شرط استقلال A_1 ، A_2 ، ... از هم را به‌صورت زیر بیان می‌کنند.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots) = P(A_1).P(A_2)\cdots$$

پس، اگر برای هر انداختن سکه یک فضای نمونه‌ای درنظر بگیریم، آن‌گاه مثلاً

$$P(TT) = q.q = q^2$$

به همین ترتیب :

$$P(\underbrace{TT\cdots T}_{\text{بار } (i-1)}) = \underbrace{q.q\cdots q}_{\text{بار } (i-1)} = q^{i-1}$$

و بالاخره :

$$P(\underbrace{TT\cdots T}_{\text{بار } (i-1)}H) = q^{i-1}.p$$

پس :

$$P(X=i) = q^{i-1}.p$$

اگر i را برابر ۱، ۲، ... بگیریم احتمال‌های متناظر با مقادیر X به‌دست می‌آیند. جدول زیر را می‌توانیم بنویسیم

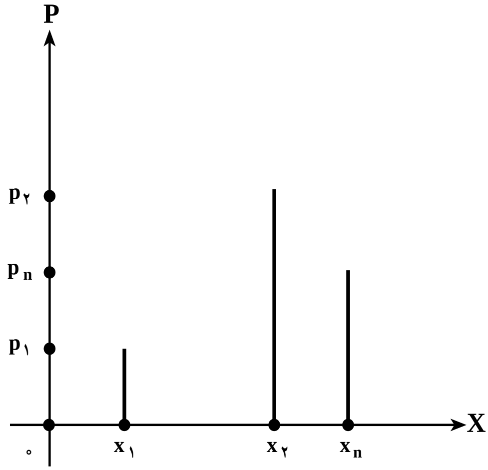
x_i	۱	۲	۳	$\cdots$	i	$\cdots$
p_i	p	qp	q^2p	$\cdots$	$q^{i-1}p$	$\cdots$

رابطه‌ی $P(X=i)=q^{i-1}p$ ، $i=1,2,\ldots$ تابع احتمال متغیر تصادفی X است. Δ

شما می‌توانید به میل خود جدولی تشکیل دهید که سطر اول مقادیر متغیر تصادفی X باشد (هر مقداری که مایل هستید به آن نسبت دهید) و سطر دوم آن احتمال‌هایی دلخواه باشند، فقط لازم است که مجموع احتمال‌ها ۱ باشد. اگر هر مقداری را که متغیر تصادفی X اختیار می‌کند طول یک نقطه، و احتمال متناظر با آن را عرض آن نقطه نسبت به دو محور متعامد بگیریم نموداری برای احتمال X به‌دست می‌آوریم.

لازم نیست که واحد طول را روی دو محور یکی بگیریم. عرض‌های نقاط، مقادیر p_1 ،

p_2 ، ... و p_n هستند که همه بین صفر و یک‌اند. طول‌های نقاط، مقادیر x_1 ، x_2 ، ...، x_n هستند (مطابق شکل ۵).



شکل ۵ ــ نمودار میله‌ای

در واقع می‌توان طول میله‌های بالای x_1 ، x_2 ، ...، x_n را احتمال‌های متناظر با آن‌ها گرفت. این نمودار را نمودار میله‌ای می‌نامند. برای هر تابع احتمال گسسته می‌توانید چنین نموداری رسم کنید.

همان‌طور که گفتیم می‌توانیم جدول‌های توزیع احتمال دلخواه فراوانی بنویسیم اما آن جدول‌ها و مدل‌هایی مورد توجه‌اند که ارزش کاربردی داشته باشند. ذیلاً چند توزیع احتمال مهم را ذکر می‌کنیم.

۹ــ۳ــ توزیع برنولی

وقتی لامپی را امتحان می‌کنیم ممکن است سالم باشد یا معیوب. به‌طور کلی وقتی کالایی را در موقع خرید امتحان می‌کنیم یا سالم است و یا ناقص. وقتی از فردی در مورد اعتیادش به سیگار سؤال می‌کنیم یا سیگاری است یا نیست. از این پدیده‌های دو حالتی زیادند. اگر سالم بودن کالا یا سیگاری بودن فرد را با $X=1$ و ناقص بودن کالا و سیگاری نبودن فرد را با $X=0$ نشان دهیم متغیری تصادفی داریم که دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می‌کند. این آزمایش‌های دو حالته را امتحان می‌نامیم و فضای نمونه‌ای هر امتحان دو برآمد دارد. ریختن سکه هم یک امتحان است.

اگر احتمال سالم بودن کالا یا سیگاری بودن فرد را p بگیریم احتمال ناقص بودن کالا و یا سیگاری نبودن فرد برابر q است. پس جدول توزیع احتمال زیر را برای هر امتحان داریم

x_i	۰	۱
p_i	q	p

$$p+q=1$$

مرسوم است که دوبرآمد امتحان را پیروزی و شکست می‌نامند. برآمدی که مورد توجه است پیروزی نامیده می‌شود. مثلاً ممکن است لامپ‌ها را یک به یک برای یافتن لامپی معیوب امتحان کنیم، در این صورت یافتن لامپ معیوب یک پیروزی است. این جدول را می‌توان به صورت رابطه‌ی زیر هم خلاصه کرد.

$$P(X=i)=\begin{cases} p^i q^{1-i} & i=0,1 \\ 0 & \text{به ازای سایر مقادیر } i \end{cases}$$

به‌طورکلی اگر پیشامد A از یک فضای نمونه‌ای را درنظر بگیریم و رخداد A را پیروزی گرفته، احتمال پیروزی را p فرض کنیم، آن‌گاه متغیر تصادفی X که به صورت

$$\begin{cases} X=1 & \text{اگر A رخ دهد} \\ X=0 & \text{اگر A رخ ندهد} \end{cases}$$

تعریف می‌شود دارای تابع احتمال بالاست.

متغیر تصادفی X را که تنها دو مقدار ۰ و یک را می‌پذیرد متغیر برنولی و توزیع احتمال آن را **توزیع برنولی** می‌گویند.

۹ــ۴ــ تمرین‌ها

۱ــ پنج سکه‌ی منصف را باهم پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که تعداد «شیرها» را نشان دهد.

پ) تابع احتمال متغیر تصادفی بند ب را بنویسید.

۲ــ دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را مجموع دو عدد ظاهر شده در روی دو تاس تعریف می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) تابع احتمال X را به‌دست آورید.

پ) احتمال این که $X \leq ۷$ باشد چه‌قدر است؟

۳ــ یک تاس پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X = \begin{cases} ۱ & \text{اگر عدد فرد بیاید،} \\ ۲ & \text{اگر عدد زوج بیاید،} \end{cases}$$

الف) تابع احتمال X را بیابید.

ب) آیا X یک متغیر تصادفی برنولی است؟

۴ــ سکه‌ای منصف را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا «شیر» بیاید.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که براساس آن بتوان احتمال شیر آمدن را محاسبه کرد.

پ) احتمال این که اولین بار در آزمایش صدم شیر ظاهر شود چه‌قدر است؟

۵ــ توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$P(X=i)=\frac{i}{i^{۲}+۳} \qquad i=۱,۲,۳$$

$$P(X=j)=\frac{۱}{۱۴} \qquad j=۴,۵,۶$$

الف) جدول توزیع X را بسازید.

ب) نمودار توزیع را رسم کنید.

پ) مقدار $P(X \geq ۳)$ را حساب کنید.

۶ــ احتمال این که فردی مسن مبتلا به دیابت باشد $\frac{۱}{۸۰}$ است. در روستایی مردان مسن را تحت آزمایش قرار می‌دهند. اگر متغیر تصادفی X را برابر با تعداد افرادی تعریف کنیم که به ترتیب آزمایش می‌شوند تا اولین فرد دیابتی مشخص شود، تابع احتمال متغیر X را به‌دست آورید. احتمال این که دومین نفر دیابتی باشد چه‌قدر است؟

۷ــ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی ۳ برآمد دارد اگر احتمال‌های متناظر با ۳ برآمد به ترتیب $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۶}$ باشد متغیری تصادفی روی این فضا تعریف کنید.

۸ــ نشان دهید که تابع زیر یک تابع احتمال است.

$$P(X=x)=\frac{۱}{n^{۲}}[۲(n-x)+۱]\ ,\ \ x=۱,۲,\ldots,n$$

مراجع

1 - S. Ross, A First Course in Probability, Macmilan 1976.

۲ــ جان فروند و رانلد والپول، آمار ریاضی ترجمه‌ی علی عمیدی و محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ سوم ۱۳۷۳.

۳ــ جواد بهبودیان، آمار و احتمال مقدماتی، انتشارات آستان قدس ۱۳۶۸.

۴ــ علی عمیدی، احتمال و کاربرد آن، انتشارات دانشگاه پیام نور ۱۳۷۴.