

فصل ۲

برق تولید شده توسط توربین‌های بادی تابعی از سرعت باد است.

$$P(v) = \frac{8v^3}{125}$$



تابع

۱. تابع: یادآوری و تکمیل
۲. رسم نمودار توابع
۳. اعمال جبری روی توابع
۴. ترکیب توابع
۵. توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی
۶. توابع یک به یک و توابع وارون
۷. توابع چند جمله‌ای و توابع متناوب
۸. توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح



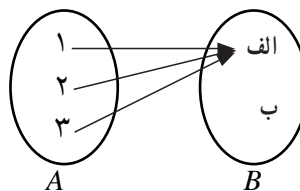
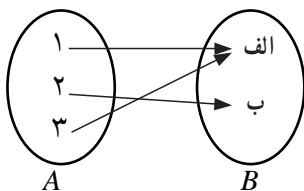
تابع: یادآوری و تکمیل

در سال گذشته با مفهوم تابع و برخی از انواع آن و نیز کاربردهایی از تابع آشنا شدید. همان گونه که دیدید یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. در اینجا تعریف تابع را با دقت بیشتری توضیح می‌دهیم.

تمرین در کلاس



فرض کنید محصولات یک کارخانه از نظر کیفیت در دو نوع «الف» و «ب» دسته بندی شوند.
الف) چرا رابطه‌ای که به هر محصول، کیفیت آن را نسبت می‌دهد یک تابع است؟
ب) فرض کنید سه محصول ۱، ۲ و ۳ از تولیدات این کارخانه را اختیار کرده‌ایم. در زیر دو تا از توابعی که از A به B می‌تواند برقرار شود را نشان داده‌ایم.



بردهای این دو تابع با هم چه تفاوتی دارند؟
ج) همه توابع ممکن از A به B را با نمودار ون نشان دهید. در کدام یک از این توابع برد تابع همان مجموعه B می‌شود؟

تذکر:

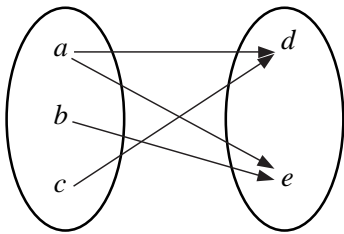
از تعریف تابع نتیجه می‌شود که اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد،
الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.
ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان، یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن که اصلاً پیکانی وارد نشود.



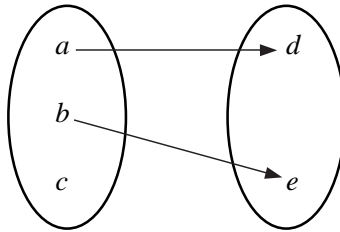
تمرین در کلاس



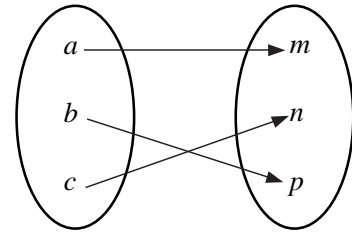
کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می کنند؟



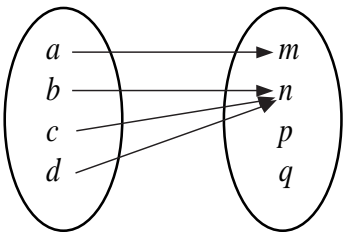
(ا)



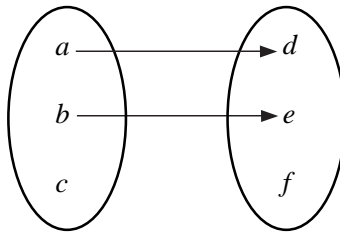
(ب)



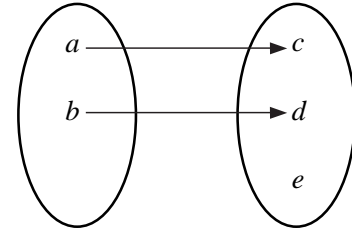
(الف)



(د)



(هـ)



(د)

تذکر:

اگر f تابعی از A به B باشد، دامنه آن A است ولی لزومی ندارد که برد آن همان مجموعه B باشد. مجموعه B را هم دامنه یا مقصد تابع f می نامند. برد یک تابع زیر مجموعه ای از هم دامنه آن است و ممکن است مساوی هم دامنه نیز بشود.



فعالیت ۱



۱- جدول زیر را کامل کنید و نمودار توابع داده شده را رسم کنید.

تابع	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2$	$h(x) = 4x + 1$	$t(x) = x - 2$	$s(x) = x - 2$
دامنه	اعداد حقیقی مثبت	اعداد حقیقی منفی	IR	IR	$[2, 3]$
برد					

۲- شباهت ها و تفاوت های این توابع را مشخص کنید.



به طور کلی اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$. این نمادگذاری نشان می‌دهد که f تابعی با دامنه A و مقادیر در B است، ولی ضابطه f در این نمادگذاری مشخص نمی‌شود و جداگانه باید ارائه شود. به طور مثال تابع g داده شده در فعالیت صفحه قبل را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نمایش داد:

$$g: IR^- \rightarrow IR \quad \text{یا} \quad g: IR^- \rightarrow IR^+ \\ \text{(ب)} \quad g(x) = x^2 \quad \text{(الف)} \quad g(x) = x^2$$

در هر دو نمایش دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی منفی (IR^-) است و در طرف چپ پیکان آمده است. اما در نمایش (الف) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی مثبت (IR^+) است که در طرف راست پیکان آمده است و در نمایش (ب) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی است که در طرف راست پیکان آمده است. در نمایش دوم به جای مجموعه اعداد حقیقی هر مجموعه دیگری را که شامل برد تابع باشد را نیز می‌توان نوشت.

در هر تابع سه ویژگی زیر اهمیت دارند:

- ۱- دامنه ۲- هم دامنه ۳- دستور یا قانونی که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم دامنه را نشان می‌دهد.
- هنگامی که دستور یا قانون تابع در قالب یک عبارت جبری قابل بیان باشد، آن را یک ضابطه جبری می‌نامیم.



مثال

- ۱: همه توابع داده شده در فعالیت قبل دارای ضابطه جبری هستند. توجه داشته باشید که ضابطه یک تابع مشخص نمی‌کند که دامنه آن تابع چه باید باشد و دامنه تابع مستقلاً باید ارائه شود.
- ۲: تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2-x}$ را اگر با دامنه $[0, 1]$ در نظر بگیریم، مقدارهای آن نیز در اعداد مثبت می‌باشند، در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$f: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$$

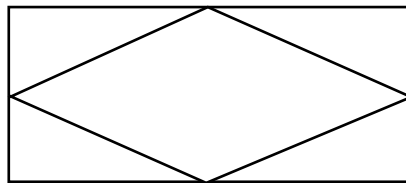
$$f(x) = \sqrt{2-x}$$

برد این تابع مجموعه $[1, \sqrt{2}]$ است.

- موارد زیادی پیش می‌آید که توابع را صرفاً با ارائه ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه نمی‌شود در این موارد طبق قرارداد دامنه تابع، بزرگترین مجموعه‌ای است که ضابطه ارائه شده، روی آن مجموعه تعریف شده است.
- ۳: اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ به عنوان تابع ارائه شده باشد و مستقیماً دامنه ارائه نشده باشد، طبق قرارداد دامنه آن بازه $[2, 2]$ است. زیرا این بازه بزرگترین مجموعه‌ای است که ضابطه $\sqrt{4-x^2}$ روی آن تعریف شده است. همچنین دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2-x}$ بازه $(-\infty, 2]$ است.



- ۱- اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{p, q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟
- ۲- اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، چند تابع از A به B وجود دارد؟
- ۳- تابعی مثال بزنید که دامنه آن $(2, \infty)$ باشد.
- ۴- دو تابع مانند f و g بسازید که دامنه هر دو برابر $[2, 5]$ و برد هر دو $[0, 4]$ و f یک به یک باشد ولی g یک به یک نباشد.
- ۵- در مستطیلی به عرض w و محیط 40 متر یک لوزی محاط شده است. هر رأس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.



- ۶- اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچکتر بیان کنید.
- ۷- با 150 متر نرده یک زمین مستطیل شکل را محصور و از وسط با نرده مانند شکل آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده ایم. مساحت ناحیه محصور شده را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیابید.



۸- توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f: [1, 2] \rightarrow IR$
 $f(x) = 3x - 1$

ب) $g: [-5, 5] \rightarrow IR$
 $g(x) = |x|$

- ۹- مساحت مثلث قائم الزاویه ای 25 سانتی متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن به دست آورید.

۱۰- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = |x|$ درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(2x) = 2f(x)$

ب) $g(2x) = 2g(x)$

ج) $f(x+2) = f(x) + 2$

د) $g(x+2) = g(x) + 2$



تساوی دو تابع

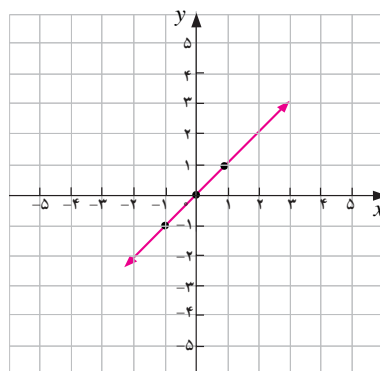
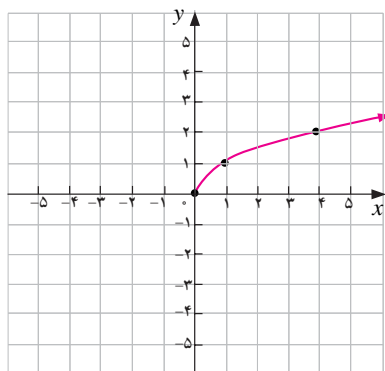
چه وقت دو تابع را مساوی می‌دانیم؟ برای مثال آیا دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = \frac{x^2}{x}$ با هم مساویند؟ اگر نمودار این دو تابع را رسم کنیم متوجه می‌شویم از هر نظر برهم منطبقند غیر از آن که تابع g در صفر تعریف نشده است. همین تفاوت نشان‌دهنده آن است که این دو تابع دامنه یکسانی ندارند، پس نمی‌توانند مساوی باشند.

با توجه به ویژگی‌های مشخص‌کننده یک تابع، دو تابع وقتی با هم برابرند که نمودارهای آن‌ها دقیقاً برهم منطبق باشند. به عبارت دیگر هیچ نقطه‌ای یافت نشود که به یکی از نمودارها تعلق داشته باشد ولی روی دیگری واقع نباشد.

با توجه به این تعریف، اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشند هنگامی با هم برابرند که مجموعه‌های زوج‌های مرتب داده شده با هم مساوی باشند.

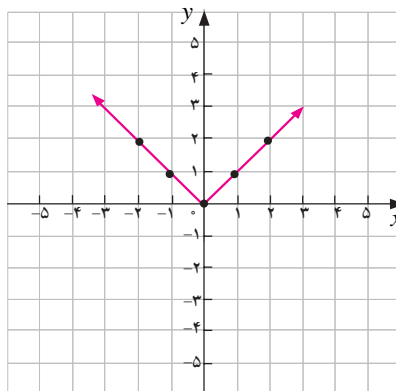
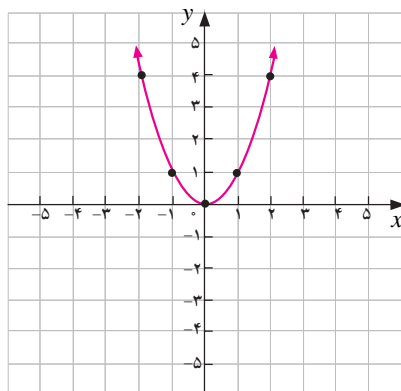
مثال

۱: دو تابع که نمودار آن‌ها در زیر داده شده است مساوی نیستند.



به روشنی دیده می‌شود که این نمودارها یکی نیستند و حتی دامنه و برد این دو تابع با هم فرق می‌کنند.

۲: دو تابع که نمودار آن‌ها در زیر داده شده است مساوی نیستند.





اگر چه دامنه و برد این دو تابع مساوی هستند، ولی نمودارهای این دو تابع با هم تفاوت دارند که نشان می‌دهد ضابطه آن‌ها با هم فرق می‌کنند. توجه داشته باشید که اگر دو تابع دارای دامنه‌ها و بردهای یکسان باشند، لزوماً با هم برابر نیستند.

تعریف:

دو تابع f و g را مساوی نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه f (یا g) $f(x) = g(x)$

تمرین در کلاس



در کدام سطر دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف)	$f = \{(1,2), (5,9)\}$	$g = \{(1,5), (2,9)\}$
ب)	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x$	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$
ج)	$f: [1,2] \rightarrow [1,4]$ $f(x) = x^2$	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$
د)	$f = \{(a,b), (c,d), (e,f)\}$	$g = \{(e,f), (a,b), (c,d)\}$
ه)	$f(x) = x + 1$	$g(x) = \frac{2x+2}{2}$
و)	$f(x) = \tan x$	$g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
ز)	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	$g(x) = x + 2$



توابع چند ضابطه‌ای

فعالیت ۲

یک شرکت حمل و نقل کالا برای محاسبه هزینه حمل کالا، به شکل زیر عمل می‌کند. این شرکت در صورتی که وزن کل از ۲ تن کمتر باشد، به ازای هر کیلوگرم دو تومان کرایه دریافت می‌کند، اگر وزن کالا حداقل ۲ تن ولی از ۳ تن کمتر باشد، شرکت به ازای هر کیلوگرم ۳ تومان و در صورتی که وزن کالا حداقل ۳ تن و حداکثر ۵ تن باشد، شرکت برای هر کیلوگرم ۴ تومان دریافت می‌کند.

الف) کرایه حمل کالایی که $\frac{2}{5}$ تن وزن دارد چقدر است؟
ب) جدول زیر را کامل کنید :

وزن کالا x	کرایه حمل
$0 \leq x < 2000$	$2x$

ج) این جدول تابعی را مشخص می‌کند. نمودار این تابع را با انتخاب مقیاس مناسب رسم کنید.
د) اگر این تابع را f بنامیم با استفاده از (ب) ضابطه تابع را به طور کامل بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 2000 \\ \dots & 2000 \leq x < 3000 \\ \dots & 3000 \leq x \leq 5000 \end{cases}$$

توابعی که در بخش‌های مختلف از دامنه آن، با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند توابع چند ضابطه‌ای می‌نامند. قبلاً با نمونه‌هایی از این توابع برخورد داشته‌اید. برای مثال تابع قدر مطلق $f(x) = |x|$ یک تابع چند ضابطه‌ای است که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت.

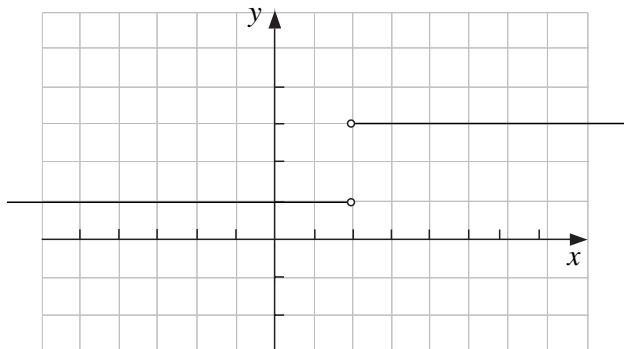
$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases}$$



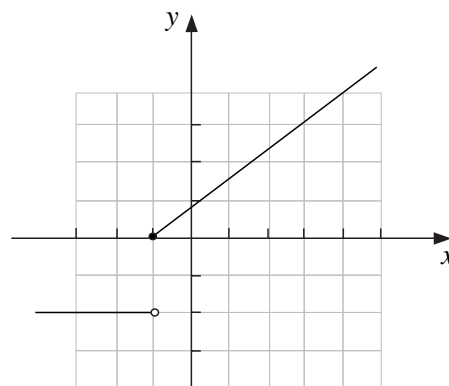
تمرین در کلاس



۱- در زیر نمودارهای دو تابع داده شده است. ضابطه‌های آن‌ها را بیابید و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.



(ب)

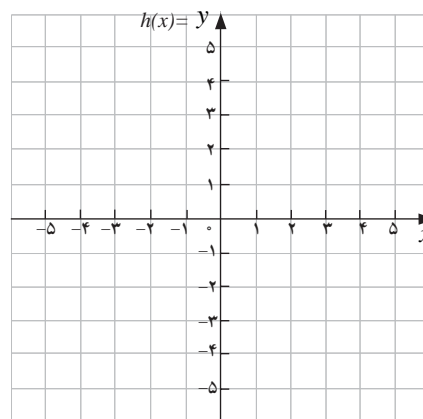
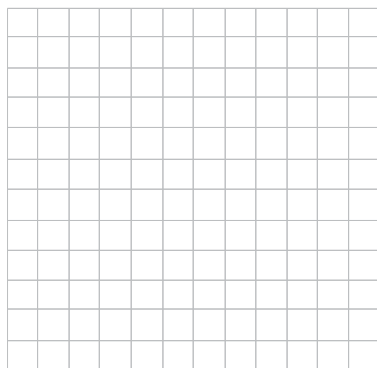
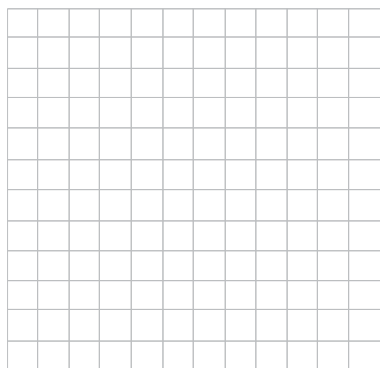


(الف)

۲- نمودار توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را بیابید.

$$g(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < 1 \\ x - 4 & 1 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & 2 < x \end{cases}$$



معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x, y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. برخی از این روابط، ضابطه تابعی را معلوم می‌کنند. بسیاری از توابع از طریق یک معادله ارائه می‌شوند اما توجه داشته باشید این طور نیست که یک معادله دو متغیره بر حسب x, y حتماً ضابطه یک تابع را نشان بدهد.



مثال

۱: معادله $x^2 + y = 1$ یک تابع y بر حسب x را نشان می‌دهد. در این گونه موارد مناسب است که y را بر حسب x به دست آوریم:

$$x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x^2$$

می‌بینیم که برای مقدار دلخواه x دقیقاً یک مقدار برای y وجود دارد و در نتیجه y به صورت تابعی از x به دست می‌آید.

۲: معادله $-x + y^2 = 1$ یک تابع y بر حسب x را نشان نمی‌دهد. زیرا با حل این معادله و با یافتن y بر حسب x مقدار یکتایی برای y به دست نمی‌آید.

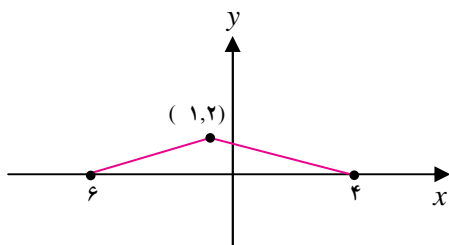
$$-x + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 + x \Rightarrow y = \pm\sqrt{1+x}$$

برای مثال به ازای $x = 8$ داریم $y = \pm 3$ یعنی زوج‌های مرتب $(8, 3)$ و $(8, -3)$ روی نمودار این معادله قرار دارند. بنابراین این معادله نمی‌تواند ضابطه یک تابع را نشان دهد (چرا؟).

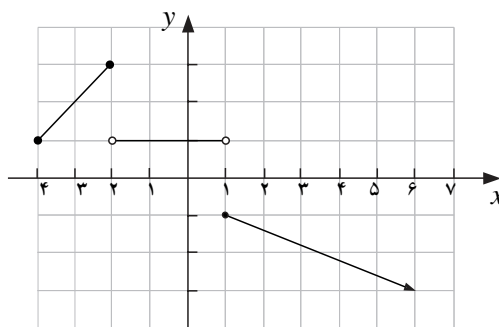
مسائل

۱- تابع $f(x) = |x+1| + |x-1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

۲- دامنه و برد هر یک از توابع چند ضابطه‌ای زیر را بیابید و ضابطه هر کدام را بنویسید.



(ب)

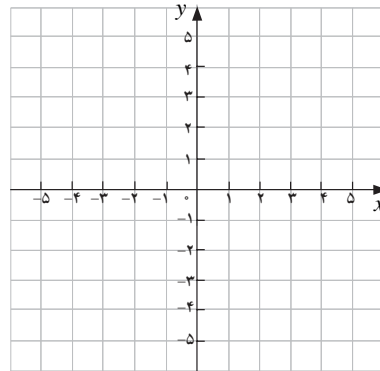


(الف)



۳- اگر

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 8 & x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 5 & -2 \leq x \leq 4 \\ 10 - 2x & 4 < x \end{cases}$$



مقدارهای $f(6)$, $f(4)$, $f(4)$, $f(0)$ را حساب کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

۴- تابعی چند ضابطه‌ای مانند f بنویسید که در تمام شرایط زیر صدق کند، سپس نمودار f را رسم کنید.

الف) دامنه f $[3, 5]$ و برد f $[2, 7]$

ب) $f(0) = 3$

ج) f یک به یک نباشد.

۵- کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند.

الف) $x^2 + y^2 = 25$

د) $x = |y| + 1$

ب) $y = \begin{cases} x + 3 & x \leq 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$

ه) $y^2 = x^2$

ج) $y = |x| + 1$

و) $x = 1$

۶- تابع f با مشخصات زیر داده شده است.

الف) $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) دامنه f برابر همه اعداد حقیقی است.

ج) تابع f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

د) تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ه) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور x ها را در نقطه ۳ قطع می‌کند.

تابع f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

۷- کدام یک از زوج توابع داده شده با هم مساویند؟

الف) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$

ب) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$, $g(x) = x + 3$



$$\text{ج) } f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

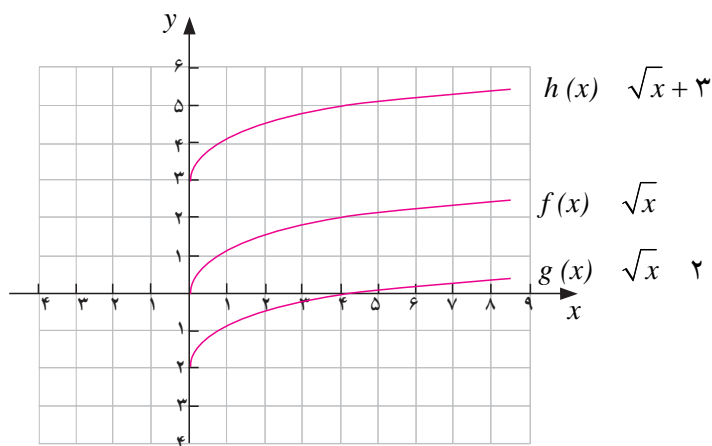
$$\text{د) } f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2}}, \quad g(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$$

رسم نمودار توابع

سال قبل دیدیم که با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می‌توانیم نمودار تابع $f(x) + a$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه a واحد در امتداد محور y ها به دست آورد. اگر $a > 0$ ، انتقال در جهت مثبت و اگر $a < 0$ ، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

مثال

۱: در شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = \sqrt{x} + 3$ و $g(x) = \sqrt{x} - 2$ رسم شده است.

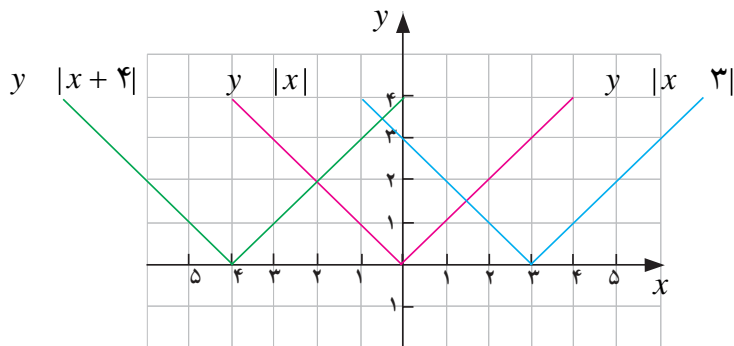


همچنین به کمک مثال‌هایی مشاهده کردید که برای رسم نمودار تابع $y = f(x - a)$ کافی است که نمودار $y = f(x)$ را a واحد در امتداد محور x ها انتقال دهیم. اگر $a > 0$ ، انتقال در جهت مثبت و اگر $a < 0$ ، انتقال در جهت منفی خواهد بود.



مثال

۲: نمودار توابع $y = |x|$ و $y = |x + 4|$ و $y = |x - 3|$ در شکل زیر رسم شده‌اند.



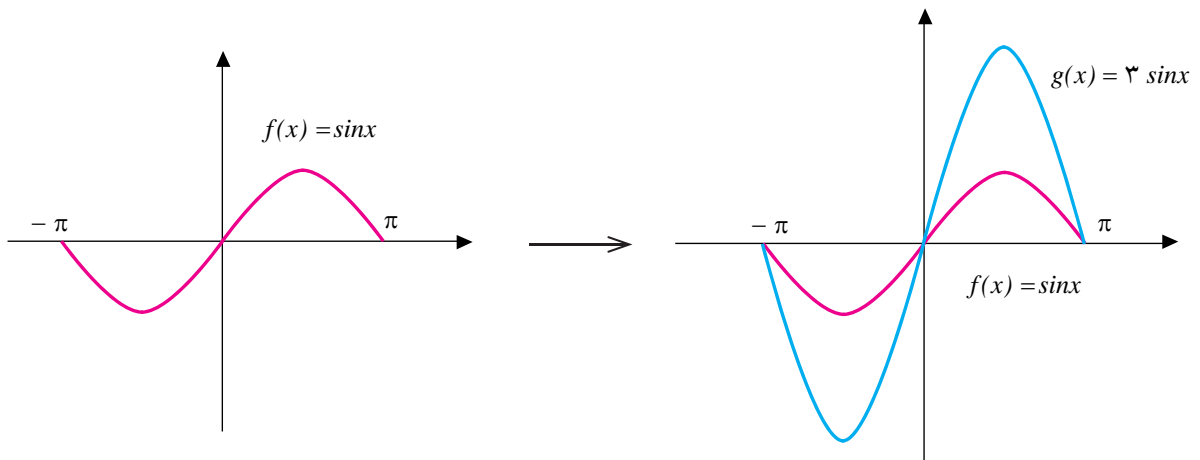
در این جا می‌خواهیم با رسم نمودار توابع دیگری که از یک تابع داده شده مانند $f(x)$ ساخته شده‌اند آشنا شویم.

رسم نمودار $af(x)$

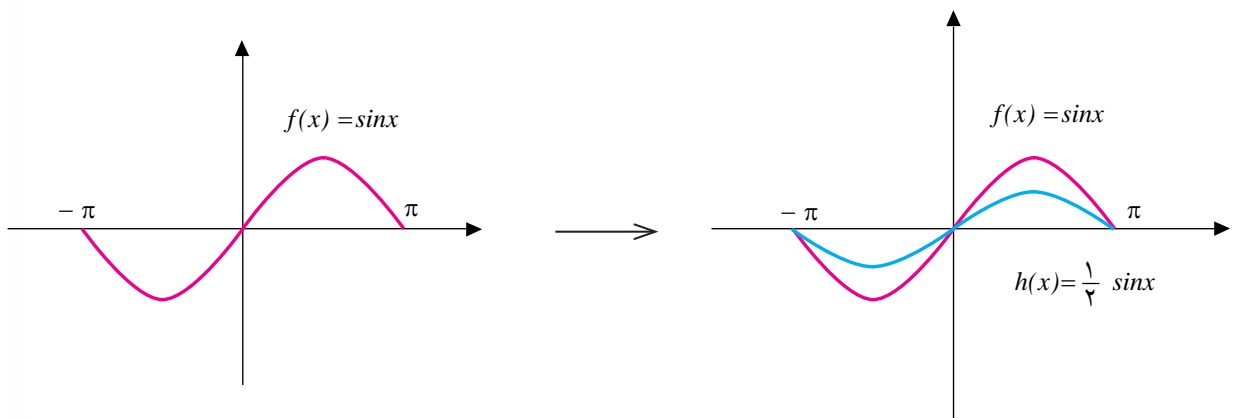
فعالیت ۳

۱- تابع $f(x) = \sin x$ داده شده است. تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = 3f(x)$ تعریف می‌کنیم. نمودارهای این دو تابع در شکل‌های زیر در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده‌اند. با تکمیل جدول توضیح دهید که نمودارها چگونه رسم شده‌اند. دامنه‌ها و بردهای دو تابع را با هم مقایسه کنید.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$			0	1	
$3\sin x$			0	3	



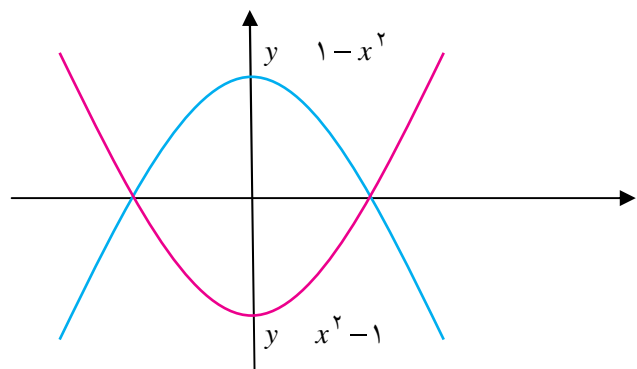
۲- نمودار تابع $h(x) = \frac{1}{4} f(x)$ نیز در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار $h(x)$ چگونه از نمودار $f(x)$ به دست می‌آید؟



نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = -f(x)$ نسبت به محور x ها قرینه یکدیگرند. برای مثال نمودار دو تابع زیر قرینه یکدیگرند.



عمارت امیر گلی - تبریز





تذکر :

نمودار تابع $y = af(x)$ به کمک نمودار تابع $y = f(x)$ به روش زیر به دست می آید :

الف) اگر $a > 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a کشیده می شود (انبساط عمودی).

ب) اگر $0 < a < 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a جمع می شود (انقباض عمودی).

ج) اگر $a < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها آینه وار منعکس می شود، سپس با ضریب $|a|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.

تمرین در کلاس



- ۱- دامنه های دو تابع $y = f(x)$ و $y = af(x)$ یکی است. در مورد بردهای این دو تابع چه می توانید بگویید؟
- ۲- نمودار تابع $f(x) = |x+2|$ را در بازه $[-4, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $f(x) = -|x+2|$ و $f(x) = \frac{1}{4}|x+2|$ را رسم کنید.

رسم نمودار $f(ax)$

فعالیت ۴



- ۱- تابع $f(x) = 1 - |x|$ را با دامنه $[1, 1]$ در نظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید. الف) دامنه تابع $f(2x)$ را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید. ب) دامنه توابع $f(\frac{1}{3}x)$ و $f(3x)$ را به دست آورید و نمودار آن ها را رسم کنید.
- ۲- اگر $a > 0$ در مورد رابطه بین دامنه و نمودار تابع $f(ax)$ با دامنه و نمودار تابع $f(x)$ چه حدس می زنید؟

مثال

تابع $f(x) = x + 4$ را با دامنه $[4, 0]$ در نظر می گیریم و چگونگی توابع $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ را بررسی می کنیم.

روشن است که $f(2x) = 2x + 4$. برای تشخیص دامنه تابع جدید $f(2x) = 2x + 4$ مقدار x باید به گونه ای باشد که $0 \leq 2x \leq 4$ ، یعنی $0 \leq x \leq 2$. در نتیجه دامنه تابع $f(2x)$ بازه $[0, 2]$ می باشد.

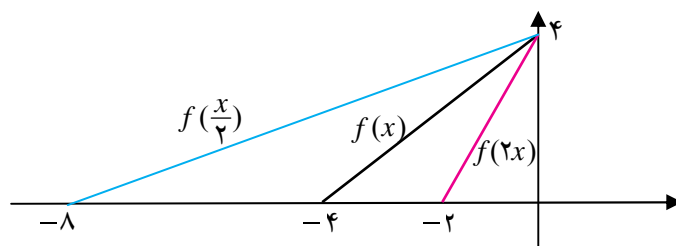


برای تابع $f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 4$ داریم و دامنه این تابع آن مقادیرهایی برای x است که داشته باشیم $0 \leq \frac{x}{2} \leq 8$ ، یعنی $0 \leq x \leq 16$. در نتیجه دامنه تابع $f(\frac{x}{2})$ بازه $[0, 16]$ می باشد.
جدول این سه تابع (برای برخی از نقاط) و نمودارهای آن‌ها به شکل زیر است:

x	-4	-3	-2	-1	
$f(x) = x + 4$		1	2	3	4

x	-2	-1/5	-1	-1/5	
$f(2x) = 2x + 4$		1	2	3	4

x	-8	-6	-4	-2	
$f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 4$		1	2	3	4



همان‌طور که در شکل دیده می‌شود نمودار $f(2x)$ با انقباض نمودار $f(x)$ در امتداد محور x (با ضریب $1/2$) و نمودار $f(\frac{x}{2})$ با انبساط نمودار $f(x)$ در امتداد محور x (با ضریب 2) به دست آمده است.

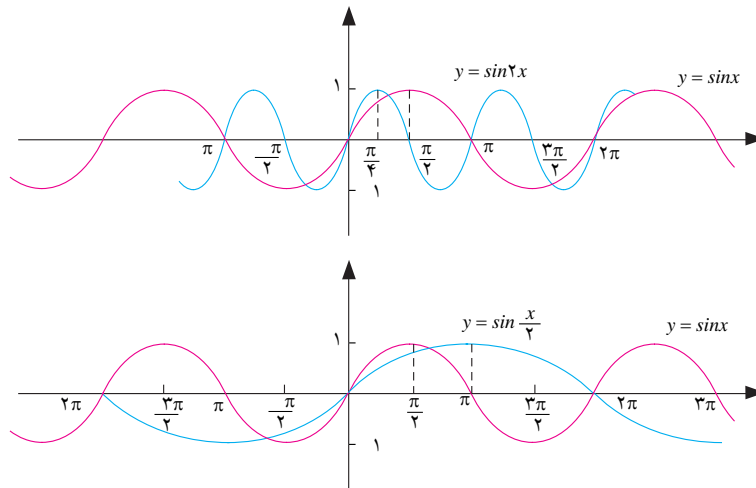
تذکر:

اگر $0 < a < 1$ ، نمودار $y = f(ax)$ را می‌توان با انقباض یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x به دست آورد. در حالتی که $1 < a$ نمودار $y = f(x)$ منقبض با ضریب $\frac{1}{a}$ ، و در حالتی که $0 < a < 1$ نمودار $y = f(x)$ منبسط با ضریب $\frac{1}{a}$ خواهد شد.



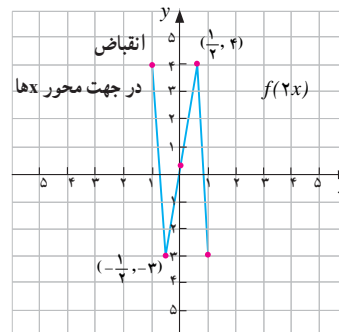
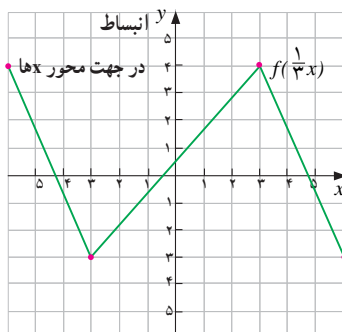
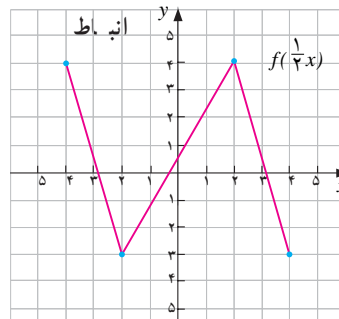
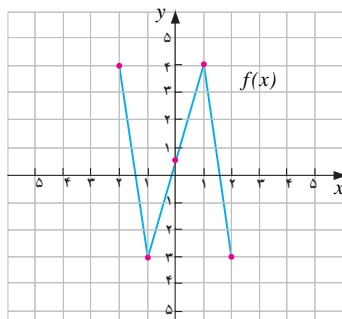
مثال

در شکل‌های زیر نمودارهای تابع $y = \sin 2x$ و $y = \sin \frac{x}{4}$ به کمک نمودار $y = \sin x$ رسم شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود نمودار $y = \sin 2x$ با فشردن (انقباض) نمودار $y = \sin x$ در امتداد محور x ‌ها و نمودار $y = \sin \frac{x}{4}$ با کشیده شدن (انبساط) نمودار $y = \sin x$ در امتداد محور x ‌ها به دست آمده است.



مثال

نمودار تابع $f(x)$ و توابع $f(2x)$ ، $f(\frac{1}{4}x)$ ، $f(\frac{1}{3}x)$ در زیر رسم شده‌اند.





همان طور که در نمودارها دیده می‌شود برد توابع $f(2x)$ ، $f(\frac{1}{2}x)$ ، $f(\frac{1}{3}x)$ همان برد تابع $f(x)$ است، اما دامنه‌ها کشیده‌تر (منبسط) یا جمع‌تر (منقبض) شده است.

فعالیت ۵

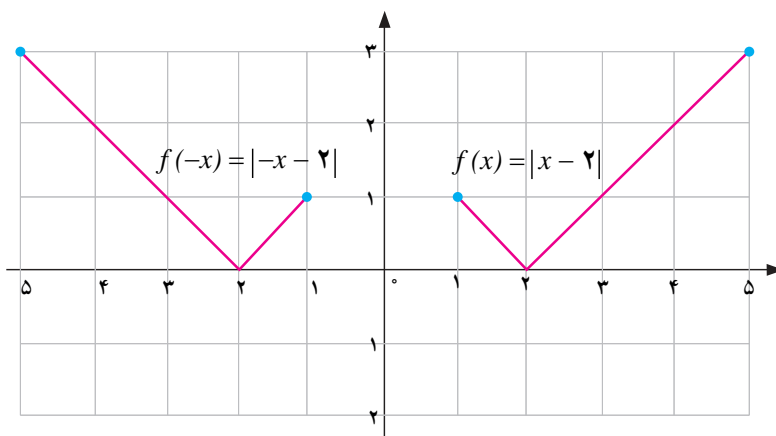
- ۱- با در نظرگیری $f(x) = x + 1$ ، ضابطه تابع $f(-x)$ را به دست آورید و نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.
- ۲- نمودار این دو تابع چه وضعیتی با هم دارند.
- ۳- برای تابع $g(x) = x^2 - x$ نیز تابع $g(-x)$ را بسازید و نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت این دو نمودار را نسبت به هم بسنجید.

قضیه :

نمودار تابع $f(-x)$ قرینه نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور y ها است.

مثال

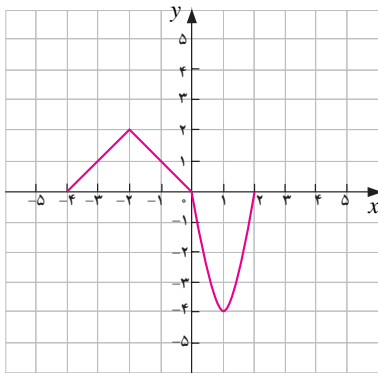
نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ در بازه $[1, 5]$ در سمت راست و نمودار $f(-x) = |-x - 2|$ در سمت چپ شکل زیر رسم شده است. (توجه داریم که $|-x - 2| = |x + 2|$)



همان طور که دیده می‌شود نمودار $f(x)$ و $f(-x)$ نسبت به محور y ها قرینه یکدیگرند.

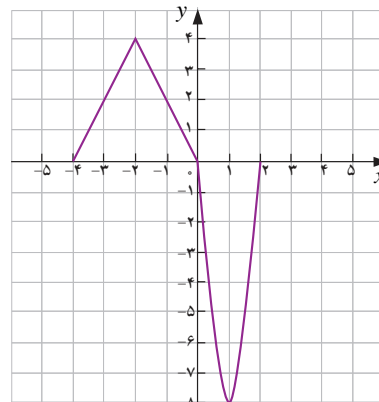
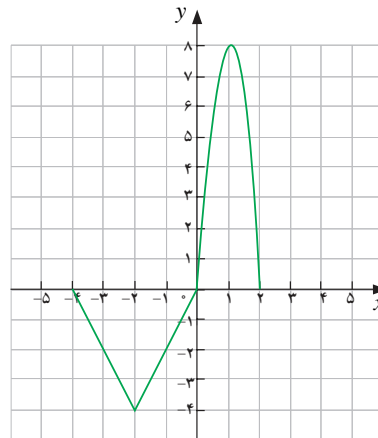
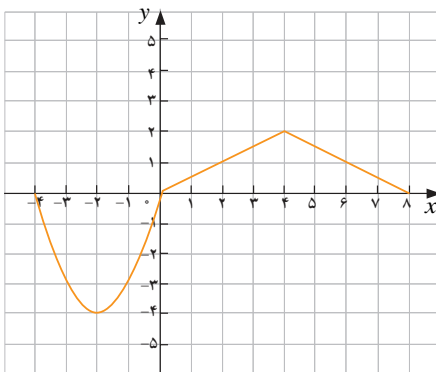
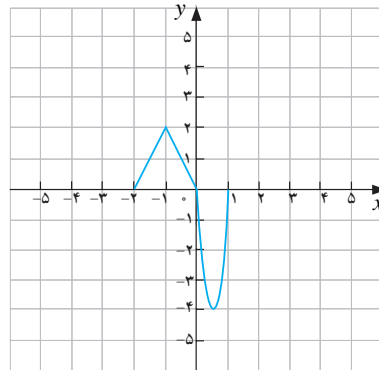
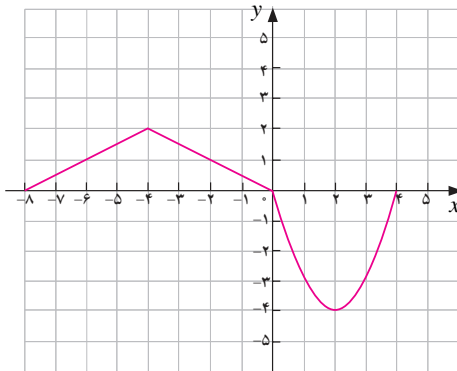


تمرین در کلاس



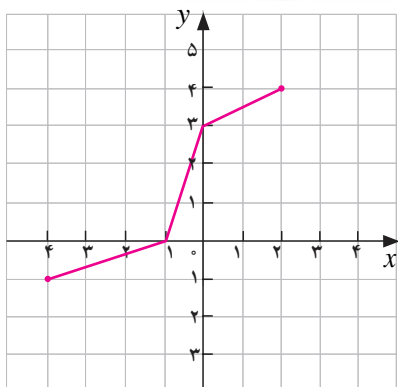
۱- نمودار تابع $g(x)$ به شکل مقابل داده شده است.

به کمک این نمودار، نمودار توابع $g(2x)$ ، $g(\frac{1}{2}x)$ و $g(-\frac{1}{2}x)$ رسم شده اند. تعیین کنید که هر یک از نمودارهای زیر نمودار کدام یک از این توابع هستند؟

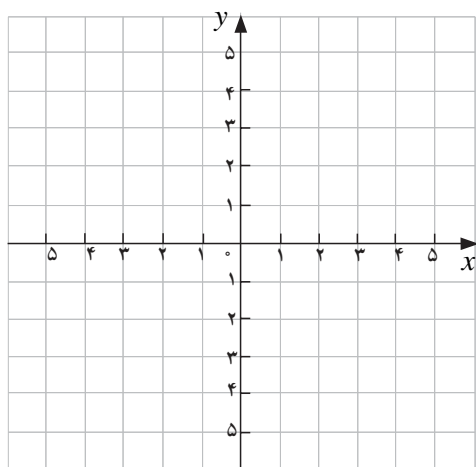




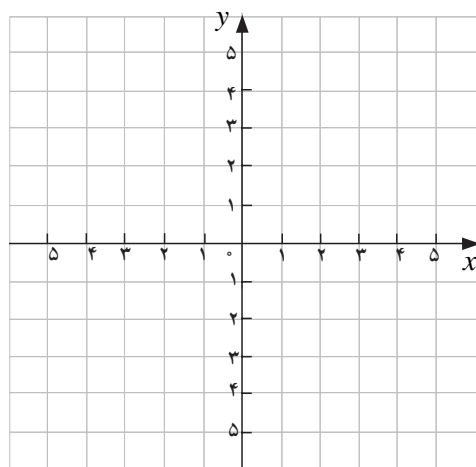
۲- نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل داده شده است.



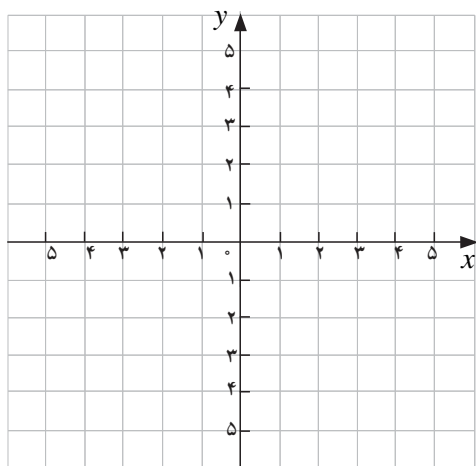
نمودار توابع داده شده زیر را رسم کنید.



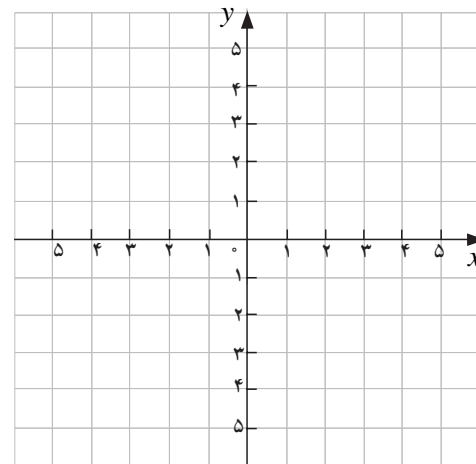
$$y = -f(x-1)$$



$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$



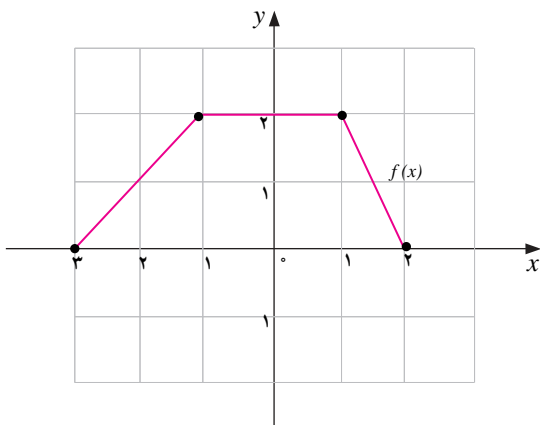
$$y = f(2x)$$



$$y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$$



- ۱- ابتدا نمودار $f(x) = |x|$ را رسم کنید و به کمک آن نمودار $y = -3|x-1| + 2$ را رسم کنید.
- ۲- نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر داده شده است. به کمک این نمودار، نمودار تابع داده شده را رسم کنید.



الف) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

ب) $g(x) = f(-x)$

ج) $g(x) = f(3x)$

د) $g(x) = f(-\frac{1}{2}x)$

هـ) $g(x) = -2f(x)$

و) $g(x) = f(x+2)$

- ۳- نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

- به کمک نمودار $f(x)$ نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f(-2x)$ و $y = -f(2x)$ را رسم کنید.

- ۴- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

- الف) اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = |x+3| - 3$ ، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست و سپس انتقال سه واحد به پایین به دست آورد.

- ب) $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ دارای نمودارهای یکسانی هستند.

- ج) اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = -(x-2)^2 + 4$ آن‌گاه نمودار g را می‌توان از نمودار f با یک تغییر مکان به

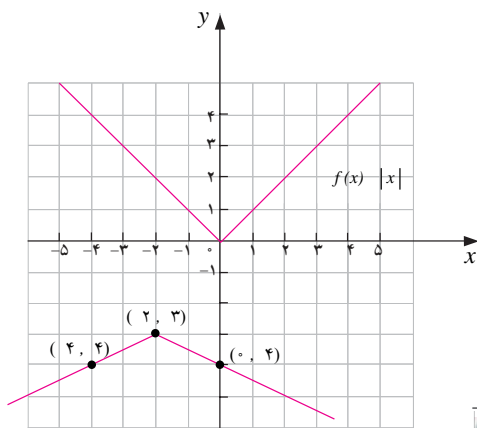
- میزان دو واحد به راست، سپس انعکاس نسبت به محور x ها و ۴ واحد تغییر مکان به سمت بالا به دست آورد.

- ۵- در شکل روبه‌رو نمودار توابع g و f در یک دستگاه

- مختصات رسم شده‌اند. اگر g از طریق تعدادی عملیات (انبساط

- و انقباض و انتقال و قرینه) روی f به دست آمده باشد معادله‌ای

- برای g بیابید.





۶- نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها، انعکاس داده‌ایم، سپس آن را سه واحد در جهت راست و بعد ۵ واحد به پایین حرکت داده‌ایم. ضابطه تابع به دست آمده را بنویسید.

۷- نقطه $(-۸, ۶)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. این نقطه با چه نقطه‌ای از نمودار توابع زیر متناظر می‌شود؟

الف) $g(x) = \frac{1}{4}f(x)$ ب) $g(x) = f(-x)$

ج) $g(x) = f(x) - ۳$ د) $g(x) = ۳f(x)$

۸- در هر مورد توضیح دهید که نمودار g چگونه از نمودار f به دست می‌آید.

الف) $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{x-1} + ۳$

ب) $f(x) = x^2$ ، $g(x) = -۲(x+۴)^2 - ۳$

ج) $f(x) = |x|$ ، $g(x) = -۲\left|x - \frac{1}{3}\right| + ۱$

۹- اگر $f(x) = \cos x$ مطلوب است نمودار $f(x)$ ، $f(2x)$ ، $f(\frac{1}{4}x)$ ، $-f(x)$ ، $f(-x)$.

۱۰- نمودار دو تابع \sqrt{x} و $\sqrt{-x}$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دامنه این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

برد این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ جواب به این سؤالات در مورد دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ چه خواهد بود؟

۱۱- اگر $a < 0$ ، نمودار تابع $f(ax)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه ساخته می‌شود؟

اعمال جبری روی توابع



فعالیت ۶



یک حوض آب با دو شیر آب متفاوت پر می‌شود. از شیر اول در هر ثانیه $\frac{1}{4}$ لیتر و از شیر دوم در هر ثانیه ۱ لیتر آب خارج می‌شود. در لحظه $t = 0$ حوض خالی است و دو شیر را با هم باز می‌کنیم.

۱- جدول زیر را که حجم آب موجود در حوض و آب‌های خارج شده از دو شیر را در برخی لحظات نشان می‌دهد تکمیل کنید. زمان بر حسب ثانیه و حجم بر حسب لیتر است.

t	$\frac{1}{2}$	۲	۳	$\frac{7}{2}$	۴	۵
حجم آب خارج شده از شیر اول						
حجم آب خارج شده از شیر دوم						
حجم آب موجود در حوض						