

## هندسه و استدلال

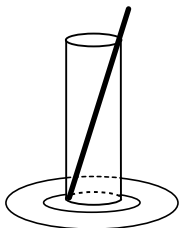


### ۱-۱- کشف اطلاعات از طریق مشاهده

تاکنون با بسیاری از مفاهیم هندسی از طریق مشاهده آشنا شده‌اید. گردی توپ‌ها، چرخ‌ها و سکه‌ها را دیده‌اید. کتاب‌های مستطیل شکل را خوانده‌اید. از قیف‌های مخروطی شکل بستنی خورده‌اید و احتمالاً شکل‌های زیبای دانه‌های برف و ماریچ ظریف چندضلعی گونه‌ی تار عنکبوت و کندوی زنبور عسل شما را به شگفتی واداشته‌اند! این گونه مشاهدات، فرصت‌های مناسبی برای درک

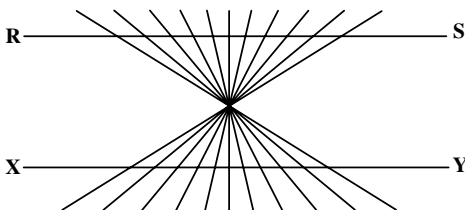
مفاهیم هندسی از قبیل شکل و اندازه را به وجود می‌آورند. با این حال، مشاهدات ما صددرصد قابل اطمینان نیستند و گاهی ما را به نتایج نادرست هدایت می‌کنند.

**مثال ۱:** در شکل ۱، قطر بشقاب بیشتر است یا بلندی لیوان؟



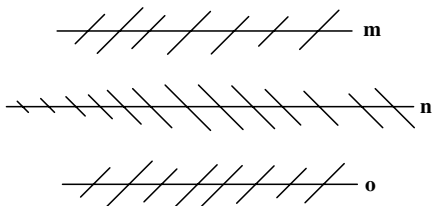
شکل ۱

**مثال ۲:** آیا  $XY$  و  $RS$  خط‌های راست هستند؟



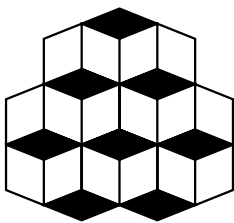
شکل ۲

**مثال ۳:** آیا خط‌های  $m$ ،  $n$  و  $o$  موازی هستند؟



شکل ۳

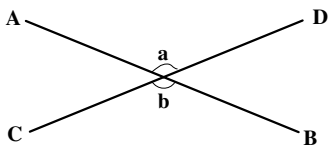
**مثال ۴:** شش بلوک در شکل وجود دارد یا هفت بلوک؟



شکل ۴

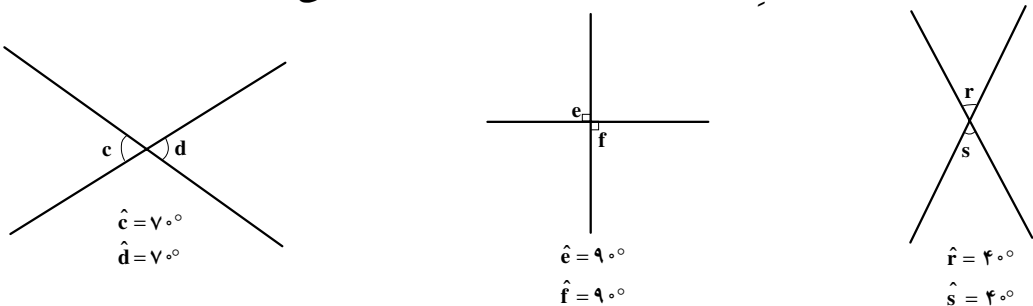
## ۱-۲- کشف اطلاعات از طریق تجربه

سارا هنگام نگاه کردن به خط‌های متقاطع شکل (۵)، به نظرش رسید که زاویه  $a$  با زاویه  $b$  برابر است. برای اطمینان، با استفاده از یک نقاله آن دو زاویه را اندازه‌گیری کرد و دریافت که هریک از آن‌ها تقریباً  $130^\circ$  هستند. آن‌گاه در فکر فرورفت که آیا زاویه‌های متقابل به رأس همیشه مساوی



شکل ۵

هستند؟ او چند جفت خطوط متقاطع مانند شکل‌های صفحه‌ی بعد رسم کرد و مجدداً یک جفت از زاویه‌های متقابل به رأس هریک از آن‌ها را اندازه‌گیری کرد، سپس نتایج را یادداشت نمود.



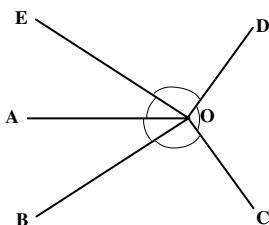
شکل ۶

او بعد از این که این آزمایش را چندین بار تکرار کرد، با توجه به نتایج به دست آمده پیش‌بینی کرد که وقتی دو خط یکدیگر را قطع کنند، احتمالاً زاویه‌های متقابل به رأس پدید آمده همیشه مساوی یکدیگر خواهند بود. او به عنوان یک دانش‌آموز خوش‌فکر، کلمه‌ی «احتمالاً» را به کار برد، زیرا می‌دانست در هر اندازه‌گیری به دلایل مختلف از جمله لرزش دست و نوع ابزار، خطا وجود دارد. در نتیجه با اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر، ممکن است زاویه‌ها یک مقدار جزئی با یکدیگر تفاوت داشته باشند، همچنین می‌دانست که اگر زاویه‌های متقابل به رأسی پیدا شوند که مساوی یکدیگر نباشند، پیش‌بینی او رد خواهد شد (چرا؟).

به هر حال سارا آن‌قدر هوشیار بود که به نتایجی که هنوز تضمینی برای درستی آن‌ها وجود ندارد استناد نکند. اما احساس کرد که تجربه‌اش با ارزش است، زیرا ممکن است به کشف یک نتیجه‌ی مهم هندسی بیانجامد.

فعالیت ۱-۱ به شما این فرصت را می‌دهد تا فرآیند تجربه‌ی سارا، یعنی جمع‌آوری اطلاعات از طریق مشاهده و اندازه‌گیری را در موارد مختلف تکرار کنید.

## فعالیت ۱-۱



۱. الف) اندازه‌ی زاویه‌های  $\hat{D}O\hat{E}$ ،  $\hat{C}O\hat{D}$ ،  $\hat{B}O\hat{C}$ ،  $\hat{A}O\hat{B}$

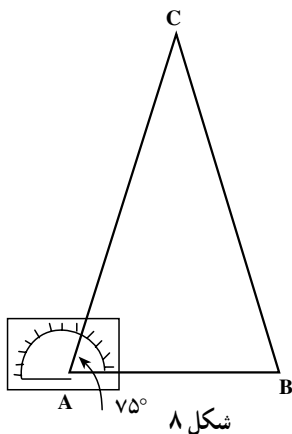
و  $\hat{E}O\hat{A}$  را برحسب درجه به دست آورید. مجموع همه‌ی زاویه‌های

بالا که دورتا دور O هستند، چند درجه است؟

ب) نقطه‌ی دیگری مانند  $O'$  در صفحه در نظر بگیرید و زاویه‌های  $\hat{A}O'B$ ،  $\hat{B}O'C$ ،  $\hat{C}O'E$  و  $\hat{E}O'A$  را با اندازه‌ای دلخواه به رأس  $O'$  رسم کنید. سپس زاویه‌ها را اندازه گرفته و نتایج را باهم جمع کنید.

پ) از قسمت‌های (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای را می‌توانید پیش‌بینی کنید؟

۲. چند مثلث رسم کنید. مجموع زاویه‌های هریک از مثلث‌ها را بیابید. حدس شما در مورد مجموع زاویه‌های هر مثلث دیگری غیر از این مثلث‌ها چیست؟  
 ۳. الف) با استفاده از نقاله، مثلثی رسم کنید که دو زاویه  $75^\circ$  داشته باشد. طول ضلع‌های آن را اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.



ب) مثلث دیگری رسم کنید که دو زاویه  $4^\circ$  داشته باشد. ضلع‌های آن را اندازه بگیرید و بازهم نتیجه را یادداشت کنید.  
 پ) چند مثلث دیگر رسم کنید که هریک از آن‌ها دو زاویه‌ی مساوی داشته باشند. ضلع‌های آن‌ها را نیز اندازه بگیرید. با توجه به نتایجی که به‌دست آوردید، آیا می‌توانید یک نتیجه‌گیری کلی را پیش‌بینی کنید؟

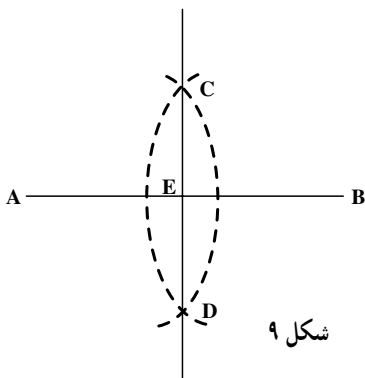
۴. روی یک صفحه‌ی کاغذ، سه نقطه‌ی غیر واقع در یک

امتداد قرار دهید و آن‌ها را به ترتیب  $A$ ،  $B$  و  $C$  بنامید.  $AB$  و  $AC$  را رسم کنید. طول سه پاره‌خط را اندازه گرفته، مجموع دو ضلع کوتاه‌تر را به‌دست آورید. آیا این مجموع بیشتر از طول پاره‌خط بزرگ‌تر است؟ این آزمایش را برای نقطه‌های دیگری تکرار کنید و هر بار نتایج به‌دست آمده را یادداشت کنید. اگر برای هزار مثلث به‌نتیجه مشابه برسید آیا می‌توانید با اطمینان بگویید که این

نتیجه‌گیری کلی برای همه‌ی مثلث‌ها درست است؟

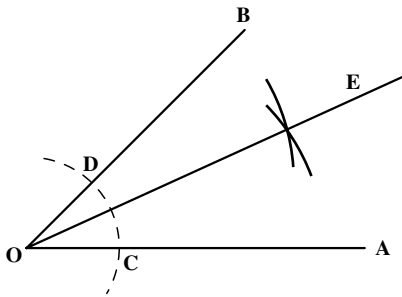
۵. الف) پاره‌خط  $AB$  را رسم کنید.

ب) سوزن پرگار خود را در نقطه‌ی  $A$  قرار دهید و کماتی به شعاع بیش از نصف طول  $AB$ ، چنان که در شکل ۹ نشان داده شده رسم کنید.



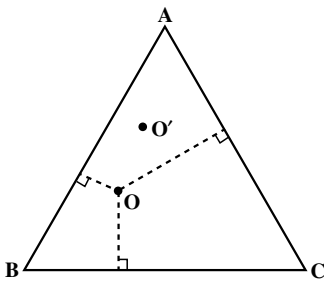
پ) به مرکز B و به همان شعاع کمان دیگری رسم کنید که کمان اول را در نقاط C و D قطع کند.

ت) با استفاده از خط کش خط CD را رسم کنید و محل برخورد CD و AB را E بنامید.  
 ث) طول‌های AE و BE را با خط کش اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.  
 ج) زاویه‌های AEC و BEC را با نقاله اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.  
 چ) پاره‌خط‌های دیگری رسم کنید و مراحل (ب) تا (ج) را در مورد آن‌ها انجام دهید. سپس نتایج به دست آمده در هر مورد را با نتیجه‌ی قبلی مقایسه کنید. آیا نتایج به دست آمده دارای الگوی منظمی هستند؟



شکل ۱۰

۶. زاویه‌ی AOB را مانند شکل ۱۰ رسم کنید. به مرکز O کمانی رسم کنید تا OB را در D و OA را در C قطع کند. به مراکز C و D کمان‌هایی با شعاع‌های مساوی رسم کنید تا یکدیگر را در E قطع کنند. OE را رسم کنید. چه مطلبی در مورد  $\hat{EOB}$  و  $\hat{AOE}$  درست به نظر می‌رسد؟ نتیجه خود را با اندازه‌گیری زاویه‌ها به وسیله‌ی نقاله امتحان کنید. این تجربه را با زاویه‌هایی با اندازه‌های مختلف تکرار کنید.

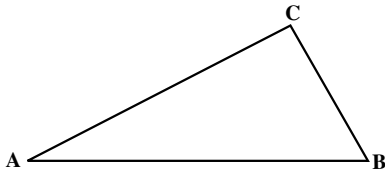


شکل ۱۱

۷. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنید. نقطه‌ی دلخواه O را درون مثلث اختیار کنید. سپس فاصله‌ی نقطه‌ی O را تا سه ضلع مثلث به دست آورده، مجموع این فاصله‌ها را محاسبه کنید. سه نقطه‌ی دیگر درون مثلث انتخاب کنید و مجموع فاصله‌های آن‌ها را نیز تا سه ضلع مثلث حساب کنید. آیا الگوی منظمی در نتایج به دست آمده دیده می‌شود؟ راجع به آن فکر کنید.

۸. مثلث ABC را چنان رسم کنید که در آن  $\hat{A}$  کوچکتر

از  $\hat{B}$  باشد. اضلاع BC و AC را اندازه بگیرید. کدام یک بزرگتر است؟ مثلث دیگری رسم کنید که در آن  $\hat{A}$  بزرگتر از  $\hat{B}$  باشد و تعیین کنید در آن AC بزرگتر است یا BC. چند مثلث دیگر رسم کنید



شکل ۱۲

که در آن‌ها  $\hat{A}$  بزرگتر از  $\hat{B}$  و یا برعکس،  $\hat{B}$  بزرگتر از  $\hat{A}$  باشد. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث پیش‌بینی می‌کنید؟

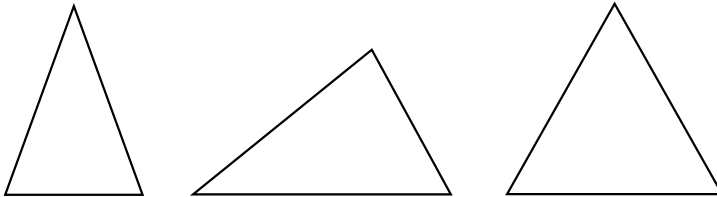
در فعالیت‌های بالا، با بررسی حالت‌های مختلف

چند نتیجه کلی را پیش‌بینی کردیم. چنین استدلالی،

استدلال استقرایی خوانده می‌شود. باید توجه داشته باشیم که این استدلال نتایجی را که از طریق آن به دست می‌آیند، اثبات نمی‌کند.

## فعالیت ۲-۱

۱. به کمک خط‌کش و پرگار عمود منصف ضلع‌های مثلث‌های زیر را رسم کنید (این رسم‌ها را در کتاب انجام دهید).



شکل ۱۳

۲. در هر یک از موارد فوق مشخص کنید نقطه‌ی برخورد عمود منصف‌ها نسبت به مثلث‌ها چه وضعی دارند؟

۳. مثلث دلخواه دیگری رسم کنید و بندهای ۱ و ۲ را در مورد آن تحقیق نمایید.

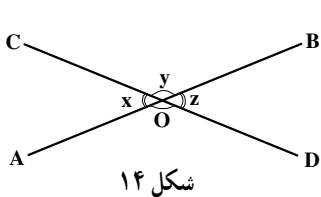
۴. با توجه به تجربیات فوق، به نظر شما محل برخورد عمود منصف‌های ضلع‌های یک مثلث نسبت به آن چه وضعی دارد؟

۵. مثلث ABC را چنان رسم کنید که  $AB = 6\text{cm}$ ،  $BC = 3\text{cm}$  و  $AC = 4\text{cm}$ . سپس

بندهای ۱ و ۲ را در مورد آن تکرار کنید. آیا نتیجه‌ی به دست آمده از این بند، نظر شما در بند ۴ را تأیید می‌کند؟

همان طور که در فعالیت های قبل مشاهده کردید، نتیجه ی به دست آمده از بررسی چند مورد، ممکن است در همه ی موارد برقرار نباشد. بنابراین از طریق استدلال استقرایی نمی توان نتایج قطعی به دست آورد. با این حال، فرآیند استدلال استقرایی با تقویت شهود و ارائه اطلاعات مفید ما را قادر می سازد حدس های احتمالاً درستی بزینم، ولی برای اطمینان از درستی حدس ها به روش های دیگری از استدلال نیاز داریم.

**مثال ۵:** سارا با جمع آوری اطلاعات از طریق مشاهدات و اندازه گیری های خود، یعنی به کمک استدلال استقرایی پیش بینی کرد که هر دو زاویه ی متقابل به رأس برابرند. اما او نمی توانست برای نشان دادن درستی پیش بینی خود هر دو خط متقاطع ممکن را رسم کند و در نتیجه نمی توانست با اطمینان بگوید که پیش بینی او در همه ی موارد دیگر نیز درست است. پس او سعی کرد با استناد به حقایقی که درستی آن ها را پذیرفته بود، نشان دهد که پیش بینی او همواره درست است. یعنی زاویه های متقابل به رأس در هر دو خط متقاطع باهم برابرند.



شکل ۱۴

استدلال سارا: شکل ۱۴ دو خط متقاطع دلخواه را

نشان می دهد.

چون  $\hat{A}OB$  یک زاویه ی نیم صفحه است.

$$x + y = 180^\circ \quad (1)$$

چون  $\hat{C}OD$  یک زاویه ی نیم صفحه است

$$y + z = 180^\circ \quad (2)$$

از مقایسه تساوی های (۱) و (۲) داریم

$$x + y = y + z \quad (3)$$

$$x = z$$

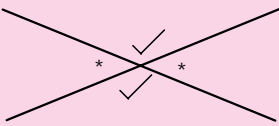
در نتیجه :

$$\hat{A}OC = \hat{D}OB, \text{ به طریق مشابه, } \hat{C}OB = \hat{A}OD.$$

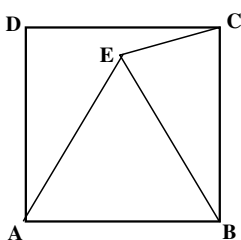
استدلال ارائه شده در مثال بالا، نمونه ای از استدلال استنتاجی است.

استدلال استنتاجی روش نتیجه گیری کلی بر مبنای حقایقی است که درستی آن ها را پذیرفته ایم.

نتایج مهم و مفیدی که از استدلال استنتاجی به دست می آید قضیه نامیده می شوند.



**قضیه ۱: زاویه‌های متقابل به رأس**  
زاویه‌های متقابل به رأس در هر دو خط  
مقاطع با یکدیگر مساویند.



شکل ۱۵

**مثال ۶:** چهارضلعی ABCD یک مربع و ABE یک مثلث متساوی الاضلاع است (شکل ۱۵). نشان دهید که مثلث BCE متساوی الساقین است.

حل: چون چهارضلعی ABCD، مربع است

$$AB = CB \quad (۱)$$

چون مثلث ABE متساوی الاضلاع است

$$AB = EB \quad (۲)$$

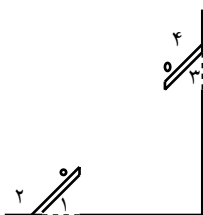
از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود

$$CB = EB$$

بنابراین، مثلث BCE متساوی الساقین است.

**مثال ۷:** داخل اتاقی دو در وجود دارد که هر دوی

آنها به یک اندازه باز شده اند (شکل ۱۶)، یعنی  $\hat{۱} = \hat{۳}$ . می خواهیم با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهیم که  $\hat{۲} = \hat{۴}$ .



شکل ۱۶

حل: چون  $\hat{۱}$  و  $\hat{۲}$  مکمل یکدیگر هستند

$$\hat{۱} + \hat{۲} = ۱۸۰^\circ \quad (۱)$$

$$\hat{۲} = ۱۸۰^\circ - \hat{۱}$$



چون  $\hat{3}$  و  $\hat{4}$  مکمل یکدیگر هستند

$$\hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$$

$$\hat{4} = 180^\circ - \hat{3}$$

(۲)

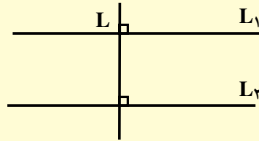
چون  $\hat{1} = \hat{3}$ ، از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که عبارت‌های سمت راست مساوی

یکدیگرند. بنابراین  $\hat{2} = \hat{4}$ .

**قضیه‌ی ۲: دو زاویه‌ی مکمل**  
 اگر دو زاویه مساوی باشند، مکمل‌های آن‌ها نیز با یکدیگر مساویند.  $\hat{1} = \hat{2}$

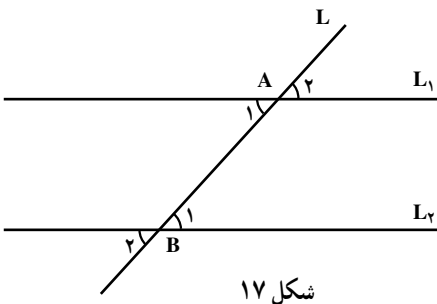
یکی از حقایقی که در ریاضیات دوره‌ی راهنمایی با آن آشنا شدیم. به صورت زیر است:

اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری هم عمود است.



به عنوان مثال، اگر دو خط  $L_1$  و  $L_2$  باهم موازی باشند و خط  $L$  بر  $L_1$  عمود باشد، بر  $L_2$  هم عمود خواهد بود. در این حالت زاویه‌ی قائمه پدید می‌آید که همه‌با هم برابرند.

این یکی از حقایقی است که درستی آن را پذیرفته‌ایم، اما اگر خطی دو خط موازی را طوری قطع کند که بر آن‌ها عمود نباشد، زاویه‌های پدید آمده چگونه‌اند؟



در شکل روبرو دو خط  $L_1$  و  $L_2$ ، باهم موازی‌اند و خط  $L$  این دو خط را در نقطه‌های  $A$  و  $B$  قطع کرده است. در سال‌های قبل با استفاده از همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه و حقیقی که در بالا بدون اثبات پذیرفته‌ایم، ثابت کردیم که  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$  است.

### قضیه ۳: خطوط موازی

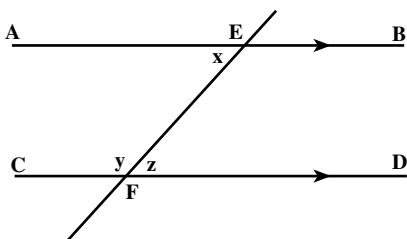
اگر خط  $L$  دو خط  $L_1$  و  $L_2$  را قطع کند و زاویه‌های  $\hat{A}_1$  و  $\hat{B}_1$  را پدید آورد (شکل ۱۷):

الف) اگر  $L_1$  و  $L_2$  باهم موازی باشند، آن‌گاه  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$  است.

ب) اگر  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$  باشد، آن‌گاه  $L_1$  و  $L_2$  باهم موازی‌اند.

تمرین. اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، آیا دیگری را هم قطع خواهد کرد؟ چرا؟  
**مثال ۸:** با توجه به قضیه فوق، نشان دهید که مجموع اندازه‌های دو زاویه‌ی  $AEF$  و  $CFE$

یعنی  $x$  و  $y$  برابر  $180^\circ$  است.



حل: چون  $\hat{CFD}$  نیم‌صفحه است، پس

$$y + z = 180^\circ$$

هم‌چنین بنا بر قضیه خطوط موازی،

$$x = z$$

بنابراین:

$$y + x = 180^\circ$$

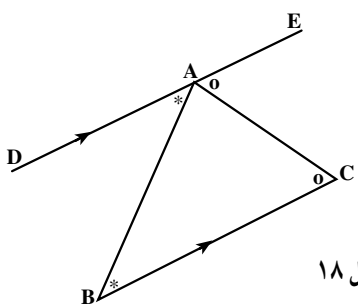
**مثال ۹:** با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی، نشان

دهید که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.

حل: مثلث دلخواه  $ABC$  را در نظر می‌گیریم (شکل

۱۸). از  $A$  خطی به موازات  $BC$  رسم می‌کنیم و آن را  $DE$

می‌نامیم. چون  $DE$  موازی  $BC$  است.



شکل ۱۸

$$\hat{EAC} = \hat{C} \quad (1)$$

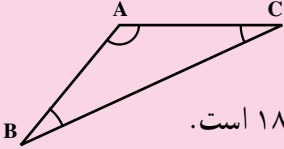
$$\hat{DAB} = \hat{B} \quad (2)$$

از طرف دیگر، چون  $\hat{DAE}$  یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است، بنابراین:

$$\hat{DAB} + \hat{BAC} + \hat{EAC} = 180^\circ$$

از روابط (۱) و (۲) مقدارهای مساوی  $\hat{EAC}$  و  $\hat{DAB}$  را جایگزین می‌کنیم، در نتیجه:

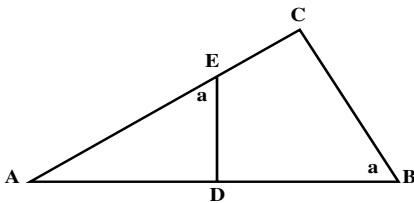
$$\hat{B} + \hat{BAC} + \hat{C} = 180^\circ$$



قضیه‌ی ۴: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی،  $180^\circ$  است.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

در این جا، با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی، نشان دادیم که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، صرف‌نظر از نوع آن  $180^\circ$  است. چنان‌که در بند ۲، فعالیت ۱-۱، اندازه‌ی زاویه‌های داخلی مثلث‌های متعددی را به دست آوردیم و با توجه به یکسان بودن نتایج به دست آمده، این نتیجه‌گیری کلی را پیش‌بینی کردیم.



شکل ۱۹

**مثال ۱۰:** در شکل ۱۹،  $\hat{AED} = \hat{ABC} = a$ .

با استفاده از قضیه فوق نشان دهید که،  $\hat{ADE} = \hat{ACB}$ .

حل: در مثلث ADE

$$\hat{A} + a + \hat{ADE} = 180^\circ \quad (1)$$

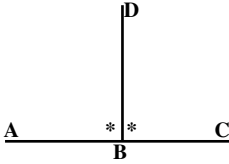
در مثلث ACB

$$\hat{A} + a + \hat{ACB} = 180^\circ \quad (2)$$

از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\hat{ADE} = \hat{ACB}$$

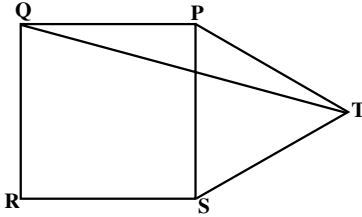
## مسائل



۱. از نقطه‌ی B روی خط AC پاره خط BD را

طوری رسم کرده‌ایم که  $\hat{ABD} = \hat{CBD}$ . چرا

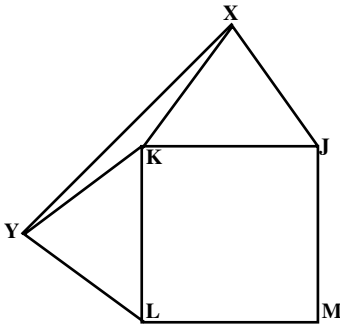
$\hat{ABD} = 90^\circ$ ؟



۲. PQRS یک مربع و PST یک مثلث

متساوی‌الاضلاع است. نشان دهید مثلث PQT

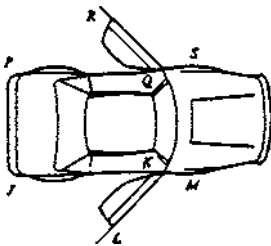
متساوی‌الساقین است؟



۳. JKLM یک مربع و مثلث‌های JXK و KYL

هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. نشان دهید مثلث KXY

متساوی‌الساقین است.



۴. با توجه به تصویر ماشین  $\hat{JKL} = \hat{PQR}$ ، چرا

$\hat{RQS} = \hat{LKM}$ ؟ دلیل خود را بنویسید. (دو طرف ماشین

را دو خط فرض کنید.)

۵. مجموع دو زاویه  $90^\circ$  است. مجموع مکمل‌های

آن‌ها چند درجه است؟

۶. دو زاویه مکمل یکدیگرند. در حالت‌های زیر،

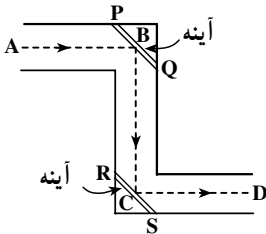
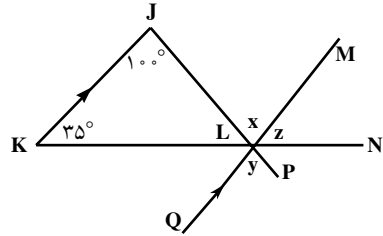
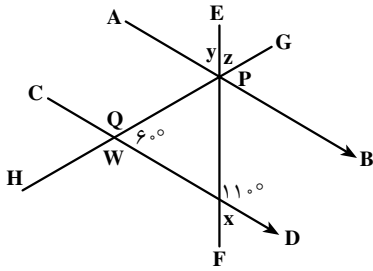
اندازه‌ی هریک را مشخص کنید.

الف) دو زاویه مساوی باشند.

ب) یک زاویه دو برابر دیگری باشد.

پ) یک زاویه  $\pi$  برابر دیگری باشد.

۷. اندازه‌ی زاویه‌هایی را که به وسیله‌ی حروف کوچک مشخص شده‌اند، پیدا کنید.



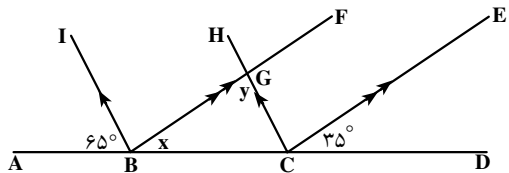
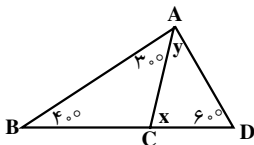
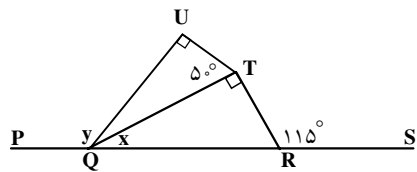
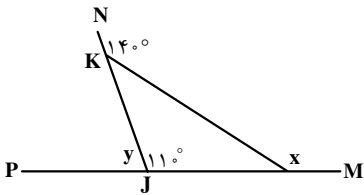
۸. در ساختمان پریسکوپ یک جفت آینه‌ی موازی وجود

دارد. به این ترتیب شعاع‌های نور که در بالا وارد پریسکوپ

می‌شوند، موازی شعاع‌های نوری هستند که در پایین از پریسکوپ

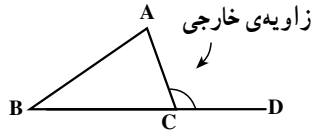
خارج می‌شوند. زاویه‌های مساوی در شکل را نام ببرید.

۹. در هر یک از شکل‌های زیر، مقادیر  $x$  و  $y$  را پیدا کنید.



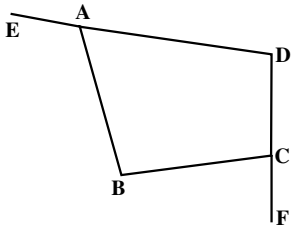
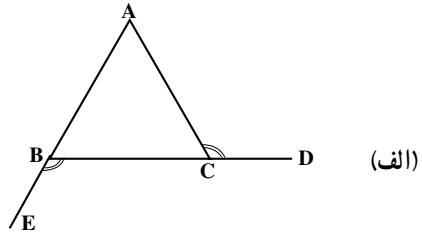
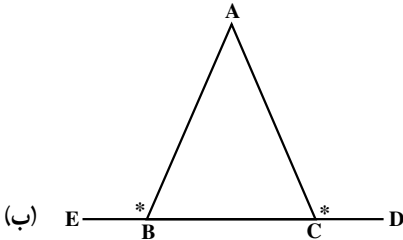
۱۰. نشان دهید که در مثلث دلخواه  $ABC$  ،

$$\hat{ACD} = \hat{A} + \hat{B}$$



(زاویه‌ای که از امتداد دادن یک ضلع تشکیل می‌شود، زاویه‌ی خارجی نامیده می‌شود.)

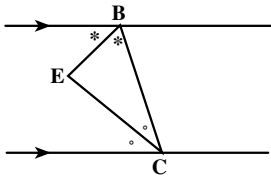
۱۱. با توجه به تساوی زاویه‌های مشخص شده در شکل زیر، علت تساوی  $\hat{ABC} = \hat{ACB}$  را توضیح دهید.



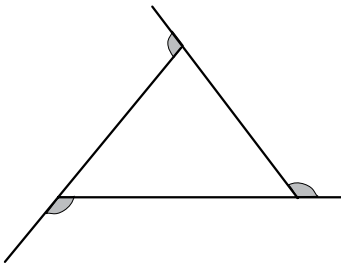
۱۲. با توجه به شکل مقابل درستی رابطه‌ی زیر را

نشان دهید.

$$\hat{EAB} + \hat{BCF} = \hat{B} + \hat{D}$$



۱۳. در شکل مقابل، ثابت کنید:  $\hat{E} = 90^\circ$



۱۴. مجموع زاویه‌های خارجی مثلث روبه‌رو را

بیابید. آیا این یافته در مورد مجموع زاویه‌های خارجی

هر مثلث درست است؟ جواب خود را با ذکر دلیل

بنویسید.

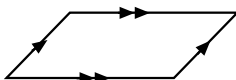
۱۵. تفاوت عمده میان استدلال استقرایی و استنتاجی را بنویسید و برای هر یک، مثالی بیاورید.

### ۱-۳- استدلال در هندسه

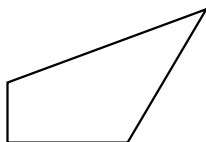
تعریف مربع را در نظر بگیرید، «مربع مستطیلی است که ضلع‌های آن با یکدیگر برابرند». لازمه‌ی فهمیدن این تعریف، دانستن معنای دقیق واژه‌های «مستطیل» و «ضلع» است. به این ترتیب برای تعریف مربع به تعریف‌های دیگری نیازمندیم. به عنوان مثال،



مستطیل متوازی‌الاضلاعی با چهار زاویه‌ی مساوی است.



متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که ضلع‌های مقابل آن موازی یکدیگرند.



چهارضلعی شکلی با چهارضلع است.

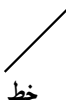


شکل یک ...

فرض کنید شکل را به عنوان مجموعه‌ی نقاط تعریف کنیم، چون هر تعریف شامل واژه‌هایی است که معنی آن‌ها باید دقیقاً روشن باشد، در نتیجه این سؤال پیش می‌آید که تعریف مجموعه و نقطه چیست؟ با ادامه‌ی این فرآیند به بن‌بست می‌رسیم؛ زیرا این عمل را نمی‌توان به‌طور نامحدود ادامه داد. علت این محدودیت آن است که همه‌ی واژه‌ها قابل تعریف نیستند. در نتیجه، برای رهایی از این بن‌بست، واژه‌ها و مفاهیمی چون شکل، مجموعه، نقطه و خط را با توجه به این که تعریف صریحی برای آن‌ها نداریم، به عنوان تعریف نشده‌ها می‌پذیریم.



شکل

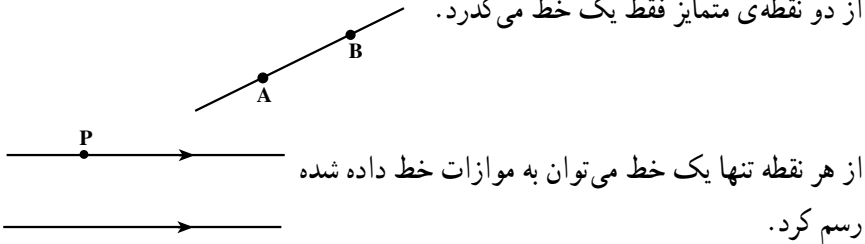


خط

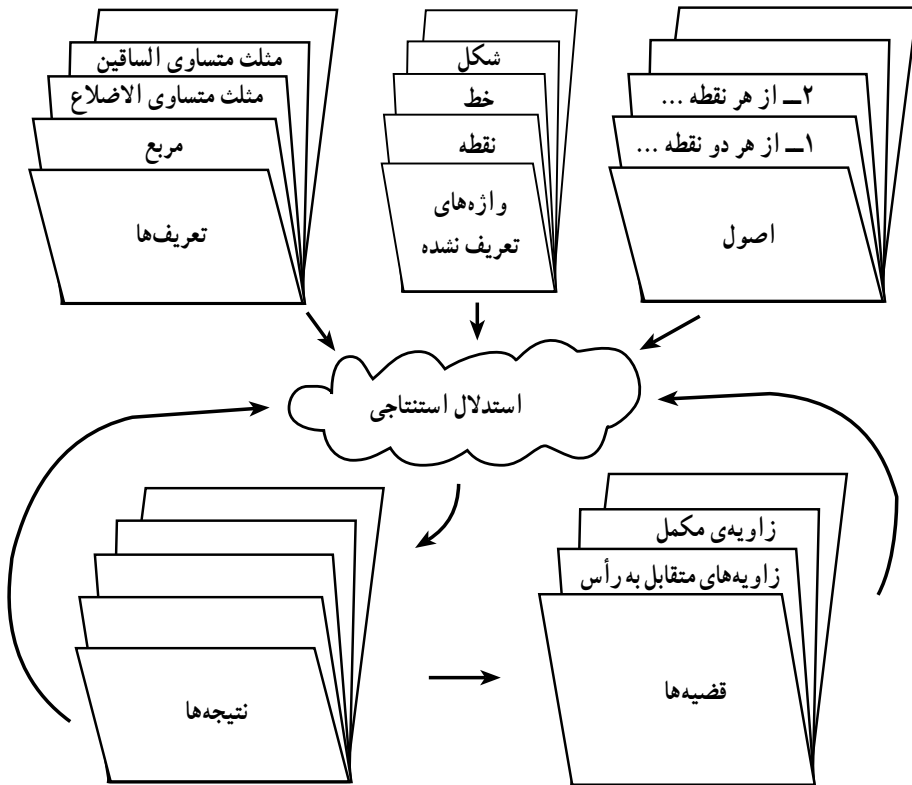


نقطه

همچنین در مثال‌های قبل، درستی بعضی از ویژگی‌های هندسی را به وسیله استدلال استنتاجی نشان دادیم. در آن مثال‌ها، استنتاج‌های ما بر اساس حقایق بود که درستی آن‌ها را پذیرفته بودیم. این حقایق یا عبارت‌های درست، اصول<sup>۲</sup> نامیده می‌شوند. به عنوان مثال، از دو نقطه‌ی متمایز فقط یک خط می‌گذرد.



وقتی در هندسه استدلال استنتاجی به کار می‌بریم، می‌توانیم از تعریف‌ها، اصول، واژه‌های تعریف نشده و قضیه‌ها برای رسیدن به نتیجه استفاده کنیم.



۱- Property

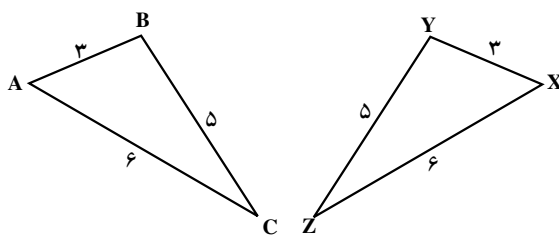
۲- Axioms



تمرین: با دقت بیشتری به نمودار صفحه‌ی قبل نگاه کنید و با توجه به مطالب مطرح شده، استدلال استنتاجی را توضیح دهید.

### ۱-۴- مثلث‌های هم‌نهشت<sup>۱</sup>

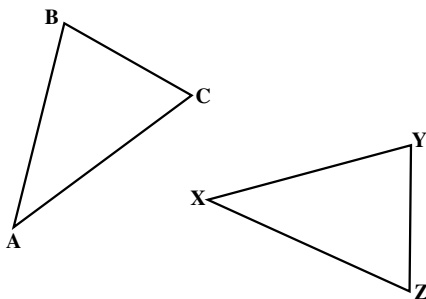
مثلث‌های  $ABC$  و  $XYZ$  دارای ضلع‌های متناظر مساوی هستند (شکل ۲۰). در نتیجه محیط آن‌ها باهم برابر است. همچنین زاویه‌ها نظیر به نظیر و مساحت‌های آن‌ها نیز باهم برابر هستند.



شکل ۲۰

در واقع هر یک از آن‌ها را می‌توانیم کاملاً روی دیگری قرار دهیم. به طوری که دقیقاً برهم منطبق شوند و یکدیگر را بپوشانند. این ویژگی انطباق کامل شکل‌ها، هم‌نهشتی نامیده می‌شود. برای آنکه نشان دهیم دو مثلث  $ABC$  و  $XYZ$  هم‌نهشت هستند، می‌نویسیم:  $ABC \cong XYZ$  و منظور آن است که این دو مثلث با انطباق رأس  $A$  روی رأس  $X$ ، رأس  $B$  روی رأس  $Y$  و رأس  $C$  روی رأس  $Z$  کاملاً برهم منطبق می‌شوند.

فرض کنید دو مثلث  $ABC$  و  $XYZ$  هم‌نهشت باشند (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

بنابراین می‌توانیم مثلث  $ABC$  را طوری روی مثلث  $XYZ$  قرار دهیم که  $A$  روی  $X$ ،  $B$  روی  $Y$  و  $C$  روی  $Z$  قرار گیرد. در نتیجه،

$$\begin{aligned} \hat{A} = \hat{X} & \quad AB = XY \\ \hat{B} = \hat{Y} & \quad BC = YZ \\ \hat{C} = \hat{Z} & \quad AC = XZ \end{aligned} \quad \underbrace{ABC \cong XYZ}$$

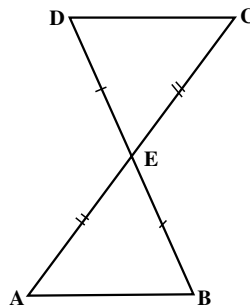
برای نشان دادن همنهشت بودن دو مثلث، همان‌طور که قبلاً دیده‌اید، کافی است نشان دهیم که یکی از سه حالت زیر برقرار است.

**حالت (ض رض)**

هرگاه دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از یک مثلث، با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.

**مثال ۱۱:** در شکل ۲۲،  $E$  وسط  $AC$  و  $BD$  است. چرا  $AB = CD$ ؟ (جواب خود را با ذکر

دلیل بنویسید.)



شکل ۲۲

حل: بنا به قضیه‌ی زاویه‌های متقابل به رأس، زاویه‌های CED و AEB باهم برابرند. در

مثلث‌های ABE و CED

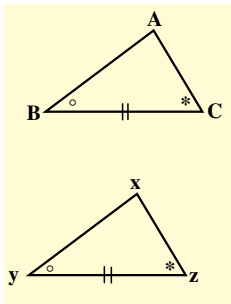
$$AE = CE$$

$$\hat{AEB} = \hat{CED}$$

$$EB = DE$$

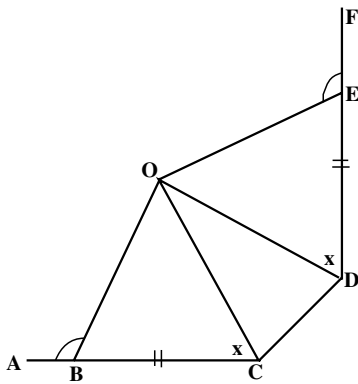
بنابراین، بنا به حالت (ضرض)،  $ABE \cong CDE$ .

چون مثلث‌ها همنهشت هستند، در نتیجه  $AB = CD$ .



**حالت (ضرض)**

هرگاه دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



**مثال ۱۲:** در شکل ۲۳،  $BC = ED$ ،

$\hat{OBA} = \hat{OEF}$  و  $\hat{OCB} = \hat{ODE}$ . نشان دهید

شکل ۲۳

$$\hat{OBC} = \hat{OED}$$

$$\hat{OBA} = \hat{OEF}$$

$$BC = ED$$

$$\hat{OCB} = \hat{ODE}$$

حل: بنا به قضیه‌ی زاویه‌ی مکمل

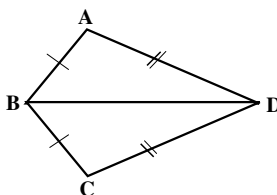
در مثلث‌های OBC و OED

بنابراین، بنابه حالت (زضز)،  $OBC \cong OED$  چون مثلث‌ها همنهشت هستند،  
 $\hat{B}OC = \hat{E}OD$ .

**حالت (ضضض)**

هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.

**مثال ۱۳:** در شکل ۲۴،  $AB = BC$  و  $AD = DC$ . نشان دهید  $\hat{A} = \hat{C}$ .



شکل ۲۴

**حل:** در دو مثلث ABD و BDC داریم

$$AB = BC$$

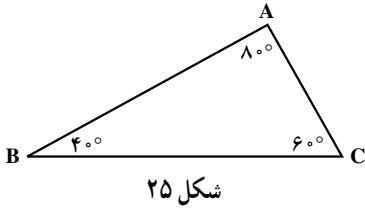
$$AD = DC$$

$$BD = BD$$

بنابراین، بنا به حالت (ضضض)،  $ABD \cong CBD$ ، چون مثلث‌های ABD و CBD همنهشت هستند، بنابراین اجزای نظیر آن‌ها قابل انطباق برهم خواهند بود یعنی  $\hat{A} = \hat{C}$ .

سه حالت همنهشتی دو مثلث از حقایق پذیرفته شده هستند، با این حال می‌توان دو حالت (زضز) و (ضضض) را از حالت اول نتیجه گرفت.

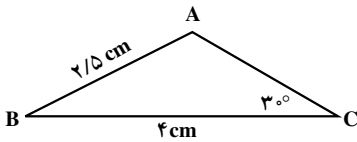
## فعالیت ۳-۱



۱. الف) مثلث DEF را چنان رسم کنید که  $\hat{D} = \hat{A}$  ،  $\hat{E} = \hat{B}$  و  $\hat{F} = \hat{C}$  ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۵) همنهشت نباشد.

ب) چند مثلث دیگر با شرایط مثلث DEF می‌توانید رسم کنید؟ چرا؟

پ) از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

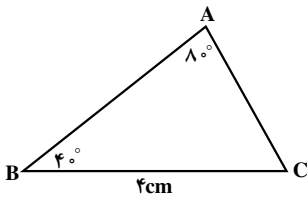


شکل ۲۶

۲. الف) مثلث DEF را چنان رسم کنید که در آن  $DE = AB$  ،  $EF = BC$  ،  $\hat{F} = \hat{C}$  ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۶) همنهشت نباشد.

ب) آیا تنها مثلثی که می‌توانید با شرایط فوق رسم کنید، همان DEF است؟ چرا؟

پ) از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



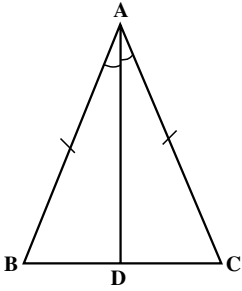
شکل ۲۷

۳. الف) آیا می‌توانید مثلث DEF را چنان رسم کنید که  $\hat{D} = \hat{A}$  ،  $\hat{E} = \hat{B}$  ،  $\hat{F} = \hat{C}$  ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۷) همنهشت نباشد؟ جواب خود را با ذکر دلیل توضیح دهید.

ب) از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

## ۱-۵- مثلث متساوی الساقین

در هر مثلث متساوی الساقین دو ضلع برابر وجود دارد که ساق نامیده می‌شوند، به همین دلیل این گونه مثلث‌ها متساوی الساقین نامیده می‌شوند. در شکل ۲۸، مثلث ABC متساوی الساقین است ( $AB = AC$ ). در بخش قبل از طریق استدلال استقرایی مشاهده کردید که اگر در مثلثی دو زاویه‌ی



شکل ۲۸

برابر وجود داشته باشد آن مثلث متساوی الساقین است. اکنون نشان می‌دهیم در هر مثلث متساوی الساقین زاویه‌های مقابل به اضلاع مساوی، با یکدیگر برابرند ( $\hat{B} = \hat{C}$ ). درستی این نتیجه‌گیری کلی را، با استفاده از استدلال استنتاجی نشان می‌دهیم. برای این منظور، از رأس A خطی چنان رسم می‌کنیم که  $\hat{A}$  را نصف کرده و BC را در D قطع کند (AD نیمساز زاویه‌ی A است). در مثلث‌های ABD و ACD و

$$AB = AC$$

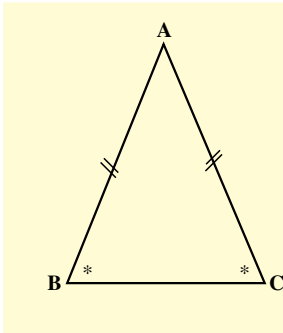
$$\hat{B} = \hat{C}$$

$$AD = AD$$

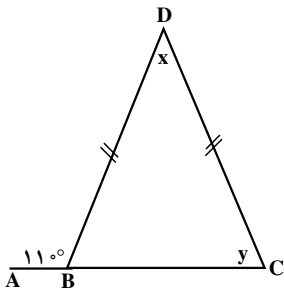
بنابراین، بنا به حالت (ض‌ض‌ض)،  $ABD \cong ACD$ . چون مثلث‌ها همنهشت هستند، در نتیجه

$$\hat{B} = \hat{C}$$

با توجه به این که درستی مطلب را برای یک مثلث متساوی الساقین دلخواه نشان دادیم، بنابراین نتیجه‌ی به دست آمده برای تمام مثلث‌های متساوی الساقین درست است.



**قضیه‌ی ۵: مثلث متساوی الساقین**  
در هر مثلث متساوی الساقین زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.



شکل ۲۹

**مثال ۱۴:** در شکل ۲۹، مقادیر x و y را پیدا کنید.

**حل:** چون  $\triangle ABC$  یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است

$$\hat{D}BC + 11^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{D}BC = 7^\circ$$

با توجه به قضیه‌ی مثلث متساوی الساقین، زاویه‌های  $DCB$  و  $DBC$  باید باهم برابر باشند.

$$y = 7^\circ$$

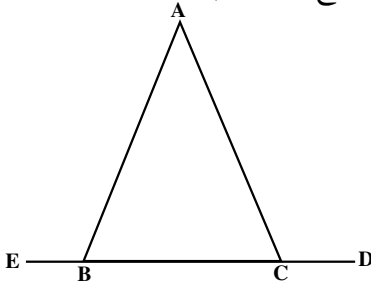
پس:

چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است، در نتیجه

$$x + 7^\circ + 7^\circ = 180^\circ$$

$$x = 40^\circ$$

**مثال ۱۵:** در شکل  $30^\circ$ ،  $AB = AC$ . توضیح دهید که چرا  $\hat{ABE} = \hat{ACD}$ .



شکل ۳۰

$$\hat{ABC} = \hat{ACB}$$

$$\hat{ABE} = \hat{ACD}$$

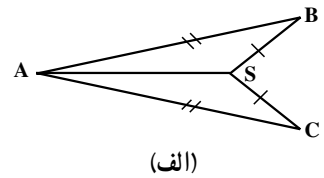
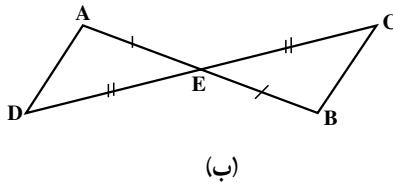
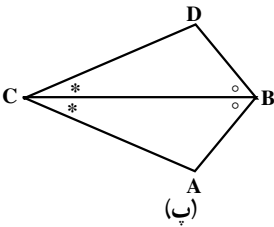
حل: بنا به قضیه‌ی مثلث متساوی الساقین،

و بنا به قضیه‌ی دو زاویه‌ی مکمل،

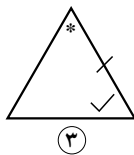
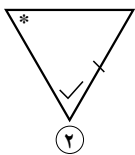
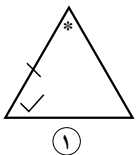
## مسائل

۱. ابتدا دلیل همنهشت بودن مثلث‌ها را بگویید، سپس تساوی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر را

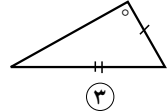
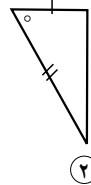
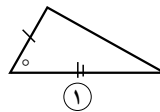
بنویسید.



۲. مثلث‌های همنهشت را مشخص کنید و حالت همنهشتی آن‌ها را بیان نمایید.



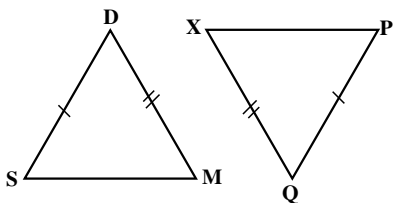
(ب)



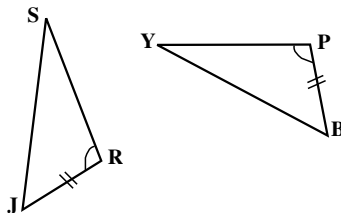
(الف)

۳. با توجه به شکل های زیر، تساوی کدام یک از اجزا، همنهشتی مثلث ها را در (الف) و (ب)

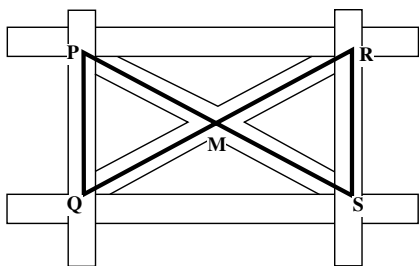
نتیجه می دهد؟



(ب)

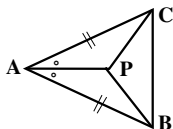


(الف)

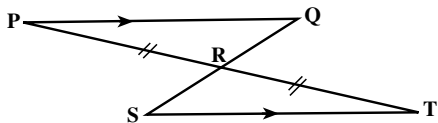


۴. نقطه ی M وسط قطعات متقاطع است.

چرا  $MPQ \cong MSR$  ؟

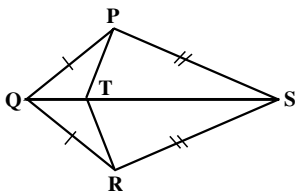


۵. دلیل متساوی الساقین بودن مثلث PBC را بنویسید.



۶. اگر  $PQ \parallel ST$  و R وسط PT باشد، ثابت

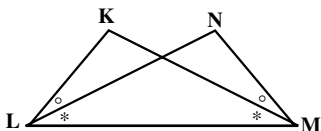
کنید R وسط QS نیز هست.



۷. در چهارضلعی PQRS،  $PQ = RQ$  و

$PS = RS$ . اگر T نقطه ی دلخواهی روی قطر QS

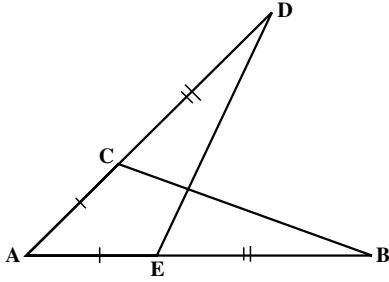
باشد، ثابت کنید  $PT = RT$ .



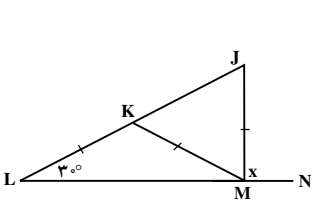
۸. در شکل مقابل ثابت کنید  $KL = NM$ .



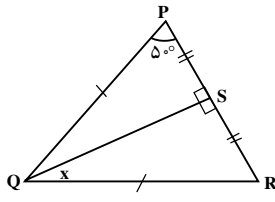
۹. در شکل روبه‌رو ثابت کنید  $BC = DE$ .



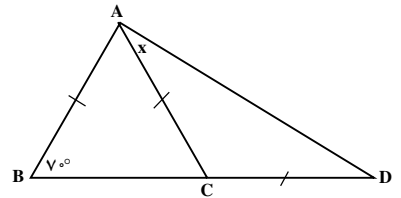
۱۰. در هریک از شکل‌های زیر، مقدار  $x$  را تعیین کنید.



(پ)

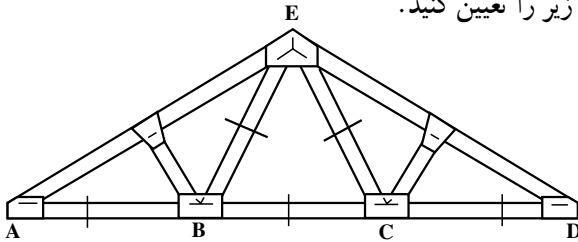


(ب)



(الف)

۱۱. مقدار هریک از زاویه‌های زیر را تعیین کنید.



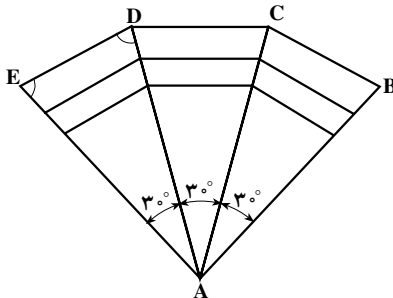
(الف)  $\hat{BEC}$

(ب)  $\hat{ABE}$

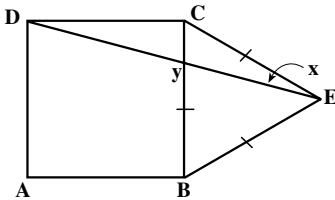
(پ)  $\hat{EAB}$

۱۲. شکل زیر طرح یک تالار را نشان می‌دهد. اگر هر سه بخش مثلثی شکل هم‌نهشت باشند،

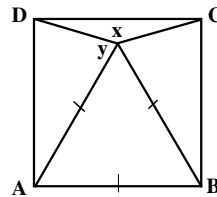
اندازه‌ی  $\hat{BCD}$  را تعیین کنید.



۱۳. در هریک از شکل های زیر، ABCD یک مربع است. اندازه های  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

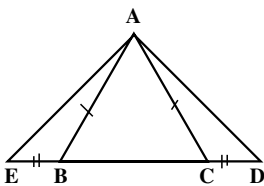


(ب)

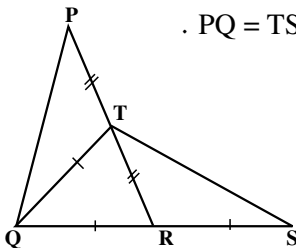


(الف)

۱۴. با توجه به شکل، ثابت کنید که  $AD = AE$ .



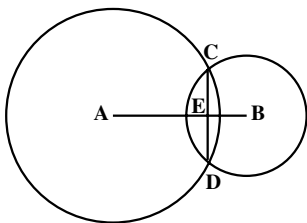
۱۵. در شکل روبه رو، ثابت کنید  $\hat{PTQ} = \hat{TRS}$  و  $PQ = TS$ .



۱۶. دو دایره به مرکزهای A و B یکدیگر را در C و D قطع کرده اند.

الف) ثابت کنید  $\hat{ACB} = \hat{ADB}$ .

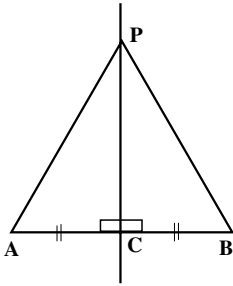
ب) ثابت کنید که AB، عمود منصف CD است.



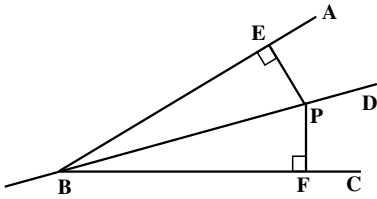
۱۷. در چهارضلعی PQRS،  $PQ = QR$  و قطر QS، زاویه ی Q را نصف می کند. ثابت کنید

$PS = RS$ .

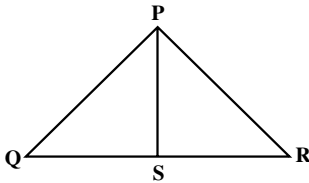
۱۸. اگر XY و WZ قطرهایی از یک دایره باشند، ثابت کنید  $XW = YZ$ .



۱۹. ثابت کنید هر نقطه مانند P روی عمود منصف پاره خط AB از نقاط A و B به یک فاصله است.



۲۰. نشان دهید که هر نقطه مانند P روی نیمساز زاویه ی ABC، از ضلع های AB و BC به یک فاصله است.



۲۱. در مثلث PQR،  $PQ = PR$  و PS میانه ی وارد بر ضلع QR است. ثابت کنید:

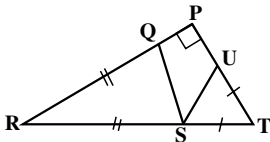
(الف) PS نیمساز زاویه ی QPR است.

(ب)  $PS \perp QR$  (PS عمود QR است).

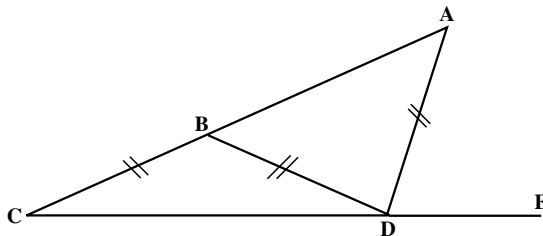
(پ) از دو قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه ای می گیرید؟

۲۲. با توجه به شکل، توضیح دهید که چرا

$$\widehat{QSU} = 45^\circ$$



۲۳. با توجه به شکل زیر، توضیح دهید چرا  $\widehat{ADE} = 3\widehat{ACE}$



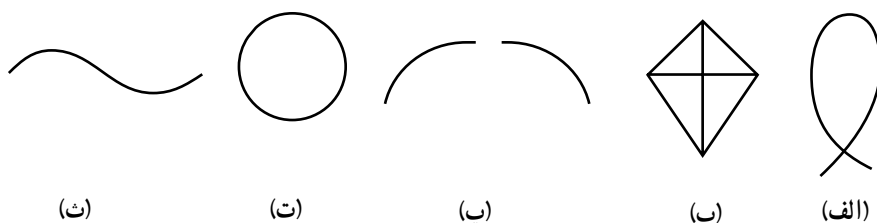
۲۴. از طریق استدلال استنتاجی ثابت کنید مثلی که دو زاویه ی مساوی داشته باشد،

متساوی الساقین است.

## ۱-۶- از «خم ساده» تا «چندضلعی»

آیا تا به حال با یک قطعه نخ، شکلی روی سطح میز ساخته‌اید؟ این گونه شکل‌ها می‌توانند تصور خم مسطح را برای شما به وجود آورند. به‌طور شهودی، یک خم مسطح مجموعه‌ای از نقطه‌ها است که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم. پس از این، در این کتاب، همه‌ی خم‌ها را مسطح در نظر می‌گیریم.

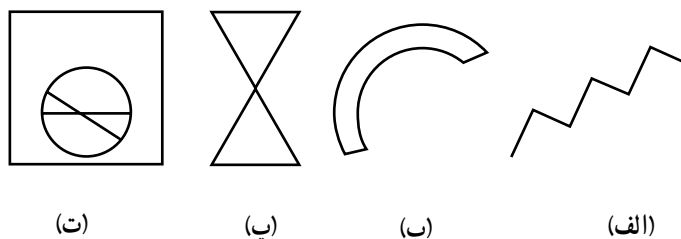
از این تعریف می‌توان نتیجه گرفت که خط‌ها، نیم خط‌ها، پاره خط‌ها و زاویه‌ها همه خم‌های مسطح هستند. در شکل ۳۱، نمونه‌های (الف)، (ب)، (ت) و (ث) هر کدام یک خم هستند ولی نمونه (پ) یک خم نیست، زیرا نمی‌توان بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ آن را رسم کرد.



شکل ۳۱

یک خم ساده، یک خم مسطح است که هیچ‌یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند. در شکل ۳۱، (ت) و (ث) خم‌های ساده هستند، ولی (الف) و (ب) خم‌های ساده نیستند. اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم بسته نامیده می‌شود.

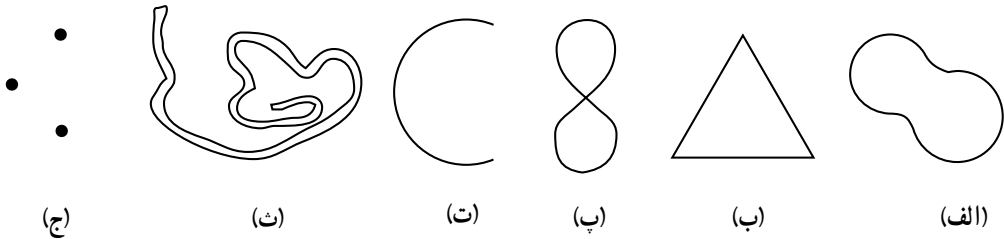
**مثال ۱:** در شکل ۳۲ مورد (الف)، خم ساده است ولی بسته نیست، مورد (ب) یک خم ساده‌ی بسته است، مورد (پ) و (ت) خم‌های ساده‌ی بسته نیستند. چرا؟



شکل ۳۲

**مثال ۲:** کدام یک از شکل‌های زیر نمایش‌دهنده‌ی خم، خم ساده، خم بسته یا خم ساده‌ی بسته هستند؟

بسته هستند؟



شکل ۳۳

**حل:**

– شکل‌های (الف)، (ب)، (پ)، (ت) و (ث) خم هستند.

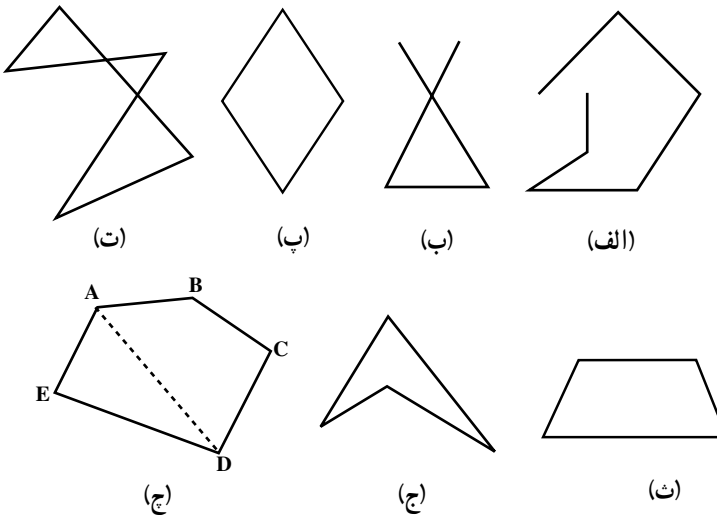
– شکل‌های (الف)، (ب)، (ت) و (ث) خم‌های ساده هستند.

– شکل‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ث) خم‌های بسته هستند.

– شکل‌های (الف)، (ب) و (ث) خم‌های ساده‌ی بسته هستند.

**تمرین:** با توجه به تعریف‌های خم، خم ساده، خم بسته و خم ساده‌ی بسته، حروف الفبای

فارسی را دسته‌بندی کنید.



شکل ۳۴

همه‌ی خم‌های ساده‌ی بسته دارای یک ویژگی مشترک هستند. آیا می‌توانید آن را کشف کنید؟

توجه کنید که این ویژگی هیچ ارتباطی به اندازه، شکل و همنهستی آنها ندارد. در واقع این ویژگی آن قدر بدیهی به نظر می‌رسد که ممکن است آن را نادیده گرفته باشید.

هر خم ساده‌ی بسته دارای درون و بیرون است. هر خم ساده‌ی بسته، مجموعه نقطه‌های صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم تقسیم می‌کند، این زیرمجموعه‌ها شامل نقطه‌های درون، بیرون و روی خم هستند.<sup>۱</sup>

### قضیه خم جُردن

هر خم ساده‌ی بسته‌ی  $C$ ، صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.

چرا نمونه‌های (الف)، (ب) و (ت) خم ساده‌ی بسته نیستند؟ توضیح دهید. نمونه‌های (پ)، (ث)، (ج) و (ج)، خم‌های ساده‌ی بسته‌ای هستند که چندضلعی نامیده می‌شوند.

چندضلعی یک خم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد به طوری که نقطه‌های انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آنها روی یک خط قرار نگرفته باشند.

در شکل ۳۴ (ج)، پاره‌خط‌های  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$ ،  $DE$  و  $EA$  ضلع‌های چندضلعی  $ABCDE$  و نقطه‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$  و  $E$  رأس‌های چندضلعی خوانده می‌شوند. رأس‌های مجاور، نقطه‌های انتهایی یک ضلع هستند و قطرهای یک چندضلعی پاره‌خط‌هایی هستند که رأس‌های غیرمجاور را به هم وصل می‌کنند، مانند  $AD$  در شکل ۳۴ (ج).

چندضلعی‌ها براساس تعداد ضلع‌هایشان نامگذاری می‌شوند. به عنوان مثال، یک چندضلعی با سه ضلع، سه ضلعی یا مثلث، با چهار ضلع، چهارضلعی و با پنج ضلع، پنج ضلعی خوانده می‌شود.

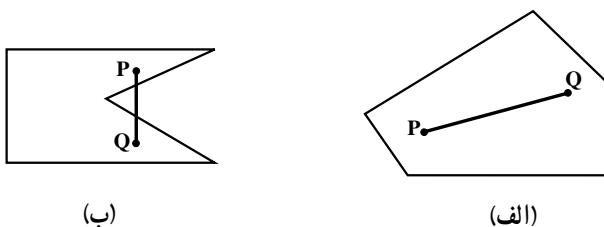
---

۱- اگر چه این ویژگی واضح به نظر می‌رسد، ولی قضیه‌ی خم جردن دارای اثبات بسیار مشکلی است که در سطح ریاضی پیشرفته مطرح می‌شود زیرا به ابزار قوی‌تری از جمله توپولوژی جبری نیازمند است.

اجتماع نقاط یک خم ساده بسته با نقاط درون آن یک ناحیه نامیده می‌شود. ناحیه‌های یک صفحه در دو دسته‌ی محدب و غیرمحدب طبقه‌بندی می‌شوند.

یک ناحیه (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) محدب است، اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌کند، کاملاً در آن ناحیه قرار گیرد.

در غیراین‌صورت اگر حداقل دو نقطه در ناحیه وجود داشته باشند به طوری که پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند کاملاً درون ناحیه قرار نگیرد، آن ناحیه غیرمحدب خوانده می‌شود. به‌عنوان مثال در شکل ۳۵، ناحیه‌ی محدود شده به خم بسته‌ی (الف) محدب و ناحیه‌ی محدود شده به خم بسته‌ی (ب) غیرمحدب است.

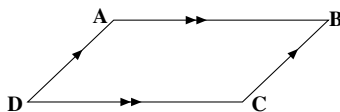


شکل ۳۵

دایره نیز نمونه‌ای از یک خم ساده بسته است که درون آن یک ناحیه‌ی محدب می‌باشد.

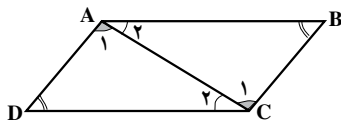
## ۱-۷- متوازی‌الاضلاع

متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی است که ضلع‌های آن دوجه‌دو باهم موازی هستند. از موازی بودن ضلع‌های روبه‌رو، مساوی بودن آن‌ها نیز نتیجه می‌شود. برای نشان دادن این خاصیت، از استدلال استنتاجی کمک می‌گیریم. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر بگیرید (شکل ۳۶).



شکل ۳۶

قطر AC، متوازی الاضلاع را به دو مثلث ABC و ADC تقسیم می‌کند (شکل ۳۷).



شکل ۳۷

طبق قضیه‌ی خطوط موازی، در این دو مثلث داریم

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \quad , \quad \hat{A}_2 = \hat{C}_2$$

ضلع AC نیز در هر دو مثلث مشترک است. پس دو مثلث ABC و ADC به حالت (زضز) هم‌نهشت هستند. در نتیجه ضلع‌های نظیر برابر هستند. یعنی

$$AD = BC \quad , \quad AB = DC$$

همچنین در دو مثلث ABC و ADC زاویه‌های نظیر نیز برابر خواهند بود.

$$\hat{B} = \hat{D}$$

و چون  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$  و  $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$  در نتیجه :

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2$$

$$\hat{A} = \hat{C}$$

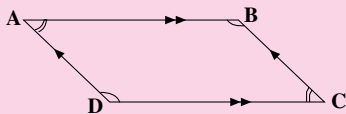
یعنی

### قضیه‌ی ۶:

در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های موازی با هم مساوی‌اند و زاویه‌های روبه‌رو نیز دویه‌دو باهم مساوی هستند. یعنی در متوازی الاضلاع ABCD،

$$AD = BC \quad , \quad AB = DC$$

$$\hat{A} = \hat{C} \quad , \quad \hat{D} = \hat{B}$$



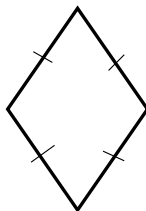


یادآوری: در هر متوازی‌الاضلاع، پاره‌خطی که از یک رأس بر ضلع روبه‌روی آن عمود می‌شود ارتفاع و ضلعی که ارتفاع بر آن عمود شده است، قاعده‌ی نظیر آن ارتفاع نامیده می‌شود.



شکل ۳۸

ارتفاع را با  $h$  و قاعده را با  $b$  نمایش می‌دهند.  
یادآوری: متوازی‌الاضلاعی که چهار ضلع مساوی داشته باشند لوزی خوانده می‌شود.



شکل ۳۹

**تمرین ۱:** به‌وسیله‌ی استدلال استنتاجی، یعنی با تکیه بر حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته بودیم، مساوی بودن ضلع‌های روبه‌روی هم در هر متوازی‌الاضلاع را نشان دادیم. آن حقایق کدام‌ها هستند؟

**تمرین ۲:** با استفاده از استدلال استنتاجی، نشان دهید که در هر متوازی‌الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.

**تمرین ۳:** نشان دهید که در هر مستطیل، قطرهای باهم مساوی هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

**تمرین ۴:** نشان دهید که در هر لوزی، قطرهای یکدیگر عمودند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

۱- height

۲- base

## تحقیق

این مثلث متساوی الاضلاع به سه شکل هم‌نهشت تقسیم شده است. نشان دهید که یک مثلث متساوی الاضلاع چگونه به

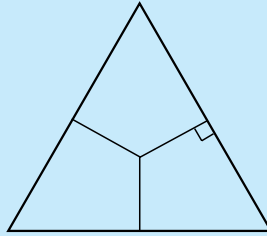
(ب) ۳ مثلث هم‌نهشت

(الف) ۲ مثلث هم‌نهشت

(ت) ۶ مثلث هم‌نهشت

(پ) ۴ مثلث هم‌نهشت

تقسیم می‌شود.



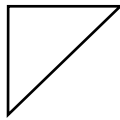
## مسائل

۱. خم‌های مسطح را در شکل‌های زیر مشخص کنید. کدام یک از شکل‌ها خم ساده هستند؟

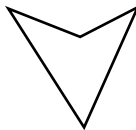
کدام یک از خم‌های ساده، بسته هستند؟



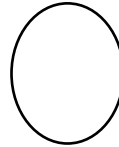
(ث)



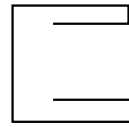
(ت)



(پ)



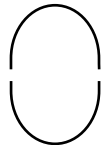
(ب)



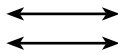
(الف)



(د)



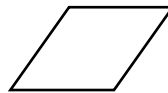
(خ)



(ح)



(ج)

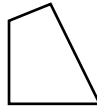


(ج)

۲. کدام یک از شکل‌های زیر چندضلعی هستند؟ چندضلعی‌ها را از نظر محدب بودن دسته‌بندی کنید.



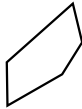
(ب)



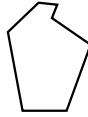
(ب)



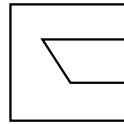
(الف)



(ج)



(ث)



(ت)

۳. الفبای انگلیسی را با حروف بزرگ نوشته، سپس آن‌ها را با توجه به تعریف‌های خم ساده، خم بسته، خم ساده‌ی بسته و چندضلعی دسته‌بندی کنید.

۴. با استفاده از چندپاره خط خمی رسم کنید که:

(الف) ساده باشد اما بسته نباشد. (ب) ساده و بسته باشد.

۵. هر یک از چندضلعی‌های زیر چند قطر دارند؟

(الف) مثلث (ب) شش ضلعی (پ) هشت ضلعی

۶. ثابت کنید:

(الف) یک چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.

(ب) اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

(پ) اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل دوه‌دو متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

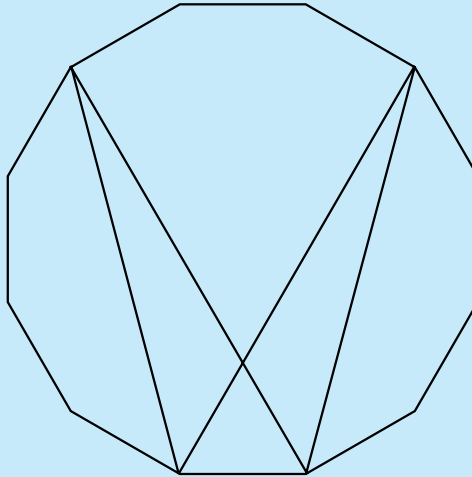
(ت) اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

(ث) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو دوه‌دو متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

(ج) هرگاه هر قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

## مجله‌ی ریاضی

ابوالوفابوزجانی ریاضیدان نامی ایرانی کتابی درباره‌ی معماهای ریاضی دارد. معماهای این کتاب به صورت شکل‌هایی هستند که به قسمت‌های مختلف تقسیم شده‌اند و باید شکل‌ها بریده شوند و طوری کنار هم قرار بگیرند تا شکل جدیدی حاصل شود و معما حل گردد. معمای زیر یکی از کارهای ابوالوفابوزجانی است. به معمای زیر نگاه کنید. این دوازده ضلعی منتظم به شش قسمت تقسیم شده است. آن قسمت‌ها را ببرید<sup>۱</sup> و طوری آن‌ها را کنار هم بگذارید تا یک مربع تشکیل شود. دقت کنید که یکی از قسمت‌ها یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.



قطعه‌های مربع تشکیل شده را به هم بچسبانید و ثابت کنید که شکل تشکیل شده در واقع یک مربع است.

۱- می‌توانید شکل را از روی کتاب به دفتر خود برگردان کنید.