

ج) شامل دو مثلث، به طوری که یکی از آنها قائم الزاویه (و ساده) و دیگری غیرقائم الزاویه و تعیین مساحت آن اندکی وقت گیر است که توصیه می شود با کمی دقت از تقسیم بندی هایی استفاده کرد که:

۱- کمترین تعداد تقسیمات را داشته باشند.

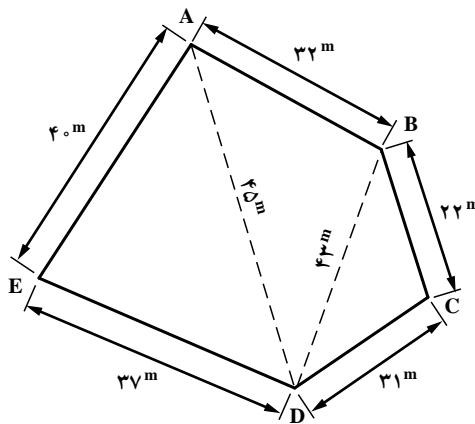
۲- اجزاء، ساده ترین رابطه را جهت تعیین مساحت داشته باشند.

۳- از ابعاد کلی (و داده شده) برای اجزاء بهره گرفته باشد (نیازی به محاسبه طول های جدید و وترها

نباشد). به عنوان نمونه در تقسیم بندی چهارضلعی فوق الذکر، تقسیم بندی ب) و ج) هر دو مثالی است اما تقسیم بندی ب) از ج) ساده تر و عملیات آن کمتر می باشد که به طور یقین دقت آن افزایش می یابد.

تحلیل مثال صفحه ۵۶ و ۵۷ کتاب درسی :

مثال : یک زمین به شکل پنج ضلعی غیرمنتظم ABCDE (شکل ۲۳) داریم. طول اضلاع و طول دو قطر آن اندازه گیری شده است. مساحت این چندضلعی چندمتر مربع است؟



شکل ۲۳

حل : مساحت این پنج ضلعی برابر است با :

$$S_{ABCDE} = S_{ADE} + S_{ADB} + S_{BDC}$$

$$S_{ADE} = \sqrt{p(p-40)(p-37)(p-45)} \quad , \quad p = \frac{37+40+45}{2} = 61$$

$$S_{ADE} = \sqrt{61(61-40)(61-37)(61-45)} = \sqrt{491904}$$

$$S_{ADE} = 701/36 \text{ m}^2$$

$$S_{ADB} = \sqrt{p(p-45)(p-43)(p-32)} \quad , \quad p = \frac{45+43+32}{2} = 60$$

$$S_{ADB} = \sqrt{60(60-45)(60-43)(60-32)} = \sqrt{428400}$$

$$S_{ADB} = 654/52 \text{ m}^2$$

$$S_{BDC} = \sqrt{p(p-43)(p-31)(p-22)} \quad , \quad p = \frac{43+31+22}{2} = 48$$

$$S_{BDC} = \sqrt{48(48-43)(48-31)(48-22)} = \sqrt{106080}$$

$$S_{BDC} = 325/70 \text{ m}^2$$

مساحت پنج ضلعی

$$S_{ABCDE} = 701/36 \text{ m}^2 + 654/52 \text{ m}^2 + 325/70 \text{ m}^2 + 1681/58 \text{ m}^2$$



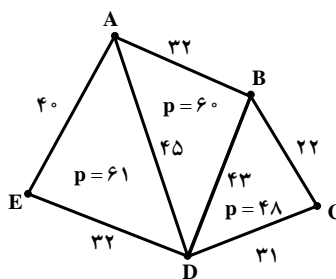
تحلیل مثال : در این مثال طول قطرهای AD و BD داده شده‌اند و لذا کافی است

کنترل نماییم که آیا مثلث یا مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند یا خیر؟

در مثلث ADE برای قائمه بودن زاویه E باید رابطه زیر برقرار باشد :

$$AE^2 + ED^2 = AD^2$$

$$40^2 + 37^2 = AD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{40^2 + 37^2} = 54/49 \pm 45$$



پس این مثلث قائم‌الزاویه نیست. به طریق مشابه برای

سایر مثلث‌ها می‌توان ثابت کرد که آنها هم قائم‌الزاویه نیستند،

لذا راه حل ساده استفاده از رابطه مثلث غیر مشخص (نصف

محیط) است که در حل مثال از این رابطه استفاده شده

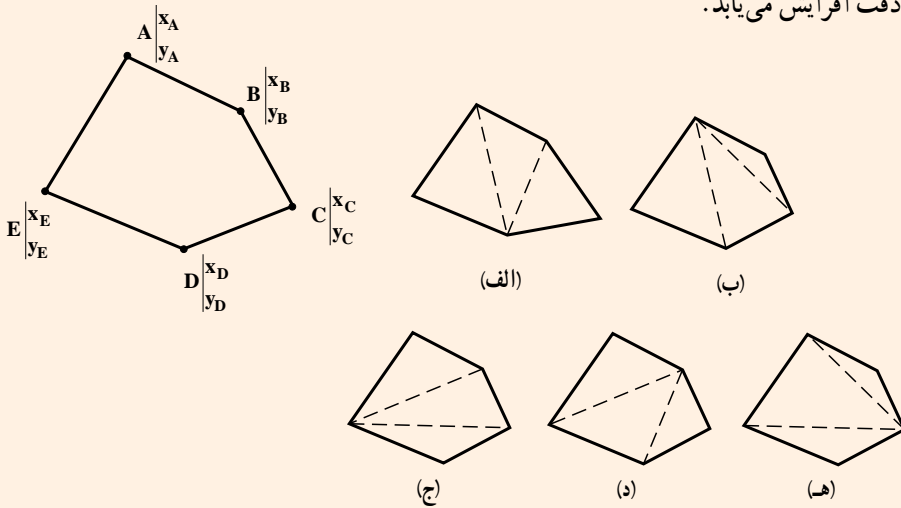
است و برای سهولت و پرهیز از اشتباه می‌توان نصف محیط

مثلث‌ها (P) را درون مثلث مربوطه نوشت و سپس از رابطه

رادیکالی برای تعیین مساحت استفاده کرد.

$$S_{ADE} = \sqrt{61(61-40)(61-37)(61-45)} = 701/36 \text{ m}^2$$

در صورتی که مختصات نقاط داده شده باشند به دلیل اینکه به راحتی می توان فاصله بین دو نقطه (طول وترهای مختلف) را محاسبه نمود می توان برای شکل زیر تقسیم بندی های مختلفی را نمایش داده که بهترین تقسیم بندی، تقسیم بندی با شبکه مثلثی است به گونه ای که طول اضلاع مثلث ها خیلی اختلاف با هم نداشته باشند، زیرا برای ترسیم آن (حتی برداشت) دقت افزایش می یابد.



در تقسیم بندی های (الف) و (د) به دلیل اینکه اختلاف بین اضلاع مثلث های حاصل شده زیاد نیست، مناسب ترین تقسیم بندی، صورت گرفته است. باید دقت داشت که برای تعیین طول بین دو نقطه با مختصات صفحه ای از رابطه زیر استفاده می شود:

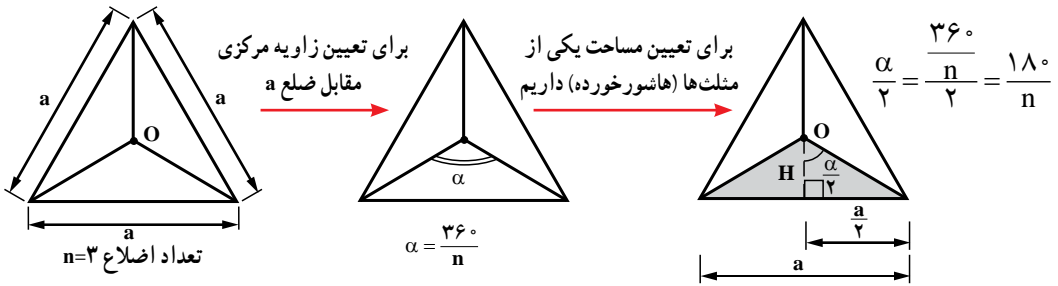
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad \text{و در فضای سه بعدی}$$

۴-۳-۲- مساحت چندضلعی منتظم: برای کلیه چندضلعی های منتظم که یک نقطه مرکزی

دارند، نظیر مثلث متساوی الاضلاع، مربع، پنج ضلعی، شش ضلعی و ... می توان به صورت زیر رابطه ای برحسب طول ضلع خارجی آنها اثبات نمود و برای کلیه چندضلعی های منتظم از آن بهره گرفت.

□ مثال: رابطه‌ای برای تعیین مساحت سه ضلعی منتظم مطابق شکل مقابل را اثبات کنید.



مساحت مثلث هاشور خورده $S_1 = \frac{H \times a}{2}$: برای تعیین عمود H داریم: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{H} \Rightarrow H = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$

$$H = \frac{a^2}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow \text{مساحت مثلث هاشور خورده } S_1 = \frac{H \times a}{2} = \frac{\frac{a^2}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} \times a}{2} = \frac{a^3}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

به دلیل اینکه در یک n ضلعی، n مثلث (متساوی الاضلاع یا متساوی الساقین) وجود دارد، مساحت کلی n ضلعی برابر است با:

$$S_n = n (S_1) = \frac{n \cdot a^3}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

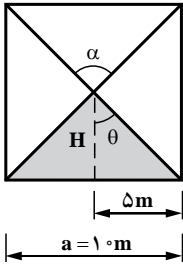
تحلیل و بررسی مثال‌های صفحه ۵۸ کتاب درسی

مثال: مساحت مربعی به طول ۱ متر برابر است با:

$$S = \frac{4}{4} \times \frac{1^2}{\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{4}} = 1 \times \frac{1^2}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{1^2}{1} = 1 \text{ m}^2 \quad \boxed{n=4}$$

تحلیل و بررسی: در این مثال یک چهارضلعی منتظم (مربع) مدنظر است که واضح است، مساحت آن از طریق رابطه $S = \frac{a^3}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$ به دست می‌آید اما از طریق رابطه

اثبات شده برای چندضلعی‌ها (با n) داریم:



$$S = n \frac{a^2}{4 \operatorname{tg} \frac{18^\circ}{n}} = 4 \times \frac{1.0^2}{4 \operatorname{tg} \frac{18^\circ}{4}} = 1.0^2 = 1.0 \cdot \text{m}^2$$

$$\theta = \frac{36^\circ}{n} \quad \alpha = \frac{\theta}{2} = \frac{n}{2} = \frac{18^\circ}{n}$$

$$\alpha = \frac{18^\circ}{4} = 4.5^\circ \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 4.5^\circ = \frac{5}{H}$$

از آنجایی که $1 \operatorname{tg} 4.5^\circ$ می‌توان نتیجه گرفت که $H = 5 \text{m}$

$$S_{\text{کلی}} = 4 \times \frac{1.0 \times 5}{2} = 10 \cdot \text{m}^2$$

مثال: طول ضلع یک ۸ضلعی منتظم 45m است، مساحت آن چند متر مربع است؟

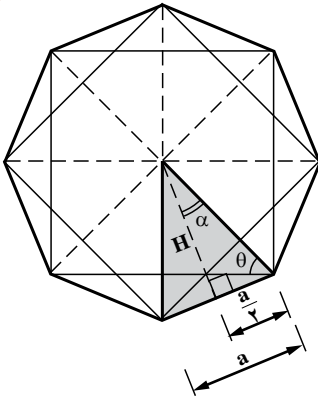
$$S = \frac{na^2}{4 \operatorname{tg} \frac{18^\circ}{n}}, \quad n = 8, \quad a = 45 \text{m}$$

حل: داریم:

$$S = \frac{8 \times 45^2}{4 \times \operatorname{tg} \frac{18^\circ}{8}} = \frac{2 \times 45^2}{\operatorname{tg} 2.25^\circ} = \frac{4050}{0.4142} = 9777 / 885 \text{m}^2$$



تحلیل و بررسی:



$$\alpha = \frac{18^\circ}{n} \quad \text{یا} \quad \frac{36^\circ}{2}$$

به طریق مشابه در مثال قبلی می‌توان مساحت قسمت هاشور

خورده را با تعیین زاویه $\alpha = \left(\frac{18^\circ}{n}\right)$ و عمود $H = \left(\frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}\right)$

$$\text{از رابطه } S_1 = \frac{a.H}{2} = \frac{a^2}{4 \operatorname{tg} \frac{18^\circ}{n}}$$

به دلیل اینکه $n = 8$ است، تعداد هشت مثلث وجود دارد (همواره تعداد مثلث‌ها برابر n هستند)، که مساحت کلی هشت ضلعی برابر است با:

$$S_8 = n \frac{a^2}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} = 8 \times \frac{45^2}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{8}}$$

$$S_8 = \frac{8 \times 45^2}{4 \operatorname{tg} 22.5^\circ} = 9777.56 \text{ m}^2$$

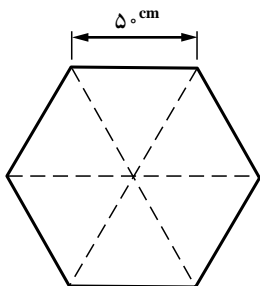
$$H = \frac{45}{2} \operatorname{tg} 67.5^\circ = 54.32$$

$$S_1 = \frac{a \times H}{2} = \frac{45 \times 54.32}{2} = 1222.2 \text{ m}^2$$

$$S_8 = 8S_1 = 8 \times 1222.2 / 2 = 9777.6 \text{ m}^2$$

نکته: در هشت ضلعی فوق با کمی دقت می‌توان دریافت که مثلث‌های ایجاد شده از نوع متساوی‌الساقین می‌باشند و برای محاسبه هر کدام رابطه $\frac{a \cdot H}{2}$ برقرار است که می‌توان با ضرب آن در تعداد مثلث‌ها ($n = 8$) مساحت کلی را یافت. همچنین براساس مطلب ذکر شده در بند ۲-۳ صفحه ۲۷ کتاب درسی اقدام به تعیین زاویه θ نمود که با داشتن آن می‌توان H را برحسب α تعیین و اقدام به محاسبه مثلث نمود. در شکل هاشور خورده:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{8} = 22.5^\circ \Rightarrow \theta = 180^\circ - (90^\circ + 22.5^\circ) = 67.5^\circ \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{H}{\frac{a}{2}} \quad H = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \theta$$



شکل ۲۷

۴- مقطع یک ستون بتن آرمه مطابق شکل ۲۷ به صورت یک شش ضلعی منتظم به طول هر ضلع 5° سانتی‌متر است. سطح مقطع ستون را برحسب سانتی‌متر مربع و مترمربع به دست آورید.



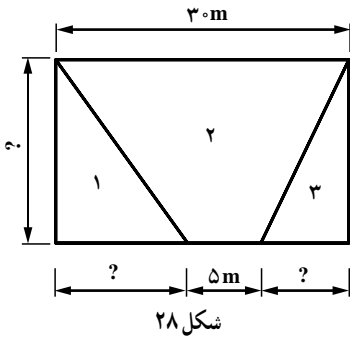
$$S_n = n \frac{a^2}{4 \operatorname{tg} \frac{18^\circ}{n}}$$

حل:

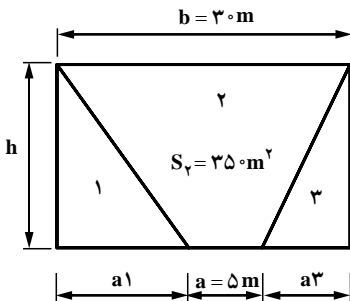
$$n = 6, a = 50 \text{ cm}$$

$$S_6 = 6 \times \frac{50^2}{4 \operatorname{tg} \frac{18^\circ}{6}} = 6 \times \frac{2500}{4 \times \operatorname{tg} 3^\circ}$$

$$S_6 = 6495/19 \text{ cm}^2 \text{ مساحت بر حسب سانتی متر مربع}$$



۵- زمینی مطابق شکل ۲۸ باید بین ۳ نفر تقسیم شود. اگر مساحت شکل (۲) برابر 35° متر مربع و مساحت شکل (۱)، $1/5$ برابر مساحت شکل (۳) باشد، اندازه‌های مجهول روی شکل را بر حسب متر به دست آورید.



حل: شکل مقابل، یک دوزنقه به قاعده‌های ۵ و ۳۰ متر است که ارتفاع آن (h) را می‌توان بر حسب مساحت داده شده تعیین نمود.

$$S_T = \frac{a+b}{2} \cdot h \Rightarrow S_T = \frac{5+30}{2} \times h = 35^\circ \quad 17/5h = 35^\circ \quad h = 20 \text{ m}$$

برای دو مثلث ۱ و ۳ می‌توان بر اساس شرایط زیر اقدام به محاسبه ابعادشان (a_1 و a_3) نمود.

۱- مساحت مثلث ۱، $1/5$ برابر مثلث ۳ است. $A_1 = 1/5 A_3$

۲- مجموع مساحت مثلث‌های ۱ و ۳ برابر است با:

$$A_1 + A_3 = 30 \times 20 = 350 = 250 \text{ m}^2$$

۳- چون ارتفاع دو مثلث (h) یکسان است پس می‌بایست نسبت قاعده مثلث ۱، $1/5$

برابر قاعده مثلث ۳ باشد. $a_1 = 1/5 a_3$

۴- در صورتی که مساحت مثلث کوچک‌تر A فرض شود، مساحت مثلث بزرگ‌تر که

$1/5$ برابر آن است برابر $1/5 A$ خواهد بود و مساحت هر دو مثلث برابر $2/5 A$ می‌باشد. از

طرفی در بند ۲ ملاحظه شد که مساحت این دو مثلث برابر 250 متر مربع می‌باشد پس مساحت

مثلث کوچک‌تر برابر می‌شود با: $A = \frac{250}{2/5} = 100 \text{ m}^2$ $2/5 A = 250$

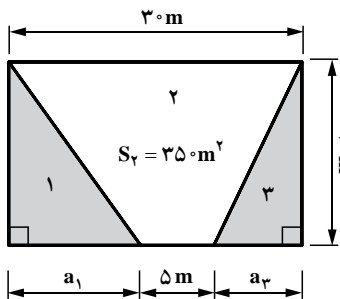
و به تبع آن مساحت مثلث بزرگ‌تر برابر 150 m^2 خواهد بود که براساس آن

می‌توان ابعاد را تعیین نمود.

۵- جمع دو قاعده $(a_1 + a_3)$ برابر است با 25 متر.

$$a_1 + a_3 = 25 \text{ m}$$

تعیین ابعاد مجهول مثلث‌ها (a_3, a_1) :



$$A_1 = 1/5 A_3$$

$$\frac{20 \times a_1}{2} = 1/5 \frac{20 \times a_3}{2}$$

$$a_1 = 1/5 a_3 \quad (1)$$

براساس بند ۵ داریم:

$$a_1 + a_3 = 25 \text{ m} \quad (2)$$

با جایگزینی رابطه (۱) در (۲) داریم:

$$1/5 a_3 + a_3 = 25 \text{ m} \quad 2/5 a_3 = 25$$

$$a_3 = \frac{25}{2/5} = 10 \text{ m} \Rightarrow$$

با جایگذاری در رابطه (۲) داریم:

$$a_1 + a_3 = 25 \Rightarrow a_1 = 25 - 10 = 15 \text{ m}$$

کنترل صحت ابعاد محاسبه شده :

$$S_1 = \frac{20 \times 15}{2} = 150 \text{ m}^2 \text{ برای مثلث ۱}$$

$$S_3 = \frac{20 \times 10}{2} = 100 \text{ m}^2 \text{ برای مثلث ۳} \quad \frac{S_1}{S_3} = \frac{150}{100} = 1/5 \Rightarrow S_2 = 1/5 S_3$$

از طرفی کل مساحت اجزاء برابر 600 m^2 است پس :

$$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad 600 \text{ m}^2 \Rightarrow 150 \quad 350 \quad 100 \quad 600 \text{ m}^2$$

۶- طول دیوار حایل نشان داده شده در شکل ۲۹، ۲۵ متر است.

الف) سطح مقطع دیوار را محاسبه کنید. m^2

ب) چنانچه دیوار از بتن ساخته شود، برای قالب‌بندی آن چند متر مربع تخته لازم است؟ (مقدار افت برابر 20% منظور شود.)

راهنمایی: نسبت مقدار مصالح تلف شده به مقدار مصالح مصرف شده را اُفت گویند.

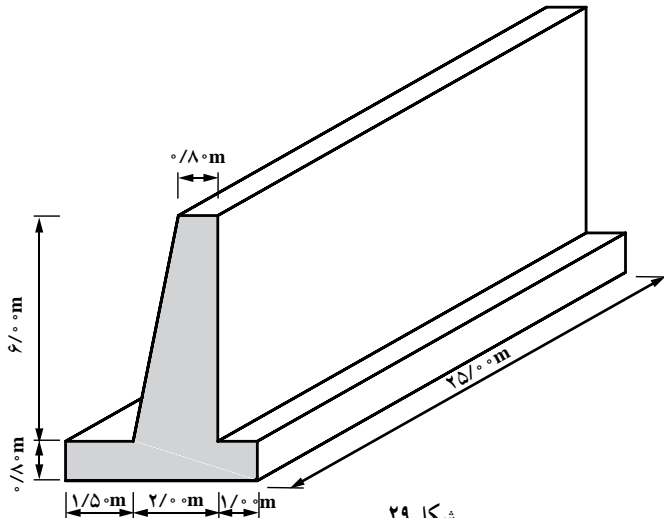
مقدار مصالح تلف شده

اُفت

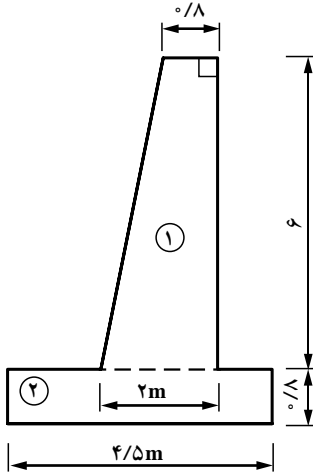
مقدار مصالح مصرف شده

ب) نظر به اینکه تاکنون حجم‌شناسی را نگذرانده‌اید؛ آیا می‌توانید حجم دیوار را محاسبه

کنید؟



شکل ۲۹



حل: برای حل از تقسیم سطح به اجزاء منظم استفاده می‌شود.

الف) سطح مقطع دیوار:

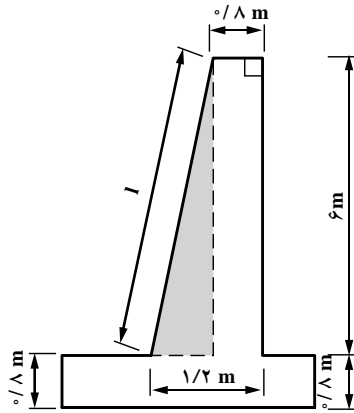
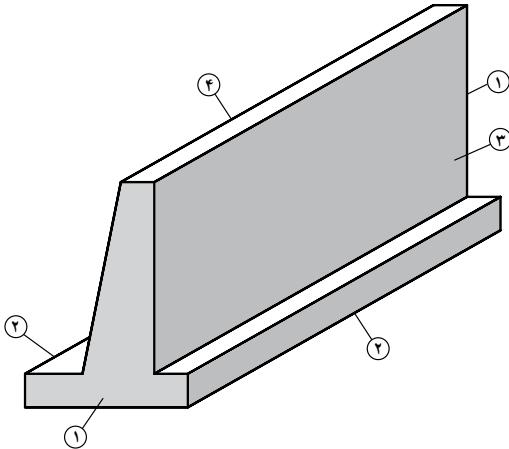
$$S_1 = \frac{2 + 0.8}{2} \times 6 = 8.4 \text{ m}^2$$

$$S_2 = 4.5 \times 0.8 = 3.6 \text{ m}^2$$

$$S = S_1 + S_2 = 8.4 + 3.6 = 12 \text{ m}^2$$

ب) مساحت قالب‌بندی با احتساب ۲۰ درصد افت: به دلیل اینکه، اینگونه دیوارها

در دو مرحله ساخته می‌شوند (مرحله اول پاشنه یا پی و مرحله دوم دیوار) نیازی به قالب‌بندی سطوح افقی ندارند. و اگر انتهای دیوار (دوگله) آزاد باشد، نیاز به قالب‌بندی است. عموماً به منظور جلوگیری از جذب آب بتن توسط خاک، بهتر است دو گله هم قالب‌بندی شوند.



سطوحی که نیاز به قالب‌بندی دارند با شماره و هاشور نمایش داده شده‌اند که در ادامه مساحت آنها محاسبه می‌شود.

$$l = \sqrt{1.2^2 + 6^2} = 6.12 \text{ m}$$

سطح (سطوح) شماره ۱: مساحت این مقطع در بند الف تعیین شد و چون دو کله با مساحت یکسان داریم پس:

$$24m^2 = 2 \times 12 \times S_1 \quad 2S_1$$

سطح (سطوح) شماره ۲: یک سطح مستطیلی است که در دو انتهای پی (با فرض آزاد بودن دیوار از هر دو طرف) امتداد یافته است.

$$40m^2 = 2 \times (25 \times 0.8) \times S_2 \quad 2S_2$$

سطح (سطوح) شماره ۳: این سطح کاملاً بر پی عمود است و طول آن ۶ متر می باشد که تنها یک نمونه از آن موجود است و نمونه مشابه ندارد.

$$150m^2 = 6 \times 25 \times S_3$$

سطح (سطوح) شماره ۴: ارتفاع این سطح به علت شیبدار بودن با سطح مقابل آن (سطح شماره ۳) متفاوت است و بر اساس قضیه فیثاغورث تعیین می شود.

$$153m^2 = 25 \times 6/12 \times S_4$$

مساحت کلی قالب بندی

$$367m^2 = S_{\text{کل}} + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + 24 + 40 + 150 + 153$$

$$73/4m^2 = 367 \times 0.2\% \quad 367 \times 0.2$$

$$440/4m^2 = 367 + 73/4 \quad \text{تخته مورد نیاز با احتساب افت}$$

برای محاسبه تخته (قالب) با احتساب درصد افت کافی از رابطه زیر که قبلاً اثبات شد، استفاده می نمایم.

$$440/4m^2 = (1 - n) S \quad S \text{ مقدار تخته مورد نیاز با احتساب افت}$$

(پ) برای تعیین حجم می توان از رابطه کلی زیر استفاده کرد.

$$V = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}$$

$$V = 12 \times 25 \times 300m^3$$

روش محاسبه عدد π توسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی



محاسبات به کمک دو کثیرالاضلاع منتظم محاطی و محیطی که عده اضلاع هریک از آنها $۸۰۵۳۰۶۳۶۸ \times (۲)^{۲۸}$ ضلعی است و از تقسیم محیط این کثیرالاضلاع بر قطر دایره آن، عدد پی را محاسبه کرده است و کاشانی مقدار تقریبی ۲π را در دستگاه شصت‌گانی مساوی ۱، ۲۸، ۵۹، ۱۶، ۶، ۲π ۱۴، ۴۶، ۵۱، ۳۴ در نظر گرفته و سپس آن را به کسرهای اعشاری که اختراع نوینی بوده تبدیل کرد.

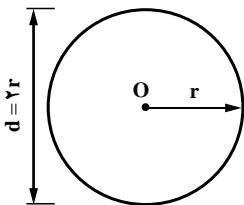
$$۲\pi \quad ۶/۲۸۳۱۸۵۳۰۷۱۷۹۵۸۶۵$$

$$\pi \quad ۳/۱۴۱۵۲۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳$$

در این جلسه دانش‌آموزان با نحوه محاسبه مساحت دایره، حلقه، قطعه دایره و قطاع آشنایی پیدا می‌کنند. همچنین با کاربرد محاسبه مساحت دایره‌های محاطی و محیطی، چندضلعی‌ها و مثلث که در مهندسی عمران، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند آشنا می‌شوند.

در این جلسه روابط مربوط به محاسبه سطح جانبی برخی احجام منتظم اثبات می‌شوند، که ضرورت دارد نتیجه روابط توسط دانش‌آموزان حفظ شوند.

۵-۴- محاسبه مساحت دایره و بیضی

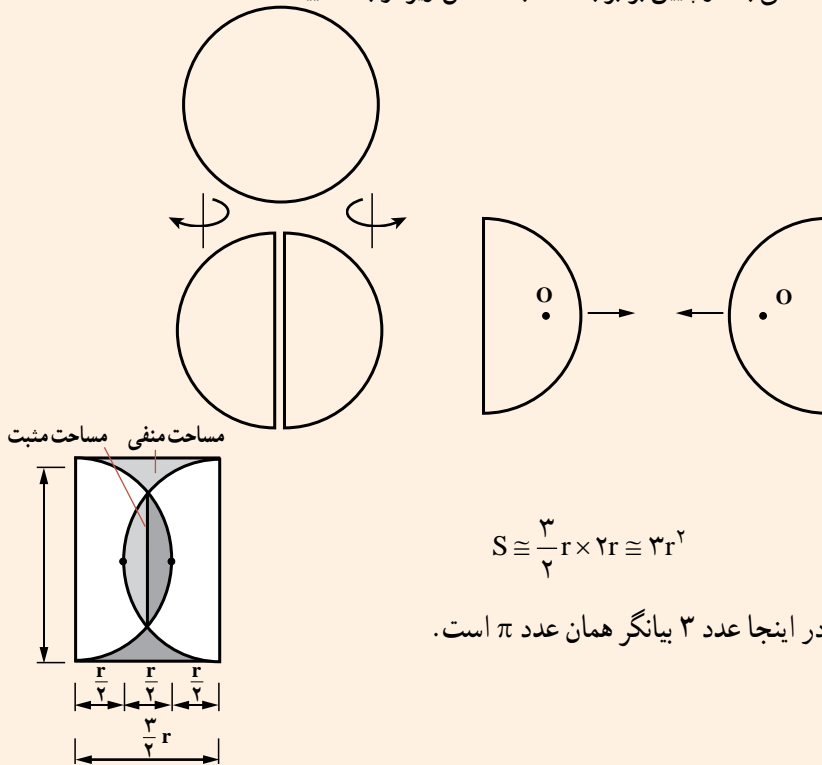


۵-۴-۱- مساحت دایره به شعاع r برابر است با: $S = \pi r^2$

$$\Rightarrow r = \frac{d}{۲} \Rightarrow S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{۲}\right)^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{۴}$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{۴}$$

محاسبه مساحت تقریبی دایره (به روش هندسی): اگر دایره‌ای به شعاع r را به گونه‌ای تجزیه کنیم که بتوانند در مستطیلی قرار گیرند، مساحت حاصل از مستطیل با مساحت دایره برابر است. برای این کار دایره را به دو نیمه (از محور قائم) تقسیم می‌کنیم و سپس با انعکاس آینه‌ای دو سطح را به اندازه‌ای داخل هم حرکت می‌دهیم که مساحت‌های تلاقی با مساحت خالی بالا و پایین برابر باشند. به اشکال زیر توجه نمایید.

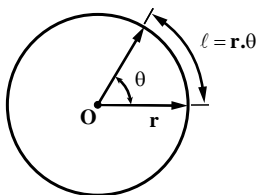


$$S \cong \frac{3}{2}r \times 2r \cong 3r^2$$

در اینجا عدد ۳ بیانگر همان عدد π است.

۴-۵-۲- مساحت قطاع دایره به شعاع r و زاویه مرکزی θ (برحسب رادیان) برابر است با:

با علم به اینکه محیط دایره کامل (با زاویه مرکزی 2π)، برابر $2\pi r$ می‌باشد، برای طول کمان دایره به



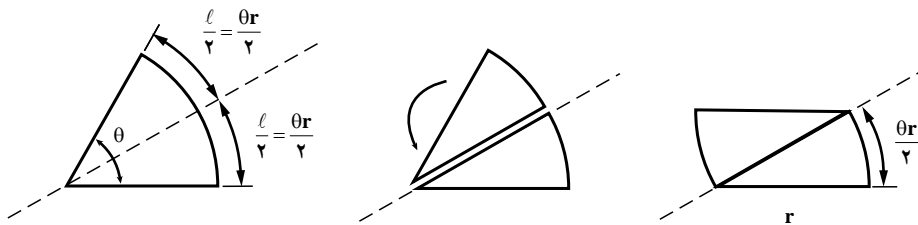
زاویه مرکزی
 اگر $\Rightarrow 2\pi$
 اگر $\Rightarrow \theta$

شعاع r و زاویه مرکزی θ داریم:

طول کمان
 $2\pi r$
 $l \Rightarrow l = \frac{\theta \times 2\pi r}{2\pi} = \theta r$

اگر قطاع نشان داده شده را با محور تقارن ۱-۱ به دو نیمه تقسیم کنیم و یکی از نیمه‌ها را معکوس و سپس مطابق شکل کنار هم قرار دهیم با کمی تقریب می‌توان شکل حاصل شده را یک مستطیل پنداشت، و مساحت آن برابر می‌شود با:

$$S = r \times \frac{\theta r}{2} = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2$$

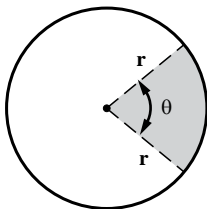


نتیجه: مساحت قطاع دایره به شعاع r و زاویه مرکزی θ (برحسب رادیان) عبارت است از:

$$S = \frac{\theta}{2} r^2$$

یادآوری: قسمتی از دایره را که بین دو شعاع و یک قوس محصور باشد، قطاع دایره

می‌گویند.



نکته: اگر زاویه مرکزی قطاع (θ) برحسب درجه باشد، داریم:

$$S = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

یادآوری از مشتقات

از مثلثات داریم که:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tga} \pm \operatorname{tgb}}{1 \mp \operatorname{tgatgb}}$$

مثال: اگر x b a باشد داریم:

$$\sin(x \pm x) = \sin x \cos x \pm \cos x \sin x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

تعمیم پذیری رابطه فوق :

$$\sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x$$

$$\sin 9x = 2 \sin \frac{9x}{2} \cos \frac{9x}{2}$$

مثال : اگر x b a باشد آنگاه :

$$\cos(x - x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

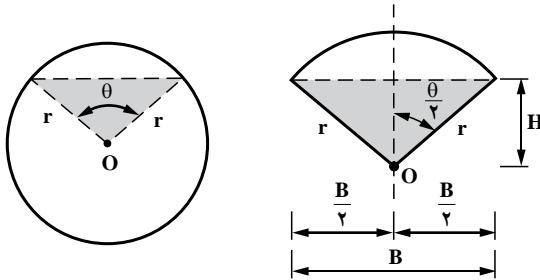
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

سایر روابط مهم و مورد نیاز :

۴-۵-۳- مساحت قطعه یک دایره به شعاع r و زاویه مرکزی θ (بر حسب رادیان)
 S مثلث هاشور خورده S قطاع S قطعه

$$S = \frac{1}{2} \theta r^2$$

برای محاسبه مساحت مثلث هاشور خورده داریم :



$$H = r \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{B}{2} = r \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow B = 2r \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow \text{مثلث } S = \frac{1}{2} B.H = \frac{1}{2} \left[2r \sin \frac{\theta}{2} . r \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\boxed{\text{مثلث } S = r^2 \sin \frac{\theta}{2} . \cos \frac{\theta}{2}} \quad (1)$$

از مثلثات داریم :

$$\sin^2 x = 2 \sin x \cos x$$

یا $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$\text{اگر } x = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin \theta \quad (2)$$

با جایگزینی رابطه (2) در (1) داریم :

$$\text{مثلث } S = r^2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta\right) = \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

$$\text{قطعه } S = \frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

$$\boxed{S = \frac{\theta - \sin \theta}{2} \times r^2 \text{ قطعه}}$$

نتیجه‌گیری : مساحت قطعه دایره به شعاع r و زاویه مرکزی θ (برحسب رادیان) برابر است با :

$$\boxed{S = \frac{\theta - \sin \theta}{2} \times r^2}$$

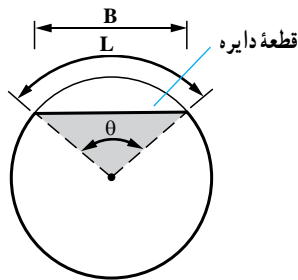
یادآوری : قسمتی از دایره را که بین یک قوس و وتر مقابل آن محصور باشد، «قطعه دایره»

می‌نامند.

نکته : طول قوس مقابل به زاویه θ (برحسب رادیان) برابر است با :

$$\boxed{L = \theta r}$$

$$\boxed{B = 2r \sin \frac{\theta}{2}}$$



L طول کمان روبه‌روی زاویه مرکزی θ

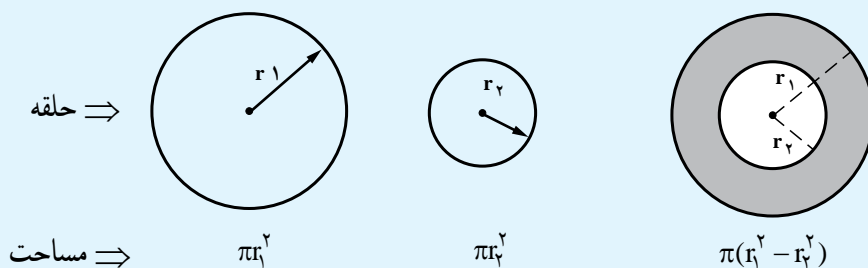
B طول وتر روبه‌روی زاویه مرکزی θ

۴-۵-۴ مساحت حلقه بین دو دایره به شعاع‌های r_1 و r_2 برابر است با :

$$S = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \text{مساحت دایره داخلی} - \text{مساحت دایره خارجی}$$

$$\boxed{S = \pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

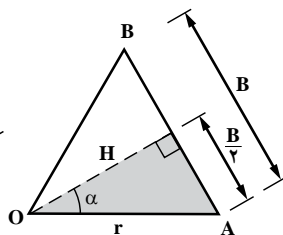
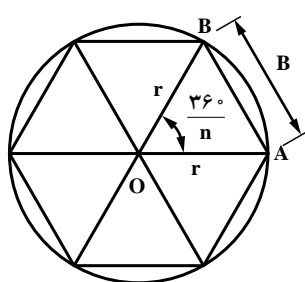
حلقه دایره عبارت است از سطح محصور بین دو دایره هم مرکز با شعاع های مختلف که از نظر هندسی برابر است با :



۴-۵-۵ مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع r برابر است با :

$$S = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{36^\circ}{n}$$

اثبات : در این قسمت هدف تعیین مساحت چندضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع r است و می بایست رابطه استخراج شده بر حسب r باشد (در بند ۲-۴ صفحه ۵۷ کتاب درسی رابطه بر حسب اندازه ضلع a، استخراج گردید که ضروری است دانش آموزان به آن توجه داشته باشند)



$$\alpha = \frac{36^\circ}{2n} = \frac{18^\circ}{n}$$

$$\frac{B}{2} = r \sin \alpha \Rightarrow B = 2r \sin \alpha$$

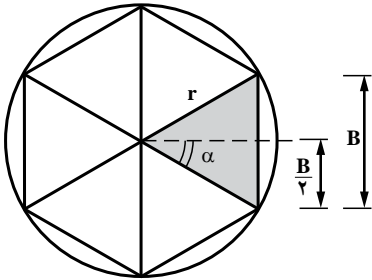
$$H = r \cos \alpha$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} H \times B = \frac{1}{2} (r \cos \alpha)(2r \sin \alpha)$$

$$S_{AOB} = r^2 \sin \alpha \cos \alpha = r^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = \frac{1}{2} r^2 \sin \left(2 \frac{18^\circ}{n} \right) = \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{36^\circ}{n}$$

$$\text{مساحت } n \text{ ضلعی} = n S_{AOB} = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{36^\circ}{n} \Rightarrow S = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{36^\circ}{n} < \pi r^2$$

نکته: همواره مساحت حاصله برای چندضلعی‌های محاطی، از مساحت دایره محیطی (πr^2) کمتر است.



۴-۵-۶ مساحت n ضلعی منتظم محیط بر دایره به شعاع r برابر است با:

$$S = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

اثبات:

$$S_1 = \frac{1}{2} B \times r \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{\frac{n}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{B}{2}}{r} = \frac{B}{2r} \Rightarrow B = 2r \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_1 = \frac{1}{2} B \cdot r = \frac{1}{2} (2r \operatorname{tg} \alpha) r = r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

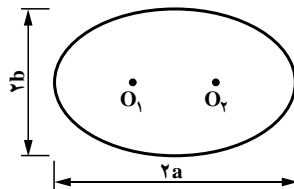
$$S_n = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$\boxed{S_n = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} > \pi r^2$$

نکته: همواره مساحت n ضلعی‌های محیطی از مساحت دایره محاطی (πr^2) بیشتر است.

۴-۵-۷ مساحت بیضی به قطرهای $2a$ و $2b$ برابر است با:

$$S = \pi ab$$



یادآوری: مکان هندسی نقاطی که مجموع فاصله آنها از دو نقطه ثابت (کانون‌های بیضی) برابر مقدار ثابتی (قطر بزرگ بیضی یعنی $2a$) باشد، بیضی نام دارد.

مثال: قطر بزرگ یک بیضی 50 متر و قطر کوچک آن 40 متر است، مساحت آن چند متر مربع است؟

حل: $S = \pi ab = 3/14 \times 25 \times 20 = 1570 \text{ m}^2$

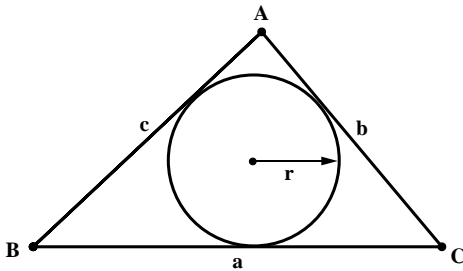


حل: برای به خاطر سپاری رابطه بیضی، کافی است که a b اختیار شود تا به دایره تبدیل شود و طبیعتاً رابطه به فرمول دایره تبدیل می‌شود.

$a b r \Rightarrow S = \pi r^2$

۴-۵-۸- مساحت دایره محاطی یک

مثلت: مطابق شکل، مثلث ABC و دایره محاطی آن را مشاهده می‌کنید.



مساحت مثلث
شعاع دایره محاطی مثلث
نصف محیط مثلث

$$r = \frac{S_{ABC}}{p}$$

مثال: اضلاع مثلثی عبارت‌اند از: $a = 68 \text{ m}$ و $b = 52 \text{ m}$ و $c = 44 \text{ m}$ مساحت دایره محاطی آن چند متر مربع است؟

حل: $p = \frac{52 + 68 + 44}{2} = 82$

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\sqrt{p(p-68)(p-52)(p-44)}}{p}$$

$$\text{مساحت دایره محاطی} = \pi r^2 = \pi \times \frac{p(p-68)(p-52)(p-44)}{p^2} = \pi \times \frac{(p-68)(p-52)(p-44)}{p}$$

$$= \pi r^2 = \pi \times \frac{p(p-68)(p-52)(p-44)}{p^2} = \pi \times \frac{(p-68)(p-52)(p-44)}{p}$$

$$\text{مساحت دایره محاطی} = \frac{3/14(82-68)(82-52)(82-44)}{82}$$

$$\text{مساحت دایره محاطی} = \frac{3/14 \times 14 \times 30 \times 38}{82} = \frac{50114/4}{82} = 611/15 \text{ m}^2$$



$$r = \frac{S_{ABC}}{p}$$

$$p = \frac{68 + 52 + 44}{2} = 82$$

$$S_{ABC} = \sqrt{82(82-68)(82-52)(82-44)} = 1143/99$$

$$r = \frac{1143/99}{82} = 13/95 \text{ m}$$

$$S \text{ مساحت دایره محاطی } \pi \cdot r^2 = \pi \times 13/95^2 = 611/46 \text{ m}^2$$

حل :

مساحت بیضی

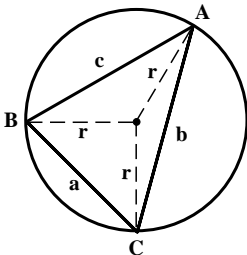
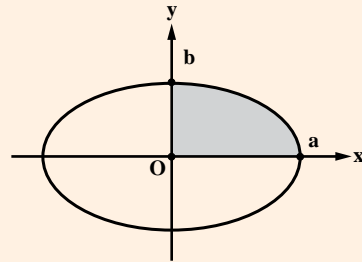
معادله پارامتری بیضی :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad a > b$$

$$S_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(\theta) \cdot f'(\theta) d\theta \quad \text{مساحت مربع بیضی}$$

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} b \sin \theta (-a \sin \theta) d\theta = \frac{\pi ab}{4}$$

$$S = 4(S_1) = 4\left(\frac{\pi ab}{4}\right) = \pi \cdot a \cdot b$$



۴-۵-۹- مساحت دایره محیطی مثلث : در شکل روبه‌رو،

مثلث ABC و دایره محیطی آن ترسیم شده‌اند، شعاع دایره محیطی به صورت زیر تعیین می‌گردد.

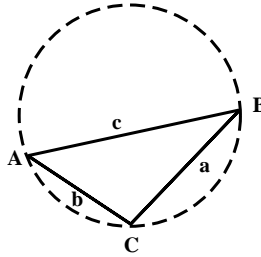
$$\text{شعاع دایره محیطی} = r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{ABC}}$$

بنابراین مساحت دایره محیطی مثلث برابر است با :

$$S = \frac{\pi a^2 b^2 c^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

مثال: شعاع و مساحت دایره محیطی برای مثلثی با شرایط زیر به دست آورید.

- a ۱۸m
- b ۱۲m
- c ۲۲m



حل:

$$p = \frac{18 + 12 + 22}{2} = 26$$

$$S_{ABC} = \sqrt{26(26-18)(26-12)(26-22)} = 107/93 m^2$$

$$r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{ABC}} = \frac{18 \times 12 \times 22}{4 \times 107/93} = 11m$$

$$S = \pi r^2 = \pi \times 11^2 = 330/13 m^2$$

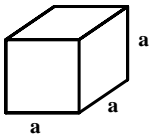
از رابطه مستقیم داریم:

$$S = \frac{\pi a^2 b^2 c^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{\pi \times 18^2 \times 12^2 \times 22^2}{16 \times 26(26-18)(26-12)(26-22)} = 380/65 m^2$$

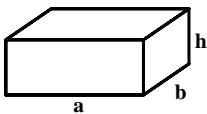
۴-۶- محاسبه سطح جانبی و سطح کل اجسام هندسی و اجسام مرکب

۴-۶-۱- سطح جانبی اجسام منشوری محیط قاعده \times ارتفاع

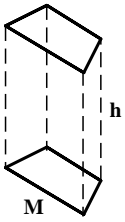
سطح جانبی مکعب به ضلع a برابر است با: $4a^2$



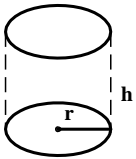
سطح جانبی یک مکعب مستطیل به ابعاد قاعده a و b و ارتفاع h برابر است با: $2(a+b)h$



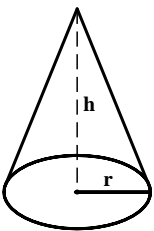
سطح جانبی منشور با محیط قاعده M و ارتفاع h برابر است با: Mh



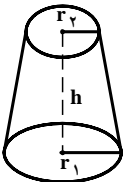
سطح جانبی استوانه با شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با $2\pi hr$



سطح جانبی مخروط با شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با: $\pi r\sqrt{h^2 + r^2}$



ارتفاع h برابر است با: $h\pi(r_1 - r_2)$ و شعاع قاعده بالایی r_2 و شعاع قاعده پایینی r_1

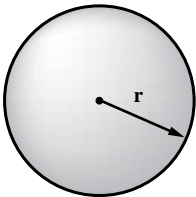


سطح جانبی هرم برابر است با: مجموع سطوح جانبی آن

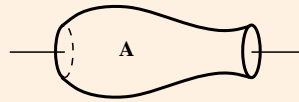
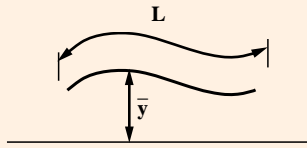
سطح کل احجام برابر است با: سطح جانبی + سطح قاعده‌ها

سطح جانبی احجام مرکب برابر است با: مجموع سطوح جانبی اجزای تشکیل دهنده آنها

سطح کل کره به شعاع r برابر است با: $4\pi r^2$



قضیه اول وارینیون: سطح جانبی حادث از یک منحنی که حول محوری می چرخد به صورت زیر محاسبه می شود.

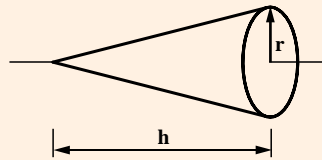
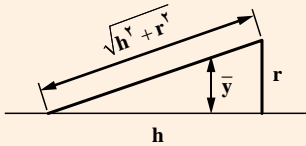


$$A = 2\pi L \bar{y} \quad \text{سطح جانبی}$$

L - طول پاره خط

y - مرکز خط، محور دوران

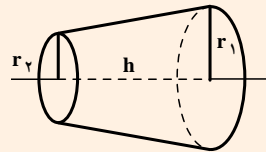
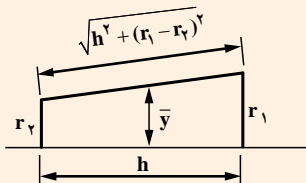
مثال: مساحت جانبی مخروطی با شعاع قاعده r و ارتفاع h را به دست آورید.



$$\bar{y} = \frac{1}{3}r$$

$$A = 2\pi(\sqrt{h^2 + r^2})\left(\frac{1}{3}r\right) = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} \quad \text{سطح جانبی}$$

مثال: مساحت جانبی مخروط ناقص مطابق شکل زیر را تعیین کنید.



$$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$

$$A = 2\pi(\sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2})\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \quad \text{مساحت جانبی}$$

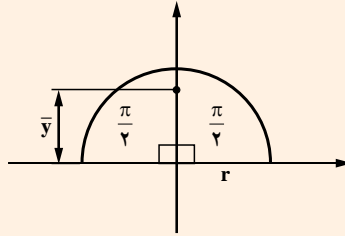
$$A = \pi(r_1 + r_2)\sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

در صورتی که دو شعاع قاعده اختلاف زیادی نداشته باشند.

$$r_1 \cong r_2 \Rightarrow \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} \cong h$$

$$A = \pi h(r_1 + r_2)$$

مثال: مساحت جانبی کره به شعاع r



$$\bar{y} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} = \frac{r \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$$

$$\bar{y} = \frac{r}{\pi}$$

$$L = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

طول قوس نیم دایره

$$A = 2\pi(\pi r) \frac{r}{\pi} = 4\pi r^2$$