



## فصل

## چند ویژگی ساده و چند رده‌ی خاص گراف‌ها

در این فصل ابتدا چند ویژگی ساده از گراف‌ها را ذکر می‌کنیم و سپس برای آشنایی بیشتر با گراف‌ها به معرفی چند رده‌ی خاص از آن‌ها می‌پردازیم و باز هم می‌کوشیم به‌طور شهودی مفاهیم را روشن کنیم.

## ۲-۱- مرتبه، اندازه و درجه

می‌دانیم که اگر مجموعه‌ای  $p$ ،  $p \in \mathbb{N}$ ، عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن  $p(p-1)/2$  است که با  $\binom{p}{2}$  نمایش داده می‌شود. بنابراین اگر گرافی  $p$  رأس و  $q$  یال داشته باشد داریم:

$$0 \leq q \leq \binom{p}{2} = p(p-1)/2$$

**تعریف:** در هر گراف  $G = (V, E)$  تعداد اعضای مجموعه‌ی  $V$  را مرتبه‌ی  $G$  و تعداد اعضای مجموعه‌ی  $E$  را اندازه‌ی  $G$  می‌نامیم و معمولاً آن‌ها را، به ترتیب، با  $p$  و  $q$  نمایش می‌دهیم. مرتبه‌ی  $G$  را با  $p(G)$  و اندازه‌ی آن را با  $q(G)$  هم نمایش می‌دهیم.

**مثال ۱:** مرتبه‌ی گراف شکل ۲ از فصل ۱ پنج و اندازه‌ی آن هفت است. مرتبه‌ی گراف مربوط به مثلاً بوتان (شکل ۵ از فصل ۱) ۱۴ و اندازه‌ی آن ۱۳ است. توجه کنید که در مورد سایر گراف‌های این شکل نیز رابطه‌ی  $p = q + 1$  برقرار است.

Δ

**تعریف:** درجه‌ی رأس  $v$  از گراف  $G$  برابر با تعداد یال‌هایی از  $G$  است که از رأس  $v$  می‌گذرند. این عدد را با  $\deg_G v$  و گاهی به‌طور ساده با  $\deg v$  نمایش می‌دهیم. اگر  $\deg v$  یک عدد فرد باشد  $v$  را یک رأس فرد و اگر یک عدد زوج باشد  $v$  را یک رأس زوج از گراف  $G$  می‌نامیم.

**مثال ۲:** در شکل ۲ از فصل ۱ داریم:  $\deg a = 3$  و  $\deg b = 2$ . این گراف چهار رأس فرد و یک رأس زوج دارد. در شکل ۶ از فصل ۱ داریم:  $\deg a_1 = 1$  و  $\deg a_3 = 5$ . این گراف شش رأس فرد و سه رأس زوج دارد. توجه کنید که در هر دو مثال مجموع درجه‌های تمام رأس‌ها یک عدد زوج است. در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم این مطلب همواره درست است.  $\Delta$

**قضیه‌ی ۱:** اگر  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  مجموعه‌ی رأس‌های گراف  $G$  با اندازه‌ی  $q$  باشد، آن‌گاه  $\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$ .

**اثبات:** هر یال تنها دو سر دارد، یعنی دقیقاً از دو رأس  $G$  می‌گذرد و لذا در طرف چپ فرمول بالا هر یال دو بار به حساب می‌آید.  $\square$

توجه کنید درجه‌ی هر رأس گرافی که اصلاً یال نداشته باشد صفر است. لذا، در این حالت هر دو طرف برابری مذکور در قضیه‌ی ۱ صفر به حساب می‌آیند.

**نتیجه:** تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است.

**اثبات:** مجموع جمع‌وندهای (یعنی مجموع عامل‌های) زوج عبارت  $\sum_{i=1}^p \deg v_i$  را با  $A$  و مجموع جمع‌وندهای فرد آن را با  $B$  نمایش می‌دهیم. پس داریم  $\sum_{i=1}^p \deg v_i = A + B$ . عدد  $2q = \sum_{i=1}^p \deg v_i$  زوج است، زیرا مجموع هر تعداد عدد زوج همواره زوج است. در نتیجه  $B = 2q - A$  نیز زوج است. بنابراین تعداد جمع‌وندهای  $B$ ، یعنی تعداد رأس‌های فرد گراف، باید زوج باشد.  $\square$

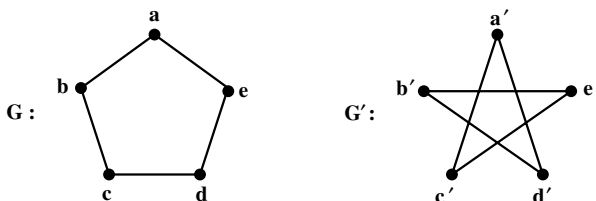
**تعریف:** بزرگترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف  $G$  را **ماکسیمم درجه‌ی**  $G$  می‌نامیم و آن را با  $\Delta(G)$  یا به‌طور ساده با  $\Delta$  نمایش می‌دهیم. کوچکترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف  $G$  را **مینیمم درجه‌ی**  $G$  می‌نامیم و آن را با  $\delta(G)$  یا به‌طور ساده با  $\delta$  نمایش می‌دهیم.

**مثال ۳:** در شکل ۶ از فصل ۱ داریم:  $\Delta = 5$  و  $\delta = 1$ . در تمام گراف‌های مربوط به هیدروکربن‌ها  $\Delta = 4$  و  $\delta = 1$ .  $\Delta$

## ۲-۲- گراف‌های منتظم، کامل و تهی

**تعریف:** عدد صحیح و نامنفی  $r$  داده شده است. گراف  $G$  از مرتبه‌ی  $p$  را  $r$  - منتظم می‌نامیم هرگاه درجه‌ی هر رأس  $G$  برابر با  $r$  باشد، هر گراف  $(p-1)$  - منتظم از مرتبه‌ی  $p$  را گراف کامل هم می‌نامیم و آن را با  $K_p$  نمایش می‌دهیم.

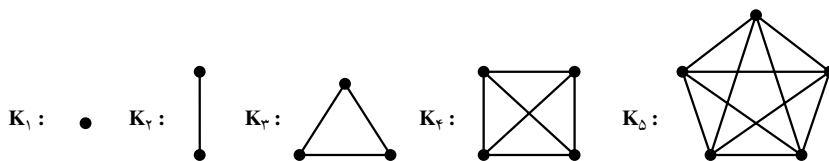
**مثال ۴:** هر یک از دو گراف شکل ۱، دو - منتظم است ولی چون در این دو مثال  $p=5$  و  $p-1=4 \neq 2$  این دو گراف کامل نیستند. توجه کنید که در گراف کامل  $G$  از مرتبه‌ی  $p$  درجه‌ی هر رأس  $p-1$  است و لذا به‌ازای هر  $u, v \in V(G)$ ،  $u \neq v$  داریم  $uv \in E(G)$ .



شکل ۱- گراف‌های ۲-منتظم

Δ

**مثال ۵:** در شکل زیر پنج گراف کامل  $K_p$ ،  $1 \leq p \leq 5$ ، رسم شده‌اند. در مورد هر یک از این مثال‌ها دیده می‌شود که تعداد یال‌های  $K_p$  برابر با  $p(p-1)/2$  است.



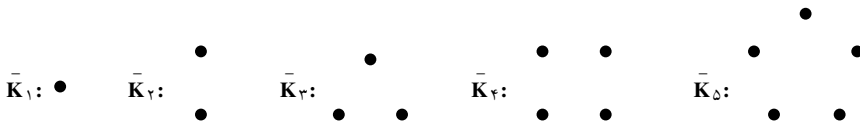
شکل ۲- گراف‌های کامل از مرتبه‌های ۱ تا ۵

Δ

**قضیه‌ی ۲:** تعداد یال‌های گراف کامل  $K_p$ ،  $p \in \mathbb{N}$  برابر با  $p(p-1)/2$  است.  
**اثبات:** مجموع درجه‌های رأس‌های گراف  $K_p$  برابر با  $p(p-1)$  است. پس، بنابر قضیه‌ی ۱، نصف این عدد برابر با  $q(K_p)$  است.

□

قرارداد: گراف  $\circ$  - منتظم از مرتبه  $p$  را با  $\bar{K}_p$  نمایش می دهیم. چون  $\bar{K}_p$  هیچ یال ندارد، یعنی  $E(\bar{K}_p) = \emptyset$ ، این گراف را گراف تهی هم می نامیم. گراف های تهی با  $p$  رأس،  $1 \leq p \leq 5$ ، را در شکل ۳ می بینید.



شکل ۳- گراف های تهی از مرتبه های ۱ تا ۵

### ۳-۲- مسیر گراف و دورگراف

تعریف: اگر  $u$  و  $v$  دو رأس متفاوت از گراف دلخواه  $G$  باشند، یک مسیر از  $u$  به  $v$  از گراف  $G$  دنباله ای متشکل از  $m+1$ ،  $m \in \mathbb{N}$ ، رأس دو به دو متفاوت  $G$  است که از  $u$  آغاز و به  $v$  ختم می شود و هر دو رأس متوالی این دنباله در  $G$  مجاورند. عدد  $m$  را طول این مسیر از گراف  $G$  می نامیم. می پذیریم که دنباله ای متشکل از تنها یک رأس  $v$  یک مسیر با طول صفر از  $v$  به  $v$  از گراف  $G$  باشد.

در واقع یک مسیر از رأس  $u$  به رأس  $v$  از گراف  $G$  را به این ترتیب به دست می آوریم که با در نظر گرفتن نموداری از  $G$  ابتدا  $u$  را یادداشت می کنیم؛ از یک یال مار ب  $u$  (در صورت وجود) می گذریم و الزاماً به رأسی تازه می رسیم و آن را به عنوان دومین عضو دنباله یادداشت می کنیم. از آن جا یالی تازه از  $G$  را برمی گزینیم و از آن به رأس سوم می رسیم که آن را نیز یادداشت می کنیم و این عمل را ادامه می دهیم تا در صورت امکان پس از گذشتن از  $m$  یال دوبه دو متفاوت،  $m \geq 0$ ، به  $v$  برسیم. در پایان  $v$  را نیز یادداشت می کنیم. رأس هایی را که یادداشت کرده ایم دنباله ای است که یک مسیر از  $u$  به  $v$  از گراف  $G$  را به دست می دهد.

مثال ۶: در شکل ۲ از فصل ۱ از  $a$  به  $b$  پنج مسیر وجود دارند. در این گراف مثلاً

$$a,b \quad a,c,d,b \quad a,c,e,d,b$$

سه مسیر متفاوت با طول، به ترتیب از چپ به راست، ۱، ۳، و ۴ از رأس  $a$  به رأس  $b$  هستند.

(دو مسیر دیگر از  $a$  به  $b$  را بنویسید و طول آن ها را مشخص کنید.)  $\Delta$

واضح است که اگر در گرافی از  $u$  به  $v$  مسیری وجود داشته باشد در آن گراف از رأس  $v$  به  $u$  هم مسیری وجود دارد. لذا وجود یا عدم وجود مسیر «بین» دو رأس گراف معنی دارد.

**تعریف:** گراف  $G$  را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد. در غیر این صورت  $G$  را ناهمبند می‌نامیم.

**مثال ۷:** گراف شکل ۲ از فصل ۱ همبند است. ولی گراف شکل ۳ از فصل ۱ و گراف تهی  $\bar{K}_p$ ،  $p \geq 2$ ، همبند نیستند. البته  $\bar{K}_1$  نیز همبند است. به مثال ۷ از فصل ۱ بازگردید. گفتیم که این گراف از سه «بخش جدا از هم» تشکیل شده است. این گراف ناهمبند است زیرا مثلاً بین دو رأس  $v_1$  و  $v_4$  مسیری وجود ندارد.

**تعریف:** یک دور از گراف  $G$  دنباله‌ای چون  $v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1} = v_1$  باشد شرط  $m \geq 3$  متشکل از  $m+1$  رأس  $G$  است که در آن  $v_i$  ها،  $1 \leq i \leq m$ ، دوه‌دو متمایزند و هر دو رأس متوالی این دنباله در  $G$  مجاورند. عدد  $m$  را طول این دور از گراف  $G$  می‌نامند.

**مثال ۸:** هیچ یک از گراف‌های شکل ۵ از فصل ۱ دور ندارد. همچنین گراف تهی  $\bar{K}_p$  دور ندارد. ولی به‌ازای هر  $p \geq 3$  گراف کامل  $K_p$  دور دارد. در واقع، به‌ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $3 \leq n \leq p$ ، گراف  $K_p$  دوری به طول  $n$  دارد. گراف شکل ۶ از فصل ۱ دوری ندارد که طولش فرد باشد ولی دوری به طول ۴ (دنباله‌ی  $b_2, a_3, b_3, a_4, b_4$ ) و دوری به طول ۶ (دنباله‌ی  $b_1, a_4, b_3, a_4, b_2, a_3, b_1$ ) دارد.

## ۲-۴- تمرین‌ها

۱- فرض کنید گراف  $G$ ،  $3 -$  منتظم است و داریم  $q = 2p - 3$ . مرتبه‌ی  $G$  با  $p$  و اندازه‌ی آن با  $q$  نمایش داده شده است.

الف) ویژگی‌های گراف  $G$  را مشخص کنید.

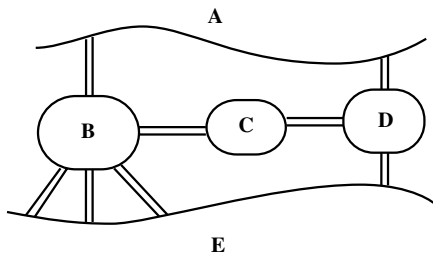
ب) گرافی رسم کنید که این ویژگی‌ها را داشته باشد.

پ) گراف دیگری رسم کنید که واجد این ویژگی‌ها باشد.

۲- الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ را در نظر بگیرید و پارامترهای  $p$ ،  $q$ ،  $\Delta$  و  $\delta$  را بیابید. ب) درجه‌های تمام رأس‌های این گراف را به صورت دنباله‌ای چون  $s: d_1, d_2, \dots, d_n$  بنویسید که به‌ازای هر  $1 \leq i \leq n$  داشته باشیم  $d_{i+1} \leq d_i$ . (دنباله‌ی حاصل را دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های

### گراف می‌نامیم.

- (پ) چرا گرافی وجود ندارد که  $S: 5, 3, 3, 1, 0$  دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های آن باشد؟
- ۳- الف) گرافی ارائه کنید که دنباله‌ی درجه‌های رأس‌هایش  $S: 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 0, 0, 0$  باشد.
- (ب) آیا پاسخ یکتاست؟ چرا؟
- ۴- چند گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۱۵ وجود دارند؟ چرا؟
- ۵- با استقرار بر  $q$  قضیه‌ی ۱ را اثبات کنید.
- ۶- گرافی ناهمبند و ۳- منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.
- ۷- گرافی همبند و ۳- منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.
- ۸- فرض کنید طبق شکل، شهری از یک رودخانه و پنج منطقه‌ی  $A, B, C, D, E$  تشکیل شده است و این منطقه‌ها با هشت پل به هم راه دارند.



- الف) گراف چندگانه‌ی مربوط به این شهر را رسم کنید.
- (ب) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه و عبور از پل‌ها می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت و به منطقه‌ی آغاز بازگشت؟
- (پ) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت؟ در این حالت لازم نیست منطقه‌ی آغاز گشت با منطقه‌ی پایان آن یکی باشد.
- ۹- در گراف کامل  $K_p$ ،  $2 \leq p \leq 4$ ، تعداد مسیرهای «متفاوت» از یک رأس  $u$  به یک رأس  $v$ ،  $u \neq v$ ، را بیابید.

- ۱۰- الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ «چند» دور دارد؟ (پاسخ ۳ است: دو دور از مرتبه‌ی ۴ و یک دور از مرتبه‌ی ۶. پاسخ را توجیه کنید.)
- (ب) هر یک از دورها را به صورت دنباله‌ای از رأس‌ها نمایش دهید که رأس اول و آخر دنباله مثل هم و بقیه همراه با این رأس مشترک دو به دو متفاوت باشند؛ به علاوه، هر دو رأس متوالی این

دنباله در  $G$  مجاور باشند.

راهنمایی. یکی از دورهای  $G$  را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نوشت :

$$\begin{array}{ll} b_1, a_2, b_3, a_3, b_1 & b_1, a_3, b_3, a_2, b_1 \\ a_2, b_3, a_3, b_1, a_2 & a_2, b_1, a_3, b_3, a_2 \\ b_3, a_3, b_1, a_2, b_3 & b_3, a_2, b_1, a_3, b_3 \\ a_3, b_1, a_2, b_3, a_3 & a_3, b_3, a_2, b_1, a_3 \end{array}$$

۱۱- هفده نفر به سفر می‌روند و قبل از سفر قرار می‌گذارند هر کس به پنج نفر دیگر نامه بفرستد. آیا امکان دارد هر کس به آن پنج نفری نامه بفرستد که از آن‌ها نامه دریافت می‌کند؟ چرا؟

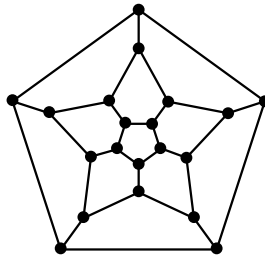
۱۲- اگر گراف  $G$  از مرتبه‌ی  $p$ ،  $p \geq 3$ ، دوری از مرتبه‌ی  $p$  داشته باشد، آن‌گاه  $G$  را گراف

همیلتنی می‌نامیم. مثلاً هر  $K_p$ ،  $p \geq 3$ ، گراف همیلتنی است.

(الف) نشان دهید هر گراف همیلتنی همبند است.

(ب) اگر  $G$  همیلتنی باشد آن‌گاه به ازای هر  $v \in V(G)$  داریم  $\deg v \geq 2$ .

(پ) آیا گراف زیر گراف همیلتنی است و چرا؟



۱۳- (الف) گراف  $G$  داده شده است. فرض کنید  $u, v \in V(G)$  نشان دهید «وجود یک مسیر

از  $u$  به  $v$ » یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر مجموعه‌ی  $V(G)$  است.

(ب) اگر  $G$  گراف شکل ۳ از فصل ۱ باشد، افرازهای حاصل از رابطه‌ی هم‌ارزی مذکور در

بند (الف) را بیابید.

(پ) پاسخ بند (ب) را با فرض این‌که  $G$  گراف شکل ۶ یا گراف شکل ۱۰ باشد بیابید.