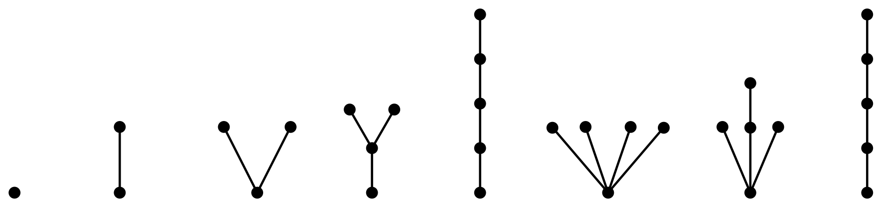
فصل ۳

درخت و ماتریس

در این فصل کوتاه ابتدا رده‌ی خاص دیگری از گراف‌ها موسوم به درخت‌ها را معرفی می‌کنیم و به بررسی ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. سرانجام به هر گراف یک ماتریس نسبت می‌دهیم و نشان می‌دهیم که هر گراف را می‌توان با یک ماتریس بسیارخاص نیز نمایش داد.

۳ــ۱ــ درخت

گراف‌همبندی را که هیچ دور نداشته باشد **درخت** می‌نامیم. گراف‌های $K_۱$ و $K_۲$ درخت‌اند و به ترتیب «تنها» درخت‌های با یک و دو رأس هستند. در شکل ۱ تمام درخت‌های از مرتبه‌ی p، $۱ \le p \le ۵$، را رسم کرده‌ایم.



شکل ۱ــ درخت‌های از مرتبه‌ی ۱ تا ۵

گراف مربوط به هر هیدروکربن $C_nH_{۲n+۲}$ نیز یک درخت است. می‌بینیم که در هر یک از این مثال‌ها بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد. این مطلب همواره درست است.

قضیه‌ی ۱ــ بین هر دو رأس هر درخت مفروض دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

اثبات: اثبات در حالتی که دو رأس متمایز نباشند واضح است. فرض کنید u و v دو رأس

متمایز درختی چون G باشند. چون G همبند است بین u و v دست کم یک مسیر وجود دارد. اگر در G دو مسیر مختلف (در واقع دو دنباله‌ی مختلف از رأس‌های متمایز G) از u به v وجود داشته باشند، آن‌گاه این دو مسیر مختلف «ایجاب» می‌کنند که دوری در G وجود داشته باشد. پس G درخت نیست و این، یک تناقض است. □

مطلب دیگری که از درخت‌های شکل ۱ برمی‌آید این است که، به‌جز K_1 ، هر یک دست‌کم دو رأس از مرتبه‌ی یک دارد. این مطلب نیز همواره درست است.

قضیه‌ی ۲: هر درختی که بیش از یک رأس داشته باشد دست‌کم دو رأس از درجه‌ی یک دارد.

اثبات: از به اصطلاح استقرای تعمیم یافته روی مرتبه‌ی درخت G استفاده می‌کنیم. اگر $p = ۲$ آن‌گاه $G = K_۲$ و درستی حکم واضح است. فرض می‌کنیم حکم در مورد هر درخت با $k \geq ۲$ رأس درست است. سپس درختی چون G از مرتبه‌ی $k + ۱$ را در نظر می‌گیریم. اگر G رأسی چون v از درجه‌ی یک داشته باشد آن‌گاه با حذف رأس v و تنها یال مارّ بر آن گرافی مانند G' به‌دست می‌آوریم که درخت است و $k \geq ۲$ رأس دارد. پس بنا به فرض استقراء، G' و در نتیجه G دست‌کم دو رأس از درجه‌ی یک دارد. پس فرض می‌کنیم درجه‌ی هیچ رأسی از G از دو کمتر نباشد. در این صورت رأسی چون u از G را در نظر می‌گیریم. با آغاز از u و انتخاب یالی از G که از u می‌گذرد مسیری چون P را به این ترتیب می‌پیماییم که هر بار پس از رسیدن به رأسی تازه یالی از G را در پیش می‌گیریم که اولاً از آن رأس بگذرد، ثانیاً قبلاً مورد استفاده قرار نگرفته باشد، و ثالثاً انتهای دیگر آن رأسی تازه‌تر از G باشد. این کار باید در جایی متوقف شود. چون درجه‌ی هر رأس دست‌کم دو است توقف آن با رسیدن به یکی از رأس‌های قبل میسر است و لذا دوری در G به‌وجود می‌آید. این تناقض قضیه را ثابت می‌کند. □

به مثال‌های گوناگون درخت‌ها نظر افکنید، می‌بینید که در مورد تمام آن‌ها قضیه‌ی زیر درست است.

قضیه‌ی ۳: اگر G درختی با p رأس و q یال باشد آن‌گاه

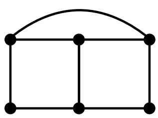
$$p = q + ۱.$$

اثبات: با استقراء بر p قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر $p = ۱$ آن‌گاه $q = ۰$ و داریم $p = q + ۱$. فرض کنید قضیه درمورد هر درختی با k، $k \geq ۱$ ، رأس درست باشد. حال درختی چون G را در نظر می‌گیریم که $k + ۱$ رأس دارد. باید نشان دهیم تعداد یال‌های آن k است. بنا به قضیه‌ی قبل G رأسی

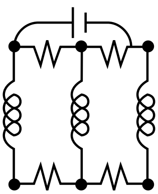
چون v دارد که $\deg v = ۱$. با حذف رأس v و تنها یال مارّ بر آن درختی چون G' ایجاد می‌شود که مرتبه‌اش k است. بنابه فرض استقراء، گراف G' دارای $k-۱$ یال است. پس درخت G دقیقاً k یال دارد. □

مجله‌ی ریاضی

درخت در رشته‌های مختلفی مانند شیمی، مهندسی برق، و علم محاسبه کاربرد دارد. کرشهف در سال ۱۸۴۷ میلادی هنگام حل دستگاه‌های معادلات خطی مربوط به شبکه‌های الکتریکی درخت‌ها را کشف، و نظریه‌ی درخت‌ها را بارور کرد. در شکل زیر N یک شبکه‌ی الکتریکی و G گراف مربوط به آن است.



G



N

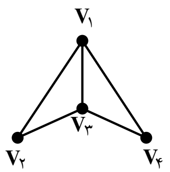
کِیلی در سال ۱۸۵۷ میلادی درخت‌ها را در ارتباط با شمارش ایزومرهای مختلف هیدروکربن‌ها کشف کرد. وقتی مثلاً می‌گوییم دو ایزومر مختلف $C_۴H_{۱۰}$ وجود دارند منظورمان این است که دو درخت «متفاوت» با ۱۴ رأس وجود دارند که درجه‌ی ۴ رأس از این ۱۴ رأس چهار و درجه‌ی هر یک از ۱۰ رأس باقیمانده یک است.

اگر هزینه‌ی کشیدن مثلاً راه‌آهن بین هر دو شهر از p شهر مفروض مشخص باشد ارزان‌ترین شبکه‌ای که این p شهر را به هم وصل می‌کند با مفهوم یک درخت از مرتبه‌ی p ارتباط نزدیک دارد. به‌جای مسأله‌ی مربوط به راه‌آهن می‌توان وضعیت مربوط به شبکه‌های برق‌رسانی، لوله‌کشی نفت، لوله‌کشی گاز، و ایجاد کانال‌های آبرسانی را در نظر گرفت. برای تعیین یک شبکه با نازل‌ترین هزینه از قاعده‌ای به نام **الگوریتم صرفه‌جویی** استفاده می‌شود که کاربردهای فراوان دارد.

۳ــ۲ــ گراف‌ها و ماتریس‌ها

گراف $G=(V,E)$ با $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ و $E=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_2v_3,v_3v_4\}$ را که در شکل ۲ رسم شده است در نظر بگیرید. به این گراف ماتریسی 4×4 چون $A=(a_{ij})$ به شرح زیر نسبت می‌دهیم. در مقابل چهار سطر و چهار ستون این ماتریس طبق شکل ۲ می‌نویسیم v_1، v_2، v_3 و v_4. درایه‌ی a_{ij} از این ماتریس ۱ است هر گاه $v_iv_j \in E$ و 0 است هر گاه $v_iv_j \notin E$.

G :



$$A:\ \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

شکل ۲ــ گراف و ماتریس مجاورت آن

توجه کنید که :

(۱) درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفرند زیرا گراف‌های (ساده‌ی) موضوع بحث ما «طوقه» ندارند، یعنی هیچ رأسی با خودش مجاور نیست.

(۲) تعداد سطرهای این ماتریس برابر است با تعداد ستون‌های آن، یعنی ماتریس A مربعی است.

(۳) هر درایه‌ی ماتریس A یا صفر است یا یک، یعنی همواره $a_{ij}\in\{0,1\}$.

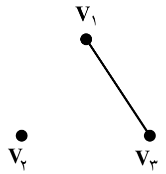
(۴) ماتریس A متقارن است، یعنی همواره $a_{ij}=a_{ji}$، زیرا اگر $v_iv_j\in E$ آن‌گاه $v_jv_i\in E$.

واضح است که به هر گراف دلخواه G همواره می‌توان ماتریسی چون A با ویژگی‌های چهارگانه بالا نسبت داد. این ماتریس را **ماتریس مجاورت گراف** G می‌نامیم و آن را با $A(G)$ یا به‌طور ساده با A نمایش می‌دهیم.

جالب این‌جاست که به هر ماتریس با ویژگی‌های چهارگانه بالا می‌توان یک گراف نسبت داد. مثلاً اگر ماتریس A از شکل ۳ را به ما بدهند فوراً می‌توانیم گراف G از همین شکل را به آن نسبت دهیم. برای این کار به‌ازای سطر (یا ستون) اول ماتریس نقطه‌ای چون v_1، به ازای سطر (یا ستون) دوم ماتریس نقطه‌ای چون v_2 و همین‌طور به ازای سطر (یا ستون) سوم نقطه‌ی دیگر v_3 را در نظر

می‌گیریم و نقطه‌ی v_i را به نقطه‌ی v_j با خطی به هم وصل می‌کنیم هرگاه درایه‌ی مربوط در ماتریس داده شده یک باشد و در غیر این صورت آن دو را به هم وصل نمی‌کنیم.

G :



$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

شکل ۳ــ ماتریس با شرایط چهارگانه‌ی بالا و گراف آن

پس می‌بینیم که یک گراف با p رأس در واقع چیزی جز یک ماتریس مربعی $p\times p$ با شرایط چهارگانه‌ی بالا نیست. و لذا برای مطالعه‌ی گراف‌ها می‌توان صرفاً ماتریس‌های مربعی متقارنی را مطالعه کرد که درایه‌های آن‌ها از مجموعه‌ی $\{0,1\}$ انتخاب می‌شوند و درایه‌های روی قطر اصلی آن‌ها صفرند. بنابراین نظریه‌ی گراف‌ها را می‌توان شاخه‌ای از جبر هم تلقی کرد.

قضیه‌ی ۴: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G با $V(G)=\{v_1,\cdots,v_p\}$ باشد. آن‌گاه درایه‌ی واقع در سطر iام و ستون iام ماتریس A^2 برابر است با درجه‌ی رأس v_i در گراف G.

اثبات: درایه‌ی واقع در سطر iام و ستون iام ماتریس A^2 برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های نظیر به نظیر سطر iام A و ستون iام A. چون A متقارن است این درایه از حاصل‌ضرب‌های درایه‌های نظیر به نظیر سطر iام A و سطر iام A حاصل می‌شود. تعداد یک‌های موجود در سطر iام A برابر است با درجه‌ی رأس v_i و لذا برای محاسبه‌ی درایه‌ی موردنظر از ماتریس A^2 باید به اندازه‌ی $\deg v_i$ عدد $1\times1=1$ را با هم جمع کنیم. □

۳ــ۳ــ تمرین‌ها

۱ــ گراف همبندی معرفی کنید که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن ۸ باشد.

۲ــ گراف همبندی معرفی کنید که حاصل‌ضرب مرتبه و اندازه‌ی آن ۲۰ باشد.

۳ــ فرض کنید ماکسیمم درجه‌ی یک درخت T برابر با k باشد. ثابت کنید که T دست‌کم k رأس از درجه‌ی یک دارد.

۴ــ گرافی از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۶ معرفی کنید که ۲ـ منتظم باشد.

۵ــ تمام درخت‌های از مرتبه‌ی ۶ را رسم کنید.

۶ــ دو ماتریس M_1 و M_2 به صورت زیر داده شده‌اند.

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

آن را که معرف یک گراف است مشخص کنید و نمودار آن را بکشید.

۷ــ اگر ماتریس مجاورت گراف K_p ، $p \in \mathbb{N}$ ، را با M نمایش دهیم نشان دهید هر درایه‌ی واقع بر روی قطراصلی ماتریس M^2 برابر با $p-1$ است.

۸ــ الف) قضیه‌ی ۱ را با استفاده از استقراء روی مرتبه‌ی یک درخت و با به کار بردن قضیه‌ی ۲ ثابت کنید.

ب) اثباتی را که در متن برای قضیه‌ی ۱ ارائه شده است با اثباتی که طبق بند (الف) این تمرین به‌دست می‌آید مقایسه کنید وبا ذکر دلیل به پرسش‌های زیر پاسخ دهید :

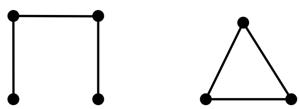
ــ کدام اثبات شهودی‌تر است؟

ــ کدام اثبات «دقیق‌تر» است؟

ــ کدام اثبات را بیشتر می‌پسندید؟

۹ــ الف) در شکل زیر یک گراف ناهمبند G رسم شده است. رأس‌های G را با v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 ، v_6 و v_7 چنان برچسب بزنید که ناهمبند بودن G از ماتریس مجاورت آن آشکار باشد.

G :



ب) اگر این فکر را در مورد یک گراف ناهمبند و دلخواه G به کار بریم ماتریس مجاورتش چه صورتی خواهد داشت؟

۱۰ــ الف) با توجه به تعریف ماتریس مجاورت گراف (ساده) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار را تعریف کنید.

ب) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار شکل ۴ از فصل ۱ را بنویسید.

۱۱ــ گراف همبند G داده شده است. اگر $u, v \in V(G)$ فاصله‌ی u از v در G که با $d(u, v)$ نمایش داده می‌شود برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v در G. نشان دهید :

الف) $d(u, v) = 0$ اگر و تنها اگر $u = v$.

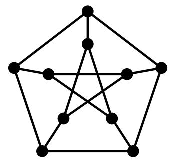
ب) به ازای هر $u, v \in V(G)$ داریم $d(u, v) = d(v, u)$.

پ) به ازای هر $u, v, w \in V(G)$ داریم $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

۱۲ــ گراف زیر موسوم به **گراف پِتِرسِن** را در نظر بگیرید.

الف) در این گراف دوری مشخص کنید که طول آن هر یک از اعداد ۵، ۶، ۸، و ۹ باشد.

ب) آیا این گراف هَمیلتِنی است؟ چرا؟



مراجع

1 ــ M.Behzad, G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, Wadsworth International Group, Belmont, Galif. 1979.

2 ــ O. Ore, and R. J. Wilson, Graphs and their Uses, The Mathematical Association of America, 1990.[1]

۱ــ مرکز نشر دانشگاهی ترجمه‌ی فارسی این مرجع را منتشر خواهد کرد.