فصل نهم

بردار و نیرو

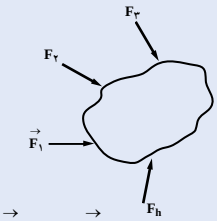
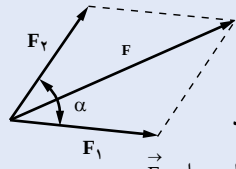
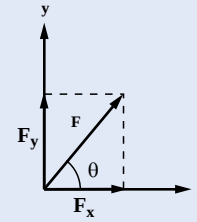
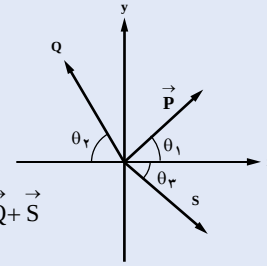
خلاصه فصل

در این فصل مفهوم کمیت‌های اسکالر و برداری بررسی خواهند شد و روش جمع نیروها، تجزیه یک نیرو به دو یا چند مؤلفه و تصویر یک نیرو بر روی یک محور را شرح خواهیم داد. به‌دلیل برداری بودن نیرو، می‌بایست از جبر برداری استفاده شود. در مسائل استاتیکی پیچیده، ساده‌ترین روش حل استفاده از روش‌های برداری است که علاوه بر اینکه دقت و سرعت عمل را افزایش می‌دهد، بلکه از الزام و نیاز به درک فضایی مسائل می‌کاهد.

اهداف فصل

دانشی	مهارتی	نگرشی
۱ــ کمیت اسکالر را می‌شناسد ۲ــ کمیت برداری را می‌شناسد ۳ــ روش جمع جبری بردارها را می‌داند ۴ــ روش تجزیه نیرو به مؤلفه‌ها را می‌داند ۵ــ بردارهای یکه را می‌شناسد ۶ــ نیروهای واقعی در صفحه و نیروهای متقارب (همرس) را بیان کند	۱ــ برآیند دو یا چند نیرو را تعیین کند ۲ــ یک بردار را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه نماید ۳ــ برآیند دسته‌ای از نیروهای متقارب را به‌دست آورد ۴ــ برآیند دو نیروی غیرمتعامد را از قانون کسینوس‌ها تعیین نماید	۱ــ جابه‌جایی جسم در راستای برآیند نیروها است ۲ــ تمام کُرات و اجسام فضایی تحت اثر نیروهایی هستند که حرکت مجموعه آنها در راستای برآیند کل نیروهاست ۳ــ برآیند نیروهای وارد بر کرهٔ زمین در منظومه شمسی قاعدتاً صفر است که جابه‌جایی نسبی (به‌جزء حرکت دورانی‌و وضعی زمین) در فواصل سیاره‌ها و ستارات وجود ندارد

روابط و فرمول‌های کلی فصل نهم

روابط و فرمول‌ها	تعریف اجزاء روابط و فرمول‌ها	روابط پایه موردنیاز
 $\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\cdots+\vec{F_n}$	$\vec{F}$ ــ برایند دسته‌ای از نیروهای برداری $\vec{F_1}$ ــ بردار نیروی اول $\vec{F_2}$ ــ بردار نیروی دوم $\vec{F_n}$ ــ بردار نیروی nام	قواعد مربوط به : تعریف بردار بردار واحد جمع جبری بردارها
$F^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha$	 F ــ برایند F_1 ــ مقدار بردار $\vec{F_1}$ F_2 ــ مقدار بردار $\vec{F_2}$ α ــ زاویه بین دو بردار	قانون کسینوس‌ها قانون سینوس‌ها روابط مثلث قائم‌الزاویه
$\vec{F}=\vec{F_x}+\vec{F_y}$ $F_x=F\cos\theta$ $F_y=F\sin\theta$ 	F_n ــ مؤلفه نیروی F در جهت xها F_y ــ مؤلفه نیروی F در جهت yها θ ــ زاویه برایند با افق (محور x)	روابط مربوط به نسبت‌های مثلثاتی، مثلث قائم‌الزاویه قضیه فیثاغورس
 $\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}+\vec{S}$ $\vec{R}=(\vec{P_{xi}}+\vec{P_{yj}})+(\vec{Q_{xi}}+\vec{Q_{yj}})+(\vec{S_{xi}}+\vec{S_{yj}})$ $=(P_x+Q_x+S_x)_i+(P_y+Q_y+S_y)_j$	$\vec{R}$ ــ برآیند دسته‌ای از نیروها Q_x و Q_y مؤلفه‌های بردار نیروی $\vec{Q}$ P_x و P_y مؤلفه‌های بردار نیروی $\vec{P}$ S_x و S_y مؤلفه‌های بردار نیروی $\vec{S}$	قواعد مربوط به جمع جبری برداری و تجزیه نیروها

جدول بودجه‌بندی فرایند اجرای برنامه درسی فصل نهم

جلسه آموزشی	موضوعات و عناوین	شماره صفحه کتاب درسی	مواد آموزشی	امکانات و تجهیزات موردنیاز
بیست‌و دوم	نقطه مادی و جسم صلب کمیت‌های فیزیکی (نرده‌ای و برداری) بردارها (انواع بردار ــ وضعیت دو بردار در فضا) تعیین برآیند دو بردار (به روش مثلثی و متوازی‌الاضلاع)	۱۱۷ ۱۱۸ ۱۲ ۱۲۲ و ۱۲۱		
بیست‌و سوم	تعیین برآیند دسته‌ای از نیروها (بیش از دو نیرو) حاصلضرب یک عدد در یک بردار تجزیه یک بردار به مؤلفه‌های غیر متعامد	۱۲۳ ۱۲۵ ۱۲۷ و ۱۲۶		
بیست و چهارم	مؤلفه‌های متعامد یک بردار بردار واحد (یکه) نیرو تمرینات مربوط به نیرو و برآیند آن	۱۲۸ ۱۲۹ ۱۳۱ ۱۳۶ و ۱۳۵ و ۱۳۴		
بیست‌و پنجم	مؤلفه‌های نیرو در مختصات قائم جمع نیروها (برآیند) از طریق مؤلفه نیروها	۱۳۶ ۱۴۱ و ۱۴		
بیست‌و ششم	حل تمرینات مربوط به برآیند نیروها تعادل نقطه‌ی مادی	و۱۴۷ و ۱۴۶ ۱۵ و ۱۴۹ و ۱۴۸		

جدول زمان‌بندی فرایند تدریس در جلسات آموزشی

جلسه آموزشی	موضوعات و مطالب	مدت تدریس (دقیقه)	اقدامات لازم برای جلسه بعدی	شماره صفحه کتاب
جلسه بیست‌ودوم	مروری بر مطالب جلسه گذشته		تکرار مختصر مطالب جمع‌بندی شده در جلسه قبل	
	تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع		تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش‌آموزان	
	تحلیل محتوای کتاب درسی		با پرورش مهارت و آموختن راه یادگیری از طریق مشارکت دانش‌آموزان سعی در انتقال مطالب شود	
	تشریح مثال‌های کتاب درسی		مثال‌ها به بحث گذاشته تا راه حل‌های دیگر هم مشخص شوند	
	حل مثال‌های پیشنهادی و ضروری		با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش‌آموز مثال‌های اضافی حل شوند	
	تشریح مطالب فوق برنامه		فعّالیّت‌های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند	
	حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس		تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش‌آموزان حل می‌شوند	
	جمع‌بندی مطالب تدریس شده		با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع‌بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش‌آموزان شود	
	ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش‌آموزان		با سؤالات کوتاه از دانش‌آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد	

جلسهٔ بیست‌و سوم	مروری بر مطالب جلسه گذشته		تکرار مختصر مطالب جمع‌بندی شده در جلسه قبل	
	تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع		تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش‌آموزان	
	تحلیل محتوای کتاب درسی		با پرورش مهارت و آموختن راه یادگیری از طریق مشارکت دانش‌آموزان سعی در انتقال مطالب شود	
	تشریح مثال‌های کتاب درسی		مثال‌ها به بحث گذاشته تا راه حل‌های دیگر هم مشخص شوند	
	حل مثال‌های پیشنهادی و ضروری		با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش‌آموز مثال‌های اضافی حل شوند	
	تشریح مطالب فوق برنامه		فعّالیّت‌های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش‌آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند	
	حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس		تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش‌آموزان حل می‌شوند	
	جمع‌بندی مطالب تدریس شده		با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع‌بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش‌آموزان شود	
	ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش‌آموزان		با سؤالات کوتاه از دانش‌آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد	

جلسه بیست و چهارم	مروری بر مطالب جلسه گذشته		تکرار مختصر مطالب جمع‌بندی شده د ر جلسه قبل	
	تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع		تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش‌آموزان	
	تحلیل محتوای کتاب درسی		با پرورش مهارت و آموختن راه یادگیری از طریق مشارکت دانش‌آموزان سعی در انتقال مطالب شود.	
	تشریح مثال‌های کتاب درسی		مثال‌ها به بحث گذاشته تا راه حل‌های دیگر هم مشخص شوند.	
	حل مثال‌های پیشنهادی و ضروری		با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش‌آموز مثال‌های اضافی حل شوند.	
	تشریح مطالب فوق برنامه		فعّالیّت‌های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند.	
	حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس		تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش‌آموزان حل می‌شوند.	
	جمع‌بندی مطالب تدریس شده		با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع‌بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش‌آموزان شود.	
	ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش‌آموزان		با سؤالات کوتاه از دانش‌آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد.	
جلسه بیست و پنجم	مروری بر مطالب جلسه گذشته		تکرار مختصر مطالب جمع‌بندی شده در جلسه قبل	
	تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع		تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش‌آموزان	
	تحلیل محتوای کتاب درسی		با پرورش مهارت و آموختن راه یادگیری از طریق مشارکت دانش‌آموزان سعی در انتقال مطالب شود.	
	تشریح مثال‌های کتاب درسی		مثال‌ها به بحث گذاشته تا راه حل‌های دیگر هم مشخص شوند.	
	حل مثال‌های پیشنهادی و ضروری		با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش‌آموز مثال‌های اضافی حل شوند.	
	تشریح مطالب فوق برنامه		فعّالیّت‌های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند.	
	حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس		تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش‌آموزان حل می‌شوند.	
	جمع‌بندی مطالب تدریس شده		با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع‌بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش‌آموزان شود.	
	ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش‌آموزان		با سؤالات کوتاه از دانش‌آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد.	

جلسه بیست و ششم	مروری بر مطالب جلسه گذشته		تکرار مختصر مطالب جمع‌بندی شده د ر جلسه قبل	
	تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع		تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش‌آموزان	
	تحلیل محتوای کتاب درسی		با پرورش مهارت و آموختن راه یادگیری از طریق مشارکت دانش‌آموزان سعی در انتقال مطالب شود.	
	تشریح مثال‌های کتاب درسی		مثال‌ها به بحث گذاشته تا راه حل‌های دیگر هم مشخص شوند.	
	حل مثال‌های پیشنهادی و ضروری		با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش‌آموز مثال‌های اضافی حل شوند.	
	تشریح مطالب فوق برنامه		فعّالیّت‌های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند.	
	حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس		تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش‌آموزان حل می‌شوند.	
	جمع‌بندی مطالب تدریس شده		با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع‌بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش‌آموزان شود.	
	ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش‌آموزان		با سؤالات کوتاه از دانش‌آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد.	

جلسهٔ بیست و دوم: بردار و نیرو

در این جلسه، دانش‌آموزان با کمیت‌های فیزیکی آشنا می‌شوند و مفهوم کمیت برداری را یاد می‌گیرند. همچنین قادر خواهند بود که خصوصیات یک بردار و انواع بردارها را بشناسند.

در نهایت با استفاده از روش مثلث و روش متوازی‌الاضلاع اقدام به تعیین برآیند دو بردار نیرو می‌نمایند.

۹ـ۱ـ نقطه مادی و جسم صلب

آنچه که در تعریف نقطه مادی و جسم صلب برای کتاب درسی آمده است، به شرح زیر می‌باشد :

نقطهٔ مادی مقدار کوچکی از یک جسم است که می‌توان فرض کرد جای نقطه‌ای رادر فضا اشغال کرده است.

جسم صُلب از مجموع نقاط مادی تشکیل شده است و در اثر نیروهای وارد بر آن، تغییر شکل نمی‌دهد.

در این فصل، منظور از به کاربردن «نقاط مادی» یا «ذرات مادی» تنها مطالعهٔ ذرات بسیار کوچک نیست باید توجه داشت که در حل مسائل و روش به‌کار برده شده در این فصل، شکل و بزرگی و کوچکی اجسام تأثیری ندارد، به‌طوری که یک قطعه سنگ یک گرمی یا یک ماشین چند تنی را یک نقطهٔ مادی درنظر می‌گیریم. به این ترتیب فرض می‌کنیم کلیهٔ نیروهای وارد بر یک جسم، بر یک نقطه اثر خواهد داشت؛ یعنی اینکه بر یک نقطه از جسم وارد می‌شود.

برای تعریف دقیق‌تر از نقطه مادی (ذره)، می‌توان تعریف زیر را ارائه نمود :

۹ـ۱ـ۱ـ ذره : ذره جسمی است بی‌بُعد اما دارای جرم. در محاسبات برای ساده‌سازی گاهی حرکت زمین به‌دور مدارش را با فرض یک ذره بررسی می‌نمایند.

۹ـ۱ـ۲ـ جسم صُلب : جسمی است که جابه‌جایی نسبی ذرات تشکیل‌دهندهٔ آن قبل و بعد از بارگذاری صفر است. این فرض نسبی است و بعضاً اجسام نسبت به بارهای وارده (خیلی کم). صلب فرض می‌شوند. در زیر مفاهیم پایه در علم مکانیک به اختصار تعریف شده‌اند که در دروس ایستایی و مکانیک کاربرد بسیار وسیعی دارند.

۹ـ۱ـ۳ـ فضا (Space) : مقصود ما از فضا، یک ناحیهٔ هندسی است که حوادث فیزیکی در آن رخ می‌دهند. فضا می‌تواند دارای، یک، دو و یا سه بعد باشد. در واقع می‌توان مفهوم فضا را به بیش از سه بعد بسط داد، لیکن در اینجا ما خود را به فضای سه‌بعدی محدود خواهیم ساخت.

وضعیت هر نقطه در فضا، همواره نسبت به یک نقطهٔ مرجع سنجیده می‌شود. دستگاه مختصات مرجع لازم برای مکانیک نیوتنی، دستگاه ثابت در فضا می‌باشد. اندازه‌گیری‌های انجام شده نسبت به این دستگاه مرجع، مطلق خوانده می‌شوند.

۹ــ۱ــ۴ــ زمان (time) : توالی وقوع حوادث در فضا، به عنوان یک کمیت مطلق در نظر گرفته شده و زمان خوانده می‌شود. واحد زمان ثانیه است که به‌طور مستقیم به سرعت چرخش کرهٔ زمین ربط داده می‌شد. امروزه واحد اندازه‌گیری زمان به فرکانس نوسان اتم سزیوم ربط داده می‌شود.

۹ــ۱ــ۵ــ اینرسی (inertia) : توانایی یک جسم برای مقاومت در مقابل تغییر حرکت، اینرسی نامیده می‌شود.

۹ــ۱ــ۶ــ جرم (mass) : جرم یک جسم، یک اندازه‌گیری کمّی از اینرسی آن است.

۹ــ۱ــ۷ــ نیرو (force) : نیرو عمل یک جسم روی جسم دیگر است. این عمل می‌تواند به واسطهٔ تماس بین دو جسم باشد، که اثر فشار ــ کشش نامیده می‌شود، یا می‌تواند در دو جسم جدا از هم باشد که اثر میدان نیرو نامیده می‌شود.

۹ــ۱ــ۸ــ نقطهٔ مادی (particle) : اگر در مطالعهٔ سکون یا حرکت یک جسم، ابعاد آن قابل صرف‌نظر کردن باشد، آن جسم نقطهٔ مادی خوانده می‌شود. فرض می‌گردد که جرم یک نقطهٔ مادی در یک نقطهٔ هندسی متمرکز است. از این لحاظ گاهی مواقع به نقطهٔ مادی، نقطهٔ جرمی نیز گفته می‌شود.

۹ــ۱ــ۹ــ جسم صلب (rigid body) : مشخصهٔ یک جسم صلب این است که فاصلهٔ هر دو نقطه از آن، نسبت به یکدیگر برای تمام زمان‌ها، بدون تغییر (ثابت) است.

به منظور آشنایی بیشتر با دستگاه آحاد SI و انگلیسی جداول مفیدی گنجانده شده است که امید است مورد استفادهٔ همکاران محترم قرار گیرد.

جدول ۹ــ۱ــ واحدهای دستگاه SI و ابعاد آنها

کمیّت	واحد	علامت اختصاری
Length (طول)	meter (متر)	m
Time (زمان)	second (ثانیه)	s
Mass (جرم)	kilogram (کیلوگرم)	kg
Force (نیرو)	newton (نیوتن)	N
Weight (وزن)	newton (نیوتن)	N
Density (جرم مخصوص)	kilogram meter^{-3} (کیلوگرم بر متر مکعب)	kg/m^{3}
Metric ton (تن متریک)	kilograms ۱۰۰۰ (۱ کیلوگرم)	t
Work (کار)	newton–meter = joule (ژول = نیوتن‌متر)	N m=J
Energy (انرژی)	newton–meter = joule (ژول = نیوتن‌متر)	N m = J
Power (توان)	newton–meter/ second= watt (نیوتن متر بر ثانیه = وات)	N m/s=W
Pressure (فشار)	pascal =newton–meter^{-2} (نیوتن بر متر مربع = پاسکال)	N/m^{2}=Pa
Moment (لنگر)	meter–newton (متر ـ نیوتن)	m N
Area moment of inertia (ممان اینرسی سطحی)	meter^{4} (متر)^{4}	m^{4}
Mass moment of inertia (ممان اینرسی جرمی)	kilogram–meter^{2} (کیلوگرم متر مربع)	kg m^{2}
Plane angle (زاویهٔ صفحه‌ای)	radian (رادیان)	rad

جدول ۹ــ۲ــ واحدهای دستگاه ثقلی انگلیسی

علامت اختصاری	واحد	کمیّت
ft	فوت	طول
sec	ثانیه	زمان
lb	پوند	نیرو
lb sec^2/ft	اسلاگ	جرم
lb	پوند	وزن
$(lb\ sec^2)/ft^4$	^{3}(فوت)/ اسلاگ	جرم مخصوص
lb ft	پوند ـ فوت	کار
lb ft	پوند ـ فوت	انرژی
lb ft/sec	پوند ـ فوت بر ثانیه	توان
lb/ft^2	پوند بر فوت مربع	فشار
ft lb	فوت ـ پوند	لنگر
ft^4	^{4}(فوت)	ممان اینرسی سطحی
lb sec^2 ft	اسلاگ ـ $(فوت)^2$	ممان اینرسی جرمی
rad	رادیان	زاویهٔ صفحه‌ای

جدول ۹ــ۳ــ ضرایب تبدیل از دستگاه انگلیسی به دستگاه SI

ضرب کنید در	به	برای تبدیل از
۳ ۴۸	متر	فوت
۱ ۳۵۶	ژول	پوند ـ فوت
۱ ۶ ۹	متر	مایل
۴ ۴۴۸	نیوتن	پوند
۱۴ ۵۹	کیلوگرم	اسلاگ
۴ ۴۴۸	نیوتن	کیلو پوند (۱ پوند)

۹ـ۲ـ کمیت‌های فیزیکی

اساس کلیهٔ محاسبات فنی بر اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی استوار است. کمیت‌های فیزیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند :

الف) کمیت نرده‌ای (عددی)

ب) کمیت‌برداری

۹ـ۲ـ۱ـ کمیت نرده‌ای (عددی) : به هر کمیت فیزیکی که فاقد جهت بوده تنها دارای بزرگی (اندازه) باشد، یعنی تنها با یک عدد (البته با ذکر واحد مربوط) مشخّص شود، کمیت نرده‌ای گویند.

بعضی از کمیت‌هایی که در فصل‌های گذشتهٔ این کتاب دیدیم، از نوع کمیت‌های نرده‌ای هستند؛ مانند طول جاده، سطح سالن، حجم استخر، زمان طلوع آفتاب در یک روز معین از سال.

کار بر روی کمیت‌های عددی با عملیات ریاضی معمولی انجام می‌گیرد.

❑ مثال :

۶۰kg ۳۰ kg ۹۰kg

۲۰ kg ۱۲ kg ۸ kg

۲ ۵.۵ ۷/۵

۴S ۲S ۶S

۵۳m ۱۲m ۶۵ m

۹ـ۲ـ۲ـ کمیت‌برداری : به کمیت‌هایی که علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز باشند، کمیت برداری گویند.

بردار نیرو، بردار سرعت، بردار جابه‌جایی و ... از نوع کمیت‌های برداری هستند.

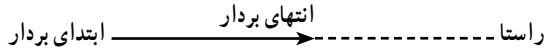
جهت یک بردار از راستا و سو تشکیل می‌شود. «راستا» امتداد خطی است که بردار روی آن قرار دارد و «سو» یکی از دو طرف «راستا» است.

توجه : تعریف ۹ـ۲ـ۱ در مورد اکثر کمیت‌های نرده‌ای صادق است. البته در مواردی استثنا هم دیده می‌شود؛ مانند جریان الکتریکی در یک سیم که علاوه بر بزرگی، جهت هم دارد، ولی از نوع کمیت‌برداری نیست.

کار بر روی کمیت‌های برداری، تابع عملیات خاص بردارهاست.

۹ـ۳ـ بردار

برای نمایش بردار در روی یک نمودار، پیکانی رسم می‌کنیم و طول آن را متناسب با اندازهٔ بردار درنظر می‌گیریم (برای ترسیم بردار، مقیاسی را انتخاب می‌کنیم). راستای پیکان در راستای بردار درنظر گرفته می‌شود؛ به‌طوری که نوک پیکان، جهت بردار را نشان دهد. هر بردار دارای ابتدا (نقطهٔ اثر) و انتها می‌باشد.



در اینجا لازم است تأکید شود که اندازه و جهت با هم معرف یک کمیت برداری هستند و باید هنگام مقایسهٔ دو بردار، به هر دو مشخصهٔ اندازه و جهت توجه شود.

برای نام‌گذاری بردار، از حروف لاتین استفاده می‌شود و بالای آن، یک پیکان کوچک رسم می‌گردد؛ مثلاً بردار $\vec{\ }$.

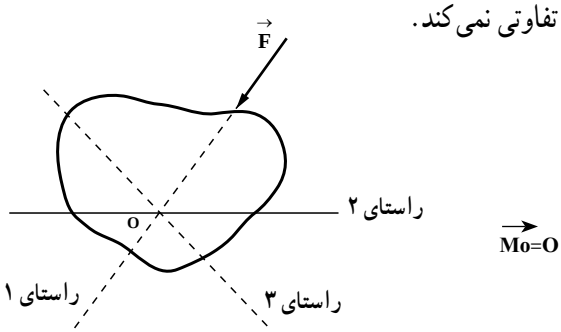
برای نشان دادن اندازهٔ یک کمیت برداری از حروف لاتین بدون پیکان و یا به شکل F استفاده می‌شود.

۹ـ۳ـ۱ـ انواع بردار : عبارت‌اند از ثابت، لغزنده و آزاد

۹ـ۳ـ۱ـ۱ـ بردار ثابت : بردار ثابت، برداری است که راستا، جهت و نقطه اثر آن در فضا ثابت و معین است. نظیر نیروهای وارد بر اجسام انعطاف‌پذیر که اعمال آن در نقاط مختلف اثرات مختلفی دارد و نیروها در مبحث مقاومت مصالح از این دست می‌باشند.

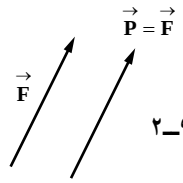
۹ـ۳ـ۱ـ۲ـ بردار لغزنده : برداری است که عمل آن محدود به یک راستای معین در فضا است و نقطه اثر آن می‌تواند در راستای مورد اشاره تغییر کنند. نظیر نیروی وارد بر یک جسم صلب (مباحث استاتیک)

۹ـ۳ـ۱ـ۳ـ بردار آزاد : برداری است که عمل آن محدود به یک راستای معین نباشد. عمده بردارهای لنگر این‌گونه هستند. در شکل زیر بردار لنگر نیروی $\vec{F}$ با راستاهای مختلف نمایش داده شده تفاوتی نمی‌کند.



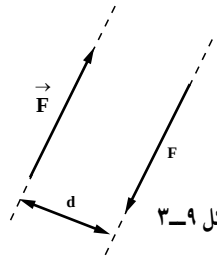
۹ــ۳ــ۲ــ وضعیت دو بردار در فضا : دو بردار در فضا می‌توانند حالت‌های مختلفی به‌شرح زیر داشته باشند :

بردارهای هم‌سنگ (مساوی) : دو بردار وقتی مساوی هستند که هم مقدار، هم‌جهت و هم‌امتداد باشند.



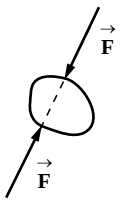
شکل ۹ــ۲

بردارهای زوج : دو بردار وقتی زوج هستند که هم مقدار، هم راستا و مختلف‌الجهت با فاصله از هم (d) باشند.



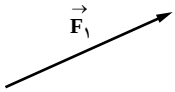
شکل ۹ــ۳

بردارهای متقابل : دو بردار وقتی متقابل هستند که هم مقدار، منطبق بر یک راستا و مختلف‌الجهت (° d) باشند.



شکل ۹ــ۴

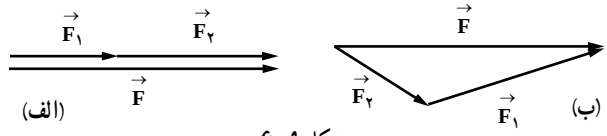
۹ــ۳ــ۳ــ جمع بردارها : چون کمیت‌های برداری علاوه بر اندازه دارای جهت نیز هستند، نباید در جمع و تفریق آنها تنها اندازه‌شان را بر هم افزود، یا از هم کم کرد. زیرا اگر این‌گونه باشد، در حقیقت جهت بردار نادیده گرفته شده است.



دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ رادرنظر بگیرید. منظور از جمع دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$، برداری است که معادل آن دو بردار باشد؛ یعنی بتوان آن را جایگزین دو بردار اوّلیه کرد.

شکل ۹ــ۵

بردار حاصل جمع، یعنی بردار $\vec{F}$ را برآیند دو بردار F_1 و F_2 می‌نامند. به جمع اثر دو یا چند نیرو، برآیند نیروها گویند.

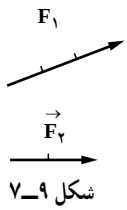


شکل ۹ــ۶

۹ــ۳ــ۴ــ روش تعیین برآیند بردارها : برای تعیین برآیند بردارها به روش ترسیمی، از سه روش استفاده می‌کنیم.

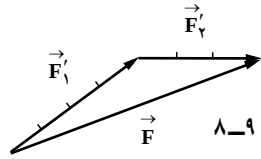
روش مثلث؛ روش متوازی‌الاضلاع و روش چند ضلعی.

تعیین برآیند بردارها به روش مثلث : در این روش، ابتدا برداری هم‌سنگ بردار اوّل و سپس از انتهای بردار اوّل (نوک پیکان بردار اوّل) هم سنگ بردار دوم رسم می‌کنیم. برآیند این دو بردار، برداری است که ابتدای بردار اوّل را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند.



شکل ۹ــ۷

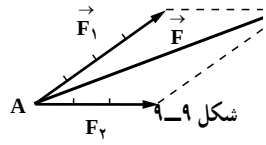
❑**مثال :** دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را طبق شکل در نظر بگیرید. برای تعیین برآیند این دو بردار، چنین عمل می‌کنیم : از نقطه‌ای مانند A، هم‌سنگ $\vec{F}_1$ می‌کشیم و آن را F'_1 می‌نامیم. به همین ترتیب F'_2 را هم‌سنگ $\vec{F}_2$ رسم می‌کنیم. برداری که ابتدای F'_1 را به انتهای F'_2 وصل می‌کند (یعنی $\vec{F}$)، برآیند دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ می‌باشد.



شکل ۹ــ۸

تعیین برآیند بردارها به روش متوازی‌الاضلاع: برای تعیین برآیند دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع، کافی است از نقطه‌ای مثل A هم‌سنگ دو بردار مورد نظر را رسم کنیم (به‌طوری‌که ابتدای هر دو بردار روی نقطهٔ A باشد). سپس از انتهای بردار اوّل به اندازه و موازات بردار دوم و از انتهای بردار دوم به اندازه و موازات بردار اوّل رسم می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاعی حاصل شود. اندازهٔ قطر متوازی‌الاضلاع که از نقطهٔ مادی A شروع می‌شود، اندازهٔ برآیند دو نیروی مورد نظر می‌باشد و جهت آن به‌گونه‌ای است که نقطهٔ A ابتدای بردار برآیند باشد.

برآیند دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ شکل ۹ــ۷ را که به روش متوازی‌الاضلاع به‌دست آمده است در شکل ۹ــ۹ می‌بینیم.

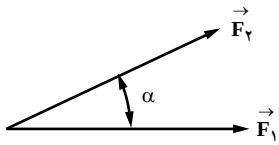


شکل ۹ــ۹

برای به‌دست آوردن اندازهٔ بردار برآیند، طول قطر متوازی‌الاضلاع را اندازه می‌گیریم و با توجه به مقیاس شکل، اندازهٔ برآیند را به‌دست می‌آوریم.

اگر بخواهیم اندازهٔ بردار برآیند را از روش محاسباتی به‌دست آوریم، معادلهٔ آن به شکل زیر است که به قانون کسینوس‌ها معروف است.

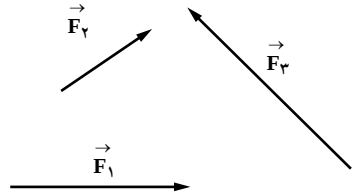
$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$



α زاویهٔ بین دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ است.

جلسهٔ بیست‌وسوم: ادامهٔ بردار و نیرو

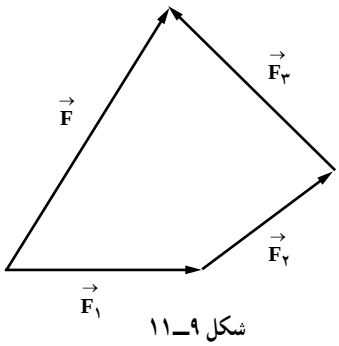
در این جلسه تعیین برآیند چند بردار با استفاده از اصل پشت سرهم‌گذاری که به روش ترسیمی موسوم است، انجام می‌گیرد. برای این منظور بردارهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ را مطابق شکل ۹ــ۱۰ درنظر بگیرید.



شکل ۹ــ۱۰

برای به‌دست آوردن برآیند این بردارها، از یک نقطه برداری هم‌سنگ اوّلین بردار ($\vec{F}_1$) رسم می‌کنیم.

از انتهای آن به همین روش، هم‌سنگ دومین بردار ($\vec{F}_2$) را می‌کشیم و به همین ترتیب، هم‌سنگ بردار $\vec{F}_3$ را رسم می‌کنیم.



شکل ۹ــ۱۱

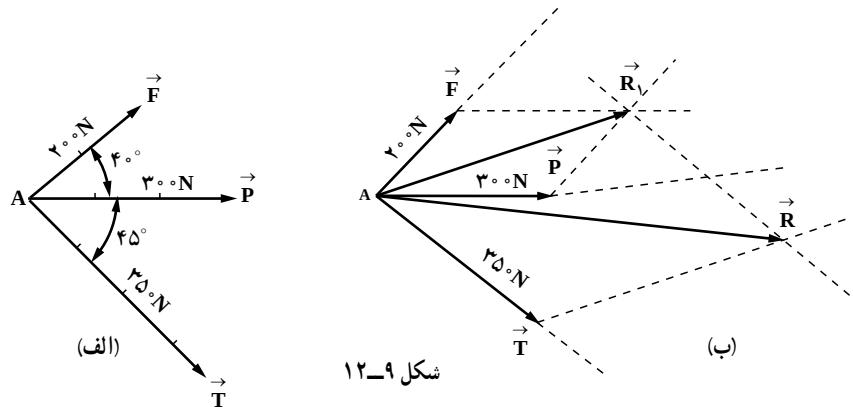
برداری که ابتدای اوّلین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل می‌کند، حاصل جمع (برآیند) بردارها است و می‌نویسیم :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

تذکر : برای تعیین برآیند چند نیرو می‌توانیم روش متوازی‌الاضلاع را نیز به‌کار ببریم، یعنی برآیند بردارها را دو به‌دو به‌دست آوریم و سپس بین برآیندها هم دو به دو برآیند جدید را پیدا کنیم، این عمل را آن‌قدر ادامه دهیم تا همهٔ نیروها در عمل وارد شوند و برآیند نهایی به‌دست آید.

تحلیل مثال حل شدهٔ کتاب در صفحه ۱۲۳ :

مثال : در شکل ۹ــ۱۲ سه نیرو $\vec{F}$ ، $\vec{P}$ و $\vec{T}$ با اندازه‌های F ۲۰۰ N، P ۳۰۰ N و T ۳۵۰ N با جهت داده شده بر نقطهٔ مادی A وارد می‌شود، برآیند آنها را تعیین کنید.



شکل ۹ــ۱۲

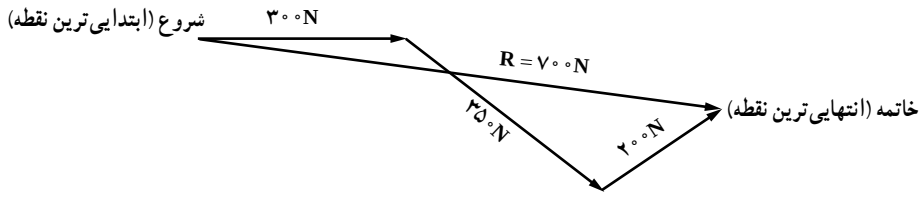
در شکل ۹ــ۱۲ــ الف نیروها به نقطهٔ مادی A وارد شده‌اند. به شکل ۹ــ۱۲ ــ ب توجه کنید. در این قسمت نقطهٔ A را در نظر گرفته فرض کنید همان شکل ۹ــ۱۲ــ الف است. از انتهای بردار $\vec{P}$ به موازات $\vec{F}$ و از انتهای بردار $\vec{F}$ به موازات $\vec{P}$ ترسیم شده است. برآیند دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{F}$ قطر متوازی‌الاضلاع است که در شکل ۹ــ۱۲ــ ب آن را $\vec{R}_1$ نامیده‌ایم. حالا $\vec{R}_1$ را با بردار $\vec{T}$ در نظر بگیرید و میان این دو ــ یعنی $\vec{R}_1$ و $\vec{T}$ ــ مقدار برآیند را به‌دست آورید. با رسم متوازی‌الاضلاع، قطر آن برآیند خواهد بود که در شکل ۹ــ۱۲ ــ ب آن را $\vec{R}$ نامیده‌ایم. اگر طول R را اندازه بگیریم، طول بردار $\vec{R}$ به‌دست خواهد آمد که اندازهٔ آن با خط‌کش ۷ سانتی‌متر است. چون هر سانتی‌متر را ۱۰۰ نیوتن در نظر گرفته‌ایم، پس اندازهٔ R مساوی ۷۰۰ نیوتن می‌باشد.

اگر چندین بردار دیگر وجود داشت، این عمل را آن‌قدر ادامه می‌دادیم تا برآیند همهٔ آنها به‌دست آید.

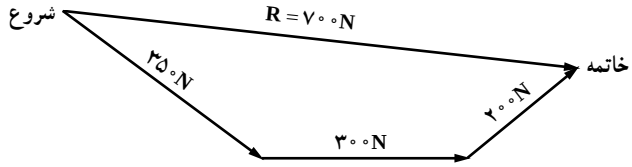
تحلیل مثال : در این مثال سه نیرو مطابق داده شده‌اند که می‌توان به‌طریق زیر آنها را با هم جمع کرد

الف) اصل پشت سرهم گذاری :

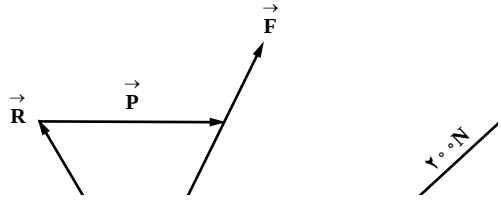
مدل اول :



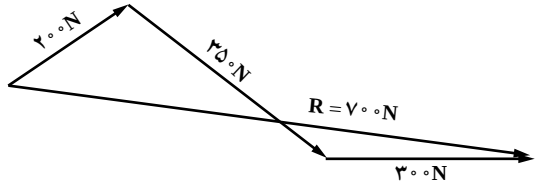
مدل دوم :



مدل سوم :



مدل چهارم :

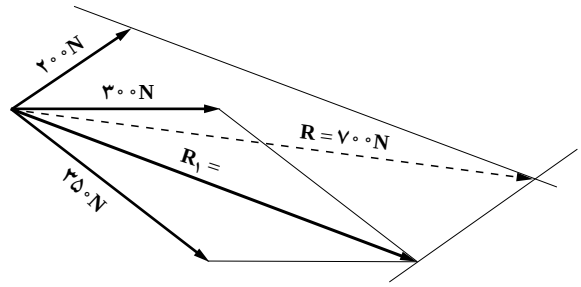


با ترسیم مدل‌های دیگر نتیجه یکسان است و نکته مهم هم مقدار و موازی بودن برآیندها در تمام مدل‌ها است.

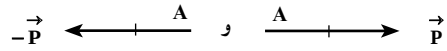
ب) روش تشکیل متوازی‌الاضلاع : در این حالت با تعیین برآیند دو بردار دلخواه و سپس جانشین نمودن برآیند به‌جای دو بردار یاد شده (روش حذفی)، در مرحله بعدی با برآیندگیری از یک بردار و برآیند جانشین شده می‌توان به برآیند سه بردار دست یافت که با ادامهٔ این روش برآیند مجموعه تعیین می‌گردد.

در مثال ابتدا بین بردارهای ۲۰۰ و ۳۰۰ نیوتنی برآیند تعیین شده و سپس حاصل آن برآیند با بردار ۳۵۰ نیوتنی برابر برآیند کلی شده است.

نکته : در این روش بهتر است ابتدا برآیند دو برداری محاسبه شود که زاویهٔ نسبتاً بزرگی داشته باشند تا خط زیاد نشود.



۹ــ۳ــ۵ــ بردار منفیِ یک بردار : بردار منفی یک بردار از لحاظ اندازه با آن برابر بوده دارای راستا و نقطهٔ اثر مشترک می‌باشد و فقط از لحاظ جهت تفاوت دارد. به شکل ۹ــ۱۳ توجه کنید.



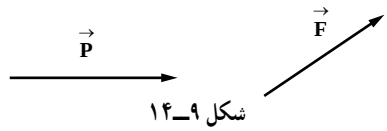
شکل ۹ــ۱۳

بردار $\vec{R}$ در نقطهٔ A اثر می‌کند. اگر بردار $-\vec{P}$ را در نظر بگیریم و فرض کنیم در نقطهٔ A اثر می‌کند، آن‌گاه $\vec{R}$ و $-\vec{P}$ دو بردار منفی یکدیگرند به‌عبارت دیگر، جای مبدأ و انتها تغییر یافته است.

۹ــ۳ــ۶ــ تفاضل دو بردار : برای به‌دست آوردن تفاضل دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{F}$ یعنی $\vec{P}-\vec{F}$ لازم است که برآیند دو بردار $\vec{P}$ و $(-\vec{F})$ را به‌دست آوریم.

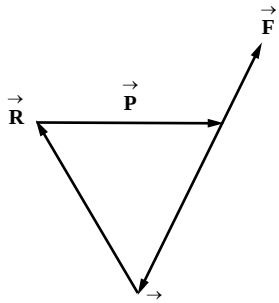
تحلیل مثال صفحه ۱۲۵ کتاب درسی :

تفاضل دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{F}$ در شکل ۹ــ۱۴ را به‌دست می‌آوریم.



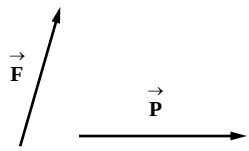
شکل ۹ــ۱۴

مطابق شکل ۹ــ۱۵ برآیند بردار $\vec{P}$ و $-\vec{F}$ را از روش مثلث به‌دست می‌آوریم. بردار $\vec{R}$ حاصل تفاضل دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{F}$ است.



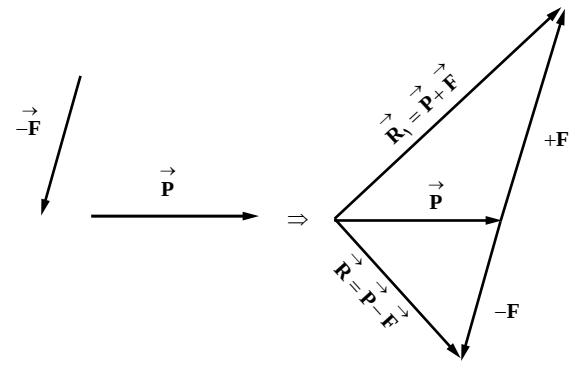
شکل ۹ــ۱۵

تحلیل مثال : در تفاضل دو بردار کافی است جهت بردار کسر شونده (با علامت منفی پشت آن) عوض شود و پس از قانون جمع برای آنها استفاده کرد.



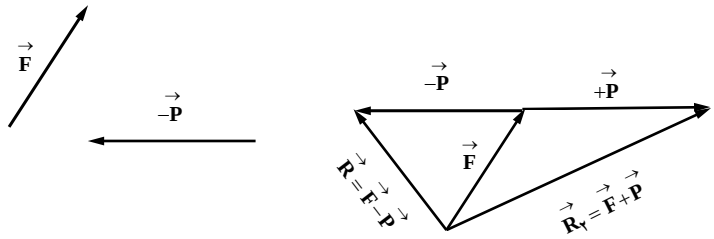
الف) تفاضل $(\vec{P}-\vec{F})$:

$$\vec{R}=\vec{P}-\vec{F}=\vec{P}+(-\vec{F})$$



ب) تفاضل $(\vec{F}-\vec{P})$:

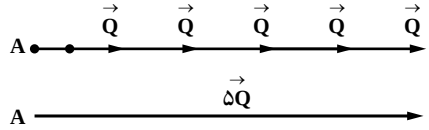
$$\vec{R}=\vec{F}-\vec{P}=\vec{F}+(-\vec{P})$$



نکته : برآیند حاصل از $(\vec{P}-\vec{F})$ و $(\vec{F}-\vec{P})$ را باهم مقایسه نمایید و اختلاف آنها را از نظر جهت و مقدار توصیف نمایید.

۹ــ۳ــ۷ــ حاصل‌ضرب یک بردار در یک عدد : فرض کنید بردار $\overrightarrow{AQ}$ را داریم و می‌خواهیم آن را در عدد ۵ ضرب کنیم.

پس باید در همان جهت بردار $\vec{Q}$ ، پنج بار بردار $\vec{Q}$ را دنبال هم ترسیم کنیم. پاسخ نهایی $5\vec{Q}$ خواهد شد. به شکل ۹ــ۱۶ توجه کنید :



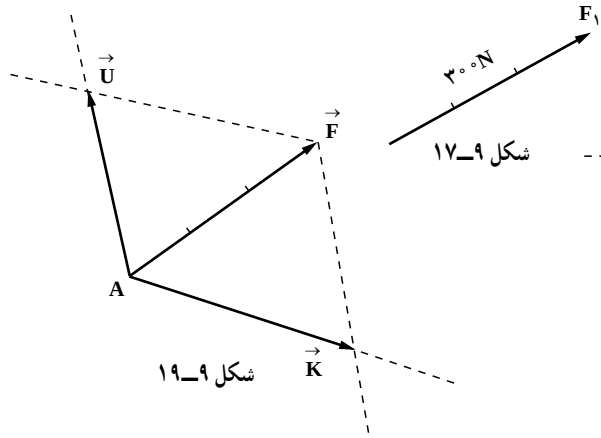
شکل ۹ــ۱۶

حاصل‌ضرب یک بردار در یک عدد برابر برداری است که بزرگی آن برابر با عدد مورد نظر ضرب در مقدار بردار است.

توجه : در ضرب بردارها، به غیر از حاصل‌ضرب یک بردار در یک عدد، حاصل‌ضرب یک بردار در یک بردار دیگر نیز کاربرد فراوانی دارد. البته با توجه به استفادهٔ زیاد آن در مباحث ایستایی، مطالب مورد نیاز آن به‌طور مفصل در کتاب ایستایی مطرح شده است.

۹ــ۳ــ۸ــ تجزیهٔ یک بردار : همان‌گونه که می‌توانیم برآیند دو بردار را به‌دست آوریم، می‌توانیم یک بردار را به دو مؤلفه نیز تجزیه کنیم. این دو مؤلفه باید چنان باشند که اگر برآیند دو مؤلفه را به‌دست آوریم، به همان برداری برسیم که آن را تجزیه کرده بودیم. برای مثال، بردار $\vec{F}$ را در نظر

بگیرید (شکل ۹ــ۱۷). می‌توان آن را به‌صورت شکل‌های ۹ــ۱۸ یا ۹ــ۱۹ تجزیه کرد.

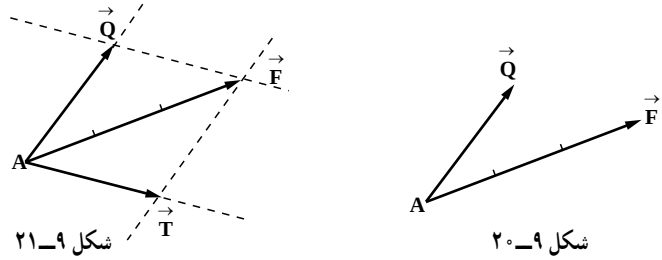


شکل ۹ــ۱۹ شکل ۹ــ۱۷ شکل ۹ــ۱۸

باید توجه داشت که یک بردار را می‌توان به حالت‌های مختلف زیادی تجزیه کرد. از بین تمامی این حالت‌ها، دو حالت خاص بسیار اهمیت دارد.

حالت اوّل: بردار $\vec{F}$ را می‌خواهیم تجزیه کنیم؛ اما یکی از مؤلفه‌ها معلوم است. فرض کنید می‌خواهیم یکی از مؤلفه‌ها بردار $\vec{Q}$ باشد که در این صورت معلوم است مؤلفهٔ دیگر چقدر می‌شود به شکل ۹ــ۲۰ نگاه کنید.

در شکل ۹ــ۲۱ اگر از انتهای $\vec{Q}$ به انتهای $\vec{F}$ وصل کنیم، هم‌سنگ بردار $\vec{T}$ به‌دست می‌آید؛ به‌نحوی که برآیند $\vec{Q}$ و $\vec{T}$ بردار $\vec{F}$ خواهد بود. پس $\vec{T}$ پاسخ است؛ بنابراین در شکل ۹ــ۲۱ از نقطهٔ دلخواه A بردار $\vec{F}$ و بردار $\vec{Q}$ را هم‌سنگ با بردارهای شکل ۹ــ۲۰ رسم می‌کنیم. در این شکل از A بردار $\vec{T}$ را رسم می‌کنیم، پس $\vec{F}$ به دو مؤلفهٔ $\vec{T}$ و $\vec{Q}$ تجزیه شده است؛ زیرا برآیند $\vec{T}$ و $\vec{Q}$ بردار $\vec{F}$ است.



شکل ۹ــ۲۰ شکل ۹ــ۲۱