قسمت چهارم

احتمال

مقدمه

امروزه همه‌ی سازمان‌های دولتی و خصوصی، در هر رسته‌ای که باشند، اعم از اقتصادی، صنعتی، اجتماعی و غیره برای تعیین سیاست و روند کار آینده‌ی خود ناگزیر به برنامه‌ریزی هستند. تصمیم‌گیری‌ها و آینده‌نگری‌ها علی‌رغم وجود اطلاعاتی از گذشته و داده‌هایی از حال، همواره دستخوش عدم قطعیت‌هایی هستند که نمی‌توان در رویارویی با آن‌ها با یقین کامل برنامه‌ریزی کرد. علم احتمال و بر پایه‌ی آن علم آمار با شاخه‌های متعددش، در مقابل لجام گسیختگی این عدم قطعیت‌ها و یا به اصطلاح عرف در مقابل شانس قد علم کرده‌اند و براساس قوانین محکم ریاضی، اثر شانس را کنترل می‌کنند. استنباط آماری که پایه‌ای برای تصمیم‌گیری است بر قوانین احتمال تکیه کرده است و در حال حاضر کوچک‌ترین گام پژوهشی در هر زمینه، مستلزم استفاده از این نوع استنباط‌هاست. کاربرد احتمال در کارهای نظامی، فیزیک، ارتباطات، نظریه‌ی اطلاعات، علوم فضایی، نظریه‌ی رمزنگاری و امثال آن‌ها به سرعت گسترش یافته است. با این وجود تصور می‌رود هنوز در اوایل راهی هستیم که سه سده‌ی پیش به صورتی مقدماتی آغاز شده است. ما با شما از ابتدای این راه همراه می‌شویم و با هم چند گامی مقدماتی از این راه را طی می‌کنیم و از آن جنبه‌ی احتمال که صورتی گسسته دارد سخن می‌گوییم. شاید که راهنمای شما برای ادامه راه باشد.

فصل ۸

احتمال

۸ـــ۱ـــ یادآوری

خلاصه‌ای از آن‌چه را سال گذشته درباره‌ی احتمال خوانده‌ایم در زیر می‌آوریم :

الف) می‌دانیم که اگر آزمایشی یا پدیده‌ای قبل از رخداد، نتیجه‌اش معلوم نباشد ولی نتیجه‌های ممکن آن مشخص باشند آن را **آزمایش تصادفی** یا **پدیده‌ی تصادفی** می‌نامند. مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن را **فضای نمونه‌ای** آزمایش تصادفی می‌نامیم. فضای نمونه‌ای را با S نشان می‌دهیم. هر نتیجه‌ی ممکن، یعنی هر عضو S را یک **برآمد** می‌گوییم. در هر آزمایش تصادفی تنها یکی از عضوهای این مجموعه رخ خواهد داد.

مثال ۱: قرار است فردا تیم A در مقابل تیم B بازی کند. تیم A چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورد؟

به طور مطمئن نمی‌دانیم. اما نتیجه‌هایی که یکی از آن‌ها رخ می‌دهد عبارت‌اند از :

برابر شدن دو تیم $= c$ باختن تیم $b = A$ بردن تیم $a = A$

پس مجموعه‌ی $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه‌ای است و هر عضو این مجموعه برآمدی است که ممکن است رخ دهد. از سه برآمد تنها یکی رخ می‌دهد. Δ

ب) هر پیشامد، زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. مثلاً $E_1 = \{a, b\}$ یک پیشامد است و به معنای آن است که در بازی فردا «تیم A یا می‌برد و یا می‌بازد». در هر حال وقتی می‌گوییم پیشامد E_1 رخ خواهد داد به معنای آن است که تنها یکی از برآمدهای آن رخ خواهد داد. اگر $E_2 = \{a, c\}$ رخ بدهد بدان معناست که تیم A فردا یا می‌برد و یا برابر می‌کند. دو پیشامد را که

برآمد مشترکی ندارند **ناسازگار** می‌گویند. سال گذشته اعمال روی پیشامدها را که همان اعمال روی مجموعه‌ها هستند دیده‌اید.

تذکر: منظور از «رخداد» یک پیشامد وقوع آن پیشامد، یعنی مشاهده‌ی عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجه‌ی آزمایش است.

پ) اگر فضای نمونه‌ای به جای ۳ برآمد ممکن، n برآمد ممکن داشته باشد تعداد پیشامدها، یعنی تعداد زیر مجموعه‌های آن ۲^n است. در مثالا بالا $۲^۳ = ۸$ پیشامد در فضای نمونه‌ای حاصل می‌شوند که عبارت‌اند از :

$$\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\phi$$

ϕ **پیشامد ناممکن** است. پیشامد $S=\{a,b,c\}$ حتماً رخ می‌دهد زیرا به معنای آن است که یکی از سه برآمد a، b و c رخ می‌دهد و این مسلم است که فردا، در صورت انجام بازی، تیم A یا می‌برد، یا می‌بازد و یا برابر می‌کند. پس S رخ می‌دهد. لذا S را **پیشامد مطمئن** می‌گوییم. تعداد اعضای مجموعه‌ی S، یعنی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است **متناهی** یا **شمارا نامتناهی** یا **ناشمارا نامتناهی** باشد. اگر لامپی را از فرایند تولید لامپ انتخاب کنیم و بخواهیم سالم بودن آن را امتحان کنیم فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی دو برآمد دارد، لذا S مجموعه‌ای متناهی است. اگر هدف این باشد که سکه‌ای را آن‌قدر بیندازیم تا برای اولین بار رو ظاهر شود فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، بی‌نهایت برآمد دارد که می‌توان این برآمدها را با اعداد طبیعی متناظر کرد. وقتی تعداد برآمدهای فضایی نمونه‌ای متناهی یا شمارا نامتناهی باشد آن را **فضای نمونه‌ای گسسته** می‌گوییم. تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است ناشمارا نامتناهی باشد که در این صورت فضای نمونه‌ای گسسته نیست، مثل انتخاب تصادفی نقطه در بازه‌ی $(۰,۱)$.

ت) وقتی فضای نمونه‌ای S را برای آزمایشی تصادفی داریم، احتمال پیشامدهای فضای S را به صورت مقادیر حقیقی یک تابع مجموعه‌ای P تعریف می‌کنیم، که این تابع براساس **۳ اصل موضوع** زیر، اعداد حقیقی را به پیشامدها یعنی به زیر مجموعه‌های S نسبت می‌دهد،

اصل موضوع ۱: احتمال هر پیشامد، عددی نامنفی است، یعنی برای هر پیشامد A از S،

$$P(A)\geq ۰$$

اصل موضوع ۲:

$$P(S)=۱$$

اصل موضوع ۳ : اگر A_1 ، A_2 ، ... ،A_n دنباله‌ای متناهی[1] از پیشامدهای دو به دو ناسازگار S باشند آن‌گاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$$

این اصول موضوع منسوب به کولموگوروف هستند. هر تابع حقیقی مقدار که در این اصول صادق باشد به تابع احتمال موسوم است. فضای S و تابع P و مجموعه‌ی پیشامدها را مدل احتمال آزمایش تصادفی می‌نامند. تعریف دقیق‌تری از مدل احتمال را در مقاطع بالاتر تحصیلی می‌بینید. دیده‌اید که اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسسته S باشد، $P(A)$ برابر با مجموع احتمال‌های برآمدهایی است که در A هستند. به خصوص اگر S دارای n برآمد باشد و تابع احتمال به هر برآمد عدد $\frac{1}{n}$ را نسبت دهد می‌توانید برقراری ۳ اصل بالا را به سهولت تحقیق کنید. همان‌طور که می‌دانید چنین فضای نمونه‌ای را یکنواخت یا متساوی‌الاحتمال می‌نامند. اگر در این فضا پیشامد A متشکل از m برآمد باشد آن‌گاه $P(A) = \frac{m}{n}$ است که با مفهوم فراوانی نسبی در آمار مطابقت دارد.

وقتی مثلاً پیشامد $A = \{a, b, c\}$ را داریم که a، b و c برآمدها هستند احتمال این پیشامد را چنین می‌نویسیم

$$P(A) = P(\{a, b, c\})$$

در مواردی که پیشامد، تک عضوی مانند $\{a\}$ باشد برای سادگی احتمال آن را به جای $P(\{a\})$ به صورت $P(a)$ می‌نویسیم.

وقتی فضای نمونه‌ای گسسته است در تخصیص اندازه‌ی احتمال، لازم نیست که احتمال هر زیر مجموعه ممکن را مشخص کنیم، و این امتیاز بزرگی است، زیرا مثلاً اگر فضای نمونه‌ای ۲۰ برآمد داشته باشد تعداد پیشامدهای S یعنی تعداد زیر مجموعه‌های آن $2^{20} = 1048576$ است. در این حالت اگر اندازه‌ی احتمال منسوب به رخداد هر برآمد معلوم باشد مدل احتمال مشخص می‌شود.

دیده‌اید که روی یک فضای نمونه‌ای می‌توان تابع‌های P ی مختلف تعریف کرد.

مثال۲: به مثال ۱ رجوع کنید. فرض کنید در گذشته تیم A مثلاً ۲۰ بار با تیم B مسابقه داده است و شرایط زمانی و مکانی و تیمی همه بازی‌ها یکی بوده‌اند، و جمعاً ۱۰ بار تیم A برنده، ۶ بار بازنده شده و ۴ بار برابر کرده باشد. پس $\frac{10}{20}$ بارها برنده، $\frac{6}{20}$ بارها بازنده شده و $\frac{4}{20}$ بارها برابر کرده

[1] ــ در واقع اگر دنباله‌ی پیشامدها نامتناهی نیز باشد، اصل موضوع ۳ استوار است.

است. در این صورت معقول است که بگوییم فردا تیم A با احتمال $\frac{۵}{۱۰}$ برنده، با احتمال $\frac{۳}{۱۰}$ بازنده خواهد شد و با احتمال $\frac{۲}{۱۰}$ برابر خواهد کرد. پس با توجه به فراوانی نتیجه‌های بازی‌های گذشته تابع P را به صورتی تعریف می‌کنیم که به برآمدهای فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c\}$ احتمال‌های زیر را تخصیص دهد

$$P(a)=\frac{۵}{۱۰} \qquad P(b)=\frac{۳}{۱۰} \qquad P(c)=\frac{۲}{۱۰}$$

می‌توانیم از روی اطلاعات دیگر، مثلاً ملاحظه مسابقات تمرین چند روز قبل دو تیم، احتمال‌های دیگری را به برآمدها نسبت دهیم. با معلوم بودن S و P می‌توانیم احتمال هر پیشامد S را مشخص کنیم، مثلاً

$$P(\{a,c\})=P(a)+P(c)=\frac{۷}{۱۰}$$

یعنی احتمال این‌که تیم A برنده شود یا برابر کند $\frac{۷}{۱۰}$ است. Δ

وقتی فضای نمونه‌ای ناشمارا نامتناهی باشد تخصیص احتمال به همه برآمدها عملی نیست. در بیشتر این حالت‌ها احتمالی که به هر یک از برآمدها نسبت می‌دهند باید برابر صفر باشد و تعیین احتمال پیشامدهایی که احتمال آن‌ها صفر نیست از روی برآمدها مشکل خواهد شد. برای ساختن مدل احتمال در این حالت‌ها احتمال‌ها را به پیشامدها نسبت می‌دهیم. همان‌طور که سال قبل دیده‌ایم این فضای نمونه‌ای می‌تواند به صورت مجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثل بازه‌ی $(۰,۱)$ یا تمام خط حقیقی یا مجموعه‌ای از نقاط واقع در فضای سه بعدی مانند نقاط داخل یک مکعب و نظایر این‌ها باشد. در این صورت تابع P، همان‌طور که می‌دانیم، به هر پیشامد که متناظر با مثلاً فاصله‌ای روی خط حقیقی یا ناحیه‌ای روی دایره یا ناحیه‌ای درون مکعب و امثال آن است عددی را به عنوان احتمال نسبت می‌دهد. ما در این کتاب تنها از فضاهای نمونه‌ای گسسته صحبت می‌کنیم.

ث) همان‌طور که در (ب) گفتیم اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند وقتی که برآمدی مشترک نداشته باشند آن‌ها را **ناسازگار** می‌گویند. اگر A و B برآمدهایی مشترک داشته باشند، یعنی $A\cap B$ تهی نباشد آن‌گاه $A\cap B$ که خود زیر مجموعه‌ی S است، یک پیشامد است و وقتی رخ می‌دهد که برآمدی از آن، که ناچار هم عضو A و هم عضو B است، رخ دهد. اگر پیشامد $A\cup B$ را

در نظر بگیریم وقتی این پیشامد رخ می‌دهد که حدّاقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد. واضح است این برآمد که متعلق به A و یا متعلق به B است می‌تواند متعلق به اشتراک A و B هم باشد. در سال قبل دیده‌ایم که

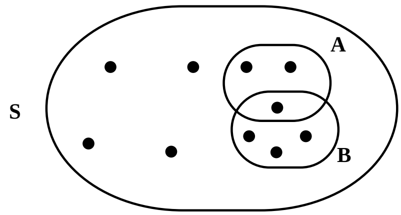
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

S : فضای نمونه‌ای

● : برآمد

A : پیشامد

B : پیشامد



شکل ۱ــ نمایش فضای نمونه‌ای، برآمد و پیشامد

فرمول بالا به شما اجازه می‌دهد که وقتی از روی مدل احتمال، احتمال رخداد پیشامد A، احتمال رخداد پیشامد B و احتمال رخداد پیشامد $A\cap B$ را دارید احتمال رخداد پیشامد $A\cup B$ را به‌دست آورید. برابری‌های زیر را نیز یادآوری می‌کنیم.

اگر پیشامد $\overline{A}$ متمم پیشامد A باشد آن‌گاه

$$P(\overline{A})=۱-P(A)$$

که بی‌درنگ نتیجه می‌شود

$$P(\phi)=۱-P(S)=۰$$

هم‌چنین اگر $A\subseteq B$ ، آن‌گاه

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

و

$$P(A)\leq P(B)$$

اینک پس از این یادآوری‌ها به بیان مطالبی جدید در زمینه‌ی احتمال می‌پردازیم.

۸ــ۲ــ مدل احتمال شرطی

فرض کنید می‌خواهیم آزمایشی تصادفی را انجام دهیم. ابتدا فضای نمونه‌ای را مشخص

می‌کنیم و احتمالی به رخداد هر پیشامد نسبت می‌دهیم و بدین ترتیب مدل احتمال را معین می‌کنیم. این مدل را می‌شناسید. حال اگر اطلاعی اضافی درباره‌ی فضای نمونه‌ای داشته باشیم، مثلاً به دلیلی بدانیم که پیشامد B از این فضای نمونه‌ای رخ داده است آن‌گاه معمولاً مدل احتمال قبلی به هم می‌ریزد و آگاهی از رخداد حتمی پیشامد B در مقدار احتمال سایر پیشامدها اثر می‌گذارد، که در این صورت احتمال‌های پیشامدهای فضای نمونه‌ای با احتمال‌های مدل قبلی تفاوت دارند. اگر بتوانیم تحت این شرط که پیشامد B حتماً رخ می‌دهد احتمال پیشامدهای دیگر فضای نمونه‌ای را مشخص کنیم مدل احتمال جدیدی به‌دست می‌آید که آن را مدل **احتمال شرطی** می‌نامیم. قبل از توضیح بیشتر مثالی می‌زنیم.

مثال ۳: می‌خواهید یک تاس قرمز و یک تاس سفید را با هم بریزید. تاس‌ها همگن‌اند. می‌دانید که فضای نمونه‌ای ۳۶ برآمد دارد :

S = {(۱قرمز و ۱ سفید) , ... ,(۶قرمز,۱سفید) ...,(۱قرمز,۶ سفید) , ... ,(۶قرمز,۶ سفید)}

پس از انجام آزمایش، یکی از این ۳۶ برآمد رخ خواهد داد. احتمال رخداد هر برآمد $\frac{۱}{۳۶}$ است. حال فرض کنید این اطلاع اضافی را داریم که پس از انجام آزمایش مجموع شماره‌های دو تاس حتماً کوچک‌تر از ۷ است. پیشامد «مجموع دو شماره کوچک‌تر از ۷» را B می‌نامیم. پیشامد B از برآمدهای زیر تشکیل می‌شود :

(۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵)

(۲,۱), (۲,۲), (۲,۳), (۲,۴)

(۳,۱), (۳,۲), (۳,۳)

(۴,۱), (۴,۲)

(۵,۱)

یعنی پیشامد B، متشکل از ۱۵ برآمد از ۳۶ برآمد فضای نمونه‌ای است. وقتی شرط می‌کنیم که B حتماً رخ می‌دهد، یعنی یکی از این ۱۵ برآمد نتیجه‌ی ریختن دو تاس است.

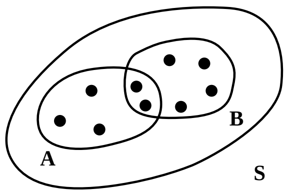
برآمدهایی مثل (۱,۶) یا (۲,۵) یا (۴,۵) و غیره که مجموع دو شماره‌ی آن‌ها ۷ یا بیش از ۷ است رخ نخواهند داد. حال که می‌دانیم پیشامد B به طور مطمئن رخ می‌دهد آن را فضای نمونه‌ای جدید فرض می‌کنیم و بدین ترتیب مدل احتمال جدیدی داریم که آن را مدل احتمال شرطی با شرط

«مجموع دو شماره کوچک‌تر از ۷ است» می‌نامیم. حال اگر بخواهیم به شرط رخداد پیشامد B، احتمال رخداد یک جفت را بدانیم و پیشامد داشتن جفت را با A نشان دهیم در این صورت احتمال پیشامد داشتن جفت به شرط رخداد پیشامد B را با $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم احتمال **پیشامد A** به **شرط رخداد پیشامد B** و یا به صورتی ساده احتمال **پیشامد A به شرط B**. وقتی می‌دانیم B رخ داده، تنها ممکن است یکی از ۱۵ برآمد بالا رخ دهد. بین این برآمدها جفت‌های ممکن $(۱,۱)$ ، $(۲,۲)$ و $(۳,۳)$ هستند. چون احتمال رخداد هر برآمد مساوی $\frac{۱}{۱۵}$ است، لذا

$$P(A|B) = P\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\} = \frac{۳}{۵}$$

Δ

در مثال بالا، احتمال شرطی، یعنی $P(A|B)$ را به سادگی حساب کردیم زیرا فضای نمونه‌ای آزمایش یکنواخت، یا برآمدها متساوی‌الاحتمال یعنی هم‌شانس بودند، ولی اگر احتمال برآمدها یکی نباشند کار کمی مشکل است. قبل از این‌که تعریف کلی احتمال شرطی را مطرح کنیم، به این مطلب به صورتی شهودی می‌اندیشیم. به شکل ۲ توجه کنید.



شکل ۲

S فضای نمونه‌ای آزمایش است. B پیشامدی است که می‌دانیم رخ خواهد داد. A پیشامدی است که می‌خواهیم به شرط آن‌که B رخ دهد، احتمال رخدادش را بیابیم. وقتی B رخ می‌دهد که یکی از برآمدهایش رخ دهد. اگر برآمدی که رخ می‌دهد در $A\cap B$ باشد طبیعتاً A هم رخ می‌دهد. پس هر چه احتمال رخداد پیشامد $A\cap B$ بیشتر باشد احتمال رخداد پیشامد A به شرط B بیشتر است. لذا به طور شهودی $P(A|B)$ باید در رابطه‌ی مستقیم با $P(A\cap B)$ باشد. این رابطه را به صورت،

$$(۱) \quad P(A|B) = KP(A\cap B)$$

فرض می‌کنیم. در این برابری اگر به جای پیشامد A پیشامد B قرار بگیرد نتیجه می‌شود

$$P(B|B) = KP(B\cap B)$$

اما احتمال رخداد پیشامد B به شرط B برابر ۱ است زیرا B حتماً رخ می‌دهد و $B \cap B = B$ ، پس برابری بالا به صورت

$$1 = K.P(B)$$

در می‌آید و داریم $K = \frac{1}{P(B)}$. اگر این مقدار را در (۱) قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

این رابطه را به طور شهودی به‌دست آوردیم. براساس همین رابطه‌ی شهودی تعریف زیر را برای احتمال شرطی ارائه می‌دهیم.

تعریف احتمال شرطی: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند وقتی $P(B) \neq 0$ ، احتمال پیشامد A به شرط این‌که پیشامد B رخ دهد به صورت

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (۲)$$

تعریف می‌شود. وقتی $P(B) = 0$ ، احتمال شرطی قابل تعریف نیست.

در مقاطع بالاتر خواهید دید که احتمال شرطی روی یک فضای نمونه‌ای تابع احتمالی است که در سه اصل موضوع کولموگوروف صدق می‌کند.

مثال ۴: سازنده‌ی قطعات یدکی یک کارخانه از روی تجربه‌های گذشته می‌داند احتمال این‌که سفارشی به موقع برای ارسال آماده شود ۰/۹ است و احتمال این‌که سفارشی به موقع برای ارسال آماده و به موقع تحویل مشتری شود برابر ۰/۸ است. احتمال این‌که سفارشی به موقع تحویل شود به شرط آن‌که به موقع ارسال شده باشد چه‌قدر است؟

ابتدا قرار می‌دهیم :

$A =$ پیشامد آماده بودن به موقع، برای ارسال

$B =$ پیشامد تحویل به موقع سفارش، به مشتری

بنابر داده‌های مسأله، $P(A) = 0/9$ و $P(A \cap B) = 0/8$

زیرا پیشامد $A \cap B$ به معنای این است که سفارش هم به موقع آماده برای ارسال بوده و هم به موقع تحویل مشتری می‌شود. آن‌چه می‌خواهیم، $P(B|A)$ است، یعنی احتمال تحویل به موقع سفارش به مشتری به شرط آن‌که به موقع ارسال شده باشد. بنابر تعریف احتمال شرطی

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۰/۸}{۰/۹} = \frac{۸}{۹}$$

Δ

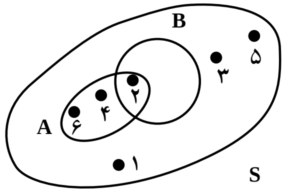
مثال ۵: تاسی همگن را با چشم بسته انداخته‌ایم. برآمد حاصل را نگفته‌اند، ولی اعلام کرده‌اند که برآمد حاصل عددی زوج است. احتمال این‌که شماره‌ی ۲ ظاهر شده باشد چه قدر است؟

قرار می‌دهیم:

$A =$ پیشامد ظاهر شدن شماره‌ی زوج

$B =$ پیشامد ظاهرشدن شماره‌ی ۲

به شکل ۳ توجه کنید.



شکل ۳

لذا
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

زیرا $P(A) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۲}$. به عبارت دیگر می‌توانید تصور کنید که فضای نمونه‌ای $\{۲,۴,۶\}$ است که حتماً رخ داده است و لذا روی این فضا، رخ دادن ۲ دارای یک شانس از ۳ شانس است یعنی احتمال رخداد برآمد ۲ برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

Δ

۸ــ۳ــ قاعده‌ی ضرب احتمال

از تعریف

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq ۰$$

نتیجه می‌شود که
$$P(A \cap B) = P(B).P(A|B), \qquad P(B) \neq ۰$$

این رابطه به **قاعده‌ی ضرب احتمال** موسوم است. به کمک این قاعده می‌توان احتمال رخداد هم‌زمان دو پیشامد را تعیین کرد.

مثال ۶: جعبه‌ای محتوی ۱۲ لامپ است که می‌دانیم ۳ تای آن‌ها معیوب‌اند. از این جعبه به تصادف ۱ لامپ برمی‌داریم. سپس مجدداً بدون جای‌گذاری لامپ اول، لامپ دیگری به تصادف برمی‌داریم. احتمال این‌که هر دو لامپ معیوب باشند چه‌قدر است؟

ابتدا قرار می‌دهیم :

A = پیشامد معیوب بودن لامپ اول

B = پیشامد معیوب بودن لامپ دوم

بنابراین $A \cap B$ پیشامد معیوب بودن هر دو لامپ است. واضح است که :

$$P(A) = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

اگر لامپ اول معیوب باشد، لامپ دوم را از بین ۱۱ لامپ باقی مانده که ۲ تای آن‌ها معیوب است برمی‌داریم پس :

$$P(B|A) = \frac{۲}{۱۱}$$

لذا از قاعده‌ی ضرب احتمال داریم :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{۱}{۴} \cdot \frac{۲}{۱۱} = \frac{۱}{۲۲}$$

Δ

۸ــ۴ــ استقلال دو پیشامد

پیشامدهای A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند که احتمال آن‌ها مثبت است. اگر آگاهی از رخداد پیشامد B در احتمال رخداد پیشامد A مؤثر نباشد A را **مستقل** از B می‌گویند. پس برای مستقل بودن A از B باید

$$P(A|B) = P(A)$$

ولی می‌دانیم که

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

از مقایسه‌ی دو برابری داریم :

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$$

یا

$$(۳) \quad P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

به سادگی می‌توان دید که اگر B از A مستقل باشد باز همین رابطه برقرار است. پس اگر A از B مستقل باشد یا B از A مستقل باشد باید رابطه‌ی (۳) برقرار باشد. از طرفی با داشتن رابطه‌ی (۳) می‌توان به رابطه‌های $P(B|A) = P(B)$ و $P(A|B) = P(A)$ رسید. (چرا؟) یعنی رابطه‌ی (۳) شرط لازم و کافی برای استقلال A از B و B از A است. بر این اساس می‌گوییم A و B مستقل‌اند. پس :

تعریف: دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه‌ای مستقل‌اند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

اگر $P(A\cap B) \neq P(A).P(B)$ می‌گویند **دو پیشامد وابسته**‌اند.

مثال ۷: فرض کنید برای ریاست شرکتی ۴ داوطلب وجود دارند. احتمال انتخاب‌شدن همه‌ی داوطلب‌ها یکی است. برآمدهای انتخاب افراد را به ترتیب با ۱، ۲، ۳ و ۴ نمایش می‌دهیم. نشان دهید که پیشامدهای $A = \{۱ , ۴\}$ و $B = \{۱ , ۳\}$ از هم مستقل‌اند.

فضای نمونه‌ای به صورت $S = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است. بنابر داده‌های مثال،

$$P(۱) = P(۲) = P(۳) = P(۴) = \frac{۱}{۴}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که پیشامد A یعنی انتخاب فرد اول یا چهارم، از پیشامد B یعنی از انتخاب فرد اول یا سوم مستقل است. واضح است که

$$A\cap B = \{۱ , ۴\}\cap\{۱ , ۳\} = \{۱\}$$

پس :

$$P(A\cap B) = P(۱) = \frac{۱}{۴}$$

از طرفی :

$$P(A) = P(B) = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه :

$$P(A\cap B) = P(A).P(B) = \frac{۱}{۴}$$

یعنی پیشامدهای A و B از هم مستقل‌اند.

توجه: اگر دو پیشامد یک فضای نمونه‌ای ناسازگار باشند یعنی برآمدی مشترک نداشته باشند و احتمال هر دو مثبت باشد آن دو پیشامد از هم مستقل نیستند. به عبارت دیگر ناسازگاری دو پیشامد به استقلال دو پیشامد ربطی ندارد. زیرا اگر $A\cap B=\phi$ ، آن‌گاه

$$P(A\cap B)=P(\phi)=0$$

و اگر A و B مستقل باشند باید

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

از مقایسه‌ی دو برابری اخیر نتیجه می‌شود که

$$P(A).P(B)=0$$

یعنی دو پیشامد ناسازگار وقتی مستقل‌اند که $P(A)=0$ یا $P(B)=0$ ، و اگر این دو احتمال صفر نباشند A و B مستقل نیستند.

۸ ــ۵ــ فرمول احتمال کل

اگر فضای نمونه‌ای S به n پیشامد B_1 ، B_2 ، ... ، B_n افراز شده باشد و اگر A پیشامدی از S باشد آن‌گاه به شرط $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,\dots,n$ ،

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i) \qquad (4)$$

زیرا همان‌طور که در سال پیش دیده‌ایم

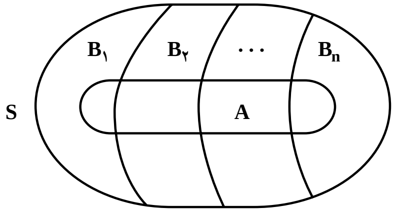
$$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$$

و هر دو پیشامد B_i و B_j وقتی $i\neq j$ ، ناسازگارند، یعنی $B_i\cap B_j=\phi$ ، $i\neq j$ ، بدیهی است که

$$A=A\cap S=A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n)$$

اما همه پیشامدهای طرف دوم رابطه بالا دو به دو ناسازگارند، پس، طبق اصل موضوع ۳، داریم :

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\cdots+P(A\cap B_n)$$



شکل ۴ــ افراز فضای نمونه‌ای

یا به صورت خلاصه، $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i)$. اما می‌دانیم که با توجه به تعریف احتمال شرطی و با فرض $P(B_i)\neq 0$ ، $P(A\cap B_i)=P(B_i)P(A|B_i)$ ، پس نتیجه می‌شود که $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$. این فرمول به فرمول **احتمال کل** موسوم است.

مثال ۸: سه ظرف همانند داریم. اولین ظرف شامل ۵ مهره‌ی سفید و ۱۱ مهره‌ی سیاه است. دومین ظرف شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه است، و سومین ظرف تنها شامل مهره‌های سفید است. با چشم بسته یکی از سه ظرف را انتخاب و از آن مهره‌ای در می‌آوریم. احتمال این‌که مهره سفید باشد چه قدر است؟

پیشامد استخراج مهره‌ی سفید را با A نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(A)$ را حساب کنیم پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم

$B_1=$ {ظرف اول انتخاب شود}

$B_2=$ {ظرف دوم انتخاب شود}

$B_3=$ {ظرف سوم انتخاب شود}

بدیهی است $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$. از طرفی

$$P(A|B_1)=\frac{5}{16}\ ,\ \ P(A|B_2)=\frac{1}{4}\ ,\ \ P(A|B_3)=1$$

حال با توجه به فرمول احتمال کل

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)+P(B_3).P(A|B_3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{25}{48}$$

Δ

۸ ــ ۶ــ قاعده‌ی بیز

(حالت ساده). در آزمایش‌های معمولی مواردی وجود دارند که برآمد نهایی آزمایش به آن‌چه در مراحل قبلی رخ می‌دهند بستگی دارد. برای توضیح این مطلب ابتدا به معرفی قاعده‌ی بیز می‌پردازیم.

دیدیم که اگر A و B دو پیشامد با احتمال مثبت از فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشند، آنگاه داریم

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

و

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

اگر از برابری دوم $P(A\cap B)$ یعنی $P(B|A).P(A)$ را در برابری اول قرار دهیم، نتیجه می‌شود که

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}.P(B|A) \qquad (5)$$

این رابطه را **قاعده‌ی بیز** می‌نامند. قاعده‌ی بیز در حالت کلی مفصل‌تر است. تامس‌بیز (۱۷۶۱ــ ۱۷۰۲) کشیشی انگلیسی بود که حالت کلی‌تر این قاعده را ارائه داد. در مثال زیر یک مورد استفاده از قاعده بیز را می‌بینید.

مثال ۹: وقتی یک مرکز مخابره‌ی تلگراف، پیامی را به مرکز دیگر می‌فرستد گاهی خطاهایی در انتقال صورت می‌گیرند. به ویژه وقتی از الفبای مورس برای مخابره استفاده می‌شود و کدهای «نقطه» و «خط» را به کار می‌برند[1] این خطاها بدین صورت است که کدی که مرکز M به صورت نقطه می‌فرستند در مرکز N خط دریافت می‌شود و یا برعکس. به تجربه دریافته‌اند که به طور متوسط در هر متنی که مرکزی می‌فرستد نسبت فراوانی نقطه به فراوانی خط برابر ۳ به ۴ است. هم‌چنین به طور تقریب می‌دانند که با احتمال $\frac{۱}{۸}$ نقطه‌ای که مرکز M می‌فرستد در مرکز N در اثر تداخل خطوط مخابره، اشتباهاً خط دریافت می‌شود و با همین احتمال خطی را که مرکز M می‌فرستد در مرکز N نقطه دریافت می‌شود. حال اگر در مرکز N کدی به صورت نقطه دریافت شده باشد چه قدر احتمال

۱ــ این روزها، در ارتباط‌های الکترونیکی از کدهای ۰ و ۱ استفاده می‌کنند.

دارد که این کد واقعاً به صورت نقطه فرستاده شده باشد؟

اگر در فرمول بیز قرار دهیم

$$A = \text{پیشامد فرستادن نقطه}$$

$$B = \text{پیشامد دریافت نقطه}$$

آن‌گاه فرمول

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}.P(B|A)$$

به صورت زیر درمی‌آید

(الف) $P(\text{فرستادن نقطه}|\text{دریافت نقطه}) = \frac{P(\text{فرستادن نقطه})}{P(\text{دریافت نقطه})}.P(\text{دریافت نقطه}|\text{فرستادن نقطه})$

آنچه می‌خواهیم به‌دست آوریم طرف اول رابطه است. زیرا در مرکز N نقطه‌ای دریافت شده است و می‌خواهیم احتمال این‌که این کد به صورت نقطه فرستاده شده باشد را بدانیم. پس سه احتمال طرف دوم را حساب می‌کنیم.

(ب) $P(A) = P(\text{فرستادن نقطه}) = \frac{۳}{۷}$

(پ) $P(B|A) = P(\text{دریافت نقطه}|\text{فرستادن نقطه}) = \frac{۷}{۸}$

محاسبه‌ی سومین احتمال یعنی $P(\text{دریافت نقطه})$ کمی مفصل‌تر است. وقتی نقطه‌ای دریافت می‌شود باید فکر کنیم که نقطه‌ای فرستاده‌اند و یا خطی فرستاده‌اند که به خطا نقطه دریافت شده است. پس

(ت) $P(B) = P(\text{دریافت نقطه}) = P(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن نقطه}) + P(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن خط})$

اما از فرمول حاصل‌ضرب احتمال می‌توانیم دو جمله‌ی طرف دوم را حساب کنیم.

$$P(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن نقطه}) = P(\text{دریافت نقطه}|\text{فرستادن نقطه}).P(\text{فرستادن نقطه})$$

$$= \frac{۷}{۸}.\frac{۳}{۷} = \frac{۳}{۸}$$

$$P(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن خط}) = P(\text{دریافت نقطه}|\text{فرستادن خط}).P(\text{فرستادن خط})$$

می‌دانیم که طبق داده‌های مثال، $P(\text{فرستادن خط}) = \frac{۴}{۷}$ و $P(\text{دریافت نقطه}|\text{فرستادن خط}) = \frac{۱}{۸}$.

پس :

$$P(\text{دریافت نقطه} \cap \text{فرستادن خط}) = \frac{۱}{۸} \cdot \frac{۴}{۷} = \frac{۱}{۱۴}$$

اگر مقادیر این دو جمله را در (ت) قرار دهیم

(ث) $$P(B) = P(\text{دریافت نقطه}) = \frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۱۴} = \frac{۲۵}{۵۶}$$

حال اگر (ب)، (پ) و (ث) را در (الف) قرار دهیم جواب مسأله به دست می‌آید :

$$P(\text{فرستادن نقطه} \mid \text{دریافت نقطه}) = \frac{\frac{۳}{۷}}{\frac{۲۵}{۵۶}} \cdot \frac{۷}{۸} = \frac{۲۱}{۲۵}$$

پس اگر در مرکز N نقطه‌ای دریافت شود احتمال $\frac{۲۱}{۲۵}$ وجود دارد که این کد واقعاً به صورت نقطه فرستاده شده باشد. Δ

همان‌طور که در مثال فوق توجه کردید در قاعده‌ی بیز ابتدا از روی تجربه‌های گذشته و یا فراوانی‌ها احتمالی ذهنی به رخداد پیشامد B به شرط A نسبت می‌دهیم. سپس با قاعده‌ی بیز احتمال رخداد پیشامد A به شرط B را محاسبه می‌کنیم. در مثال بالا

$$P(\text{دریافت نقطه} \mid \text{فرستادن نقطه})$$

را از روی تجربه‌ی گذشته برابر $\frac{۷}{۸}$ تعیین کردیم، سپس به کمک این داده و سایر داده‌ها $P(\text{فرستادن نقطه} \mid \text{دریافت نقطه})$ را که موردنظر بود به‌دست آوردیم.

۸ ــ۷ــ تمرین‌ها

۱ــ جعبه‌ای محتوی ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه است. متوالیاً دو مهره به تصادف از جعبه بدون جای‌گذاری برمی‌داریم.

الف) اگر اولین مهره سیاه باشد احتمال این‌که دومین مهره هم سیاه باشد چه‌قدر است؟

ب) احتمال این‌که مهره‌ی دوم هم‌رنگ مهره‌ی اول باشد چه‌قدر است؟

۲ــ برحسب تجربه‌ی گذشته می‌دانیم احتمال این‌که رتبه‌ی اول سال آخر رشته‌ی ریاضی دبیرستانی در مسابقه‌ی ورودی دانشگاه قبول شود ۰/۹۵ است. با توجه به سوابق تحصیلی علی در

این دبیرستان، احتمال این‌که او در سال آخر رشته‌ی ریاضی دبیرستان رتبه‌ی اول شود ۰/۹ است. احتمال این که علی هم رتبه‌ی اول شود و هم در مسابقه‌ی ورودی دانشگاه قبول شود چه‌قدر است؟

۳ـ سکه‌ای همگن را ۳ بار می‌اندازیم. اگر A پیشامد رخ‌دادن رو در دو پرتاب اول، B پیشامد رخ‌دادن پشت در پرتاب سوم و C پیشامد رخ‌دادن دقیقاً دو پشت در سه پرتاب باشد، نشان دهید که A و B مستقل‌اند ولی B و C مستقل نیستند.

۴ـ احتمال زنده‌ماندن در یک عمل پیوند عضو برابر ۰/۵ است. اگر بیماری پس از عمل زنده باشد احتمال این‌که بدن او در طول یک ماه پیوند را قبول نکند و بمیرد ۰/۲ است. احتمال زنده ماندن یک بیمار پیوندی پس از این دو مرحله چه قدر است؟

۵ـ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که ۳تای آن‌ها معیوب‌اند. اگر به تصادف ۳ لامپ متوالیاً بدون جای‌گذاری از جعبه برداریم احتمال این‌که هر ۳ لامپ معیوب باشند چقدر است؟

۶ـ یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۵ برآمد a، b، c، d و e است. به شرط آن‌که $P(\{a,b,c\})=\frac{۱}{۲}$ ، $P(a)=\frac{۱}{۴}$ مطلوب است :

الف) محاسبه‌ی $P(\{b,c,d\}|\{a,b,c\})$

ب) محاسبه‌ی $P(\{a\}|\{a,b,c\})$

۷ـ ۴ مهره به شماره‌های ۳،۲،۱ و۴ را در ظرفی ریخته‌ایم. اگر بخواهیم دو مهره به تصادف از ظرف بیرون بیاوریم شش امکان (۲, ۱)، (۳, ۱)، (۴, ۱)، (۳, ۲)، (۴, ۲) و(۴, ۳) وجود دارند. تفاضل هر دو شماره را R و مجموع آن‌ها را S فرض می‌کنیم.

الف) احتمال پیشامدی را که برای آن R = ۲ ، به‌دست آورید.

ب) احتمال پیشامدی را که برای آن S = ۵ ، به‌دست آورید.

آیا این پیشامدها مستقل‌اند؟

پ) اگر در قسمت الف R برابر یک باشد و در قسمت ب S هم‌چنان ۵ باشد پیشامدها مستقل‌اند؟

۸ـ در دو جعبه به ترتیب ۳۰ و ۲۰ عدد لامپ همانند وجود دارد. در جعبه‌ی اول ۵ عدد لامپ معیوب و در جعبه‌ی دوم ۳ عدد لامپ معیوب موجود است. از اولی ۱۰ لامپ و از دومی ۸ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را به صورت درهم در جعبه‌ای جدید قرار می‌دهیم. از این جعبه به تصادف لامپی برمی‌داریم. احتمال این‌که این لامپ معیوب باشد چه‌قدر است؟

۹ــ دو ظرف داریم. اولی شامل ۱۰ مهره سفید و ۸ مهره‌ی سیاه است و دومی شامل ۱۲ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه است. از ظرف اول به تصادف مهره‌ای در می‌آوریم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آن‌گاه از ظرف دوم به تصادف مهره‌ای درمی‌آوریم. احتمال این‌که این مهره سفید باشد چه قدر است؟

۱۰ــ تکمیل بنای راهی ممکن است به دلیل اعتصاب کارگران به تأخیر افتد. فرض کنید احتمال این‌که اعتصابی رخ دهد ۰/۶۵ باشد و احتمال این‌که اگر اعتصابی نباشد کار به موقع انجام شود ۰/۸ و احتمال این‌که اگر اعتصابی باشد کار به موقع انجام شود ۰/۳ باشد. احتمال این‌که کار بنای راه به موقع انجام شود چه قدر است؟

۱۱ــ اگر $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید

$$P(A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳) \leq P(A_۱) + P(A_۲) + P(A_۳)$$

۱۲ــ اگر $B_۱$ ، $B_۲$ و $B_۳$ سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S و با احتمال مثبت باشند، $P(B_۳|B_۲ \cap B_۱)$ به معنای احتمال رخداد پیشامد $B_۳$ به شرط رخداد هر دو پیشامد $B_۱$ و $B_۲$ است. با این تعریف ثابت کنید

$$P(B_۱ \cap B_۲ \cap B_۳) = P(B_۱)P(B_۲|B_۱)P(B_۳|B_۲ \cap B_۱)$$

۱۳ــ اگر $B_۱$ ، $B_۲$ و $B_۳$ سه پیشامد دو به دو ناسازگار و با احتمال مثبت باشند که اجتماع آن‌ها برابر با S است و اگر A پیشامدی از S باشد ثابت کنید.

$$P(B_۱|A) = \frac{P(A|B_۱)P(B_۱)}{\sum_{i=۱}^{۳} P(A|B_i)P(B_i)} \ , \ i = ۱,۲,۳$$