

### محاسبه زاویه

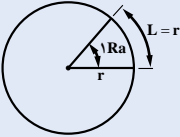
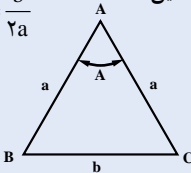
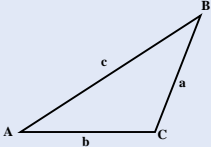
#### خلاصه فصل

در این فصل دانش آموزان با مفهوم و سلسله مراتب واحدهای اندازه گیری زاویه، تبدیل واحد به هم، تعیین زوایای اشکال هندسی آشنایی پیدا می کنند و باید توانایی به کارگیری مسائل نظیر در محاسبه زوایا، سطوح و درس نقشه برداری را کسب نمایند.

#### اهداف فصل

نگرشی	مهارتی	دانشی
۱- باور اینکه کوچک ترین چرخش در زندگی مسیر را تغییر می دهد	۱- انواع زوایا را برحسب واحد اندازه گیری تحلیل می کند	۱- آشنایی با واحدهای اندازه گیری
۲- چرخش کامل، باعث می شود انسان به سر جای اول خود برگردد	۲- زوایا را در سیستم های مختلف تبدیل می نماید	۲- تبدیل واحدهای اندازه گیری
۳- باور اینکه طول عمر با دقت ثانیه داده شده است اما با سرعت روزها سپری می گردد	۳- براساس روابط مثلث های مشخص زوایای مجهول را محاسبه می کند	۳- تعیین زوایای داخلی مثلث
۴- یک انحراف بزرگ ( ۱۸ درجه ای) باعث تغییر صد درصدی در مسیر و پس رفت می شود	۴- قادر به استخراج رابطه زوایا با اضلاع می باشد	۴- تعیین زوایای داخلی چندضلعی ها
۵- زوایای جهان هستی بی شمار است و بیانگر عظمت خداوند متعال می باشد	۵- مجموع زوایای داخلی $n$ ضلعی های منتظم را براساس روابط مربوطه تعیین می کند	۵- تعیین مجموع زوایای داخلی چندضلعی ها

## روابط و فرمول‌های کلی فصل دوم

روابط پایه مورد نیاز	تعریف اجزاء روابط و فرمول‌ها	روابط و فرمول‌ها
	<p>درجه: زاویه‌ای است برابر زاویه مرکزی کمانی که به اندازه <math>\frac{1}{360}</math> محیط دایره می‌باشد و اجزای آن ۶ واحدی است</p>	<p>درجه - دقیقه - ثانیه:</p> $1^\circ = 60' = 3600''$ $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$
	<p>گراد: زاویه‌ای است برابر، زاویه مرکزی کمانی که به اندازه <math>\frac{1}{400}</math> محیط دایره می‌باشد و اجزای آن ۱ واحدی است</p>	<p>گراد - دقیقه گراد - ثانیه گراد</p> $1G = 100' = 10000''$
	<p>رادیان: زاویه‌ای است برابر زاویه مرکزی کمانی که طول کمان برابر شعاع دایره باشد زاویه مرکزی یک دایره کامل برابر <math>2\pi</math> می‌باشد</p>	<p>رادیان (Ra)</p>  <p>طول قوس مقابل زاویه = <math>\frac{\text{اندازه زاویه برحسب رادیان}}{\text{شعاع دایره}}</math></p>
	<p>D - درجه G - گراد Ra - رادیان</p>	<p>تبدیل واحدها به هم:</p> $\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{Ra}{2\pi}$
	<p>A - زاویه بین ساق‌ها (زاویه مرکزی) b - ضلع مقابل زاویه مرکزی</p>	<p>مثلث متساوی الساقین</p>  $\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{b}{2a}$
	<p>C, B, A, زوایای داخلی گوشه‌های مثلث c, b, a, اضلاع روبه‌روی زوایای متناظر</p>	<p>رابطه کسینوس‌ها</p>  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
	<p>n - تعداد اضلاع n ضلعی منتظم</p>	<p>n ضلعی منتظم:</p> <p><math>(n-2) \times 180^\circ</math> مجموع زوایای داخلی</p> <p><math>\frac{(n-2)}{n} \times 180^\circ</math> اندازه هر زاویه</p>

جدول بودجه‌بندی فرآیند اجرای برنامه درسی فصل دوم

امکانات و تجهیزات مورد نیاز	اهداف آموزشی	شماره صفحه کتاب درسی	موضوعات و عناوین	جلسه آموزشی
نقاله – ماشین حساب	آشنایی با نمادهای علمی درجه، گراد و رادیان، توانایی تبدیل اعداد اعشاری برحسب درجه، دقیقه و ثانیه امکان تبدیل واحدهای سه‌گانه زاویه به همدیگر	۲۲ تا ۲۴ ۲۵	۱- واحدهای اندازه‌گیری زاویه (درجه، گراد و رادیان) ۲- تبدیل واحدهای درجه، گراد و رادیان به همدیگر	جلسه پنجم
	نحوه تعیین زوایای انواع مثلث‌های مشخص را تعیین کند زوایای داخلی مثلث و چندضلعی‌های منتظم را تعیین کند مجموع زوایای داخلی یک چندضلعی را مشخص نماید	۲۶ ۳	۳- محاسبه زوایای مثلث ۴- محاسبه زوایای داخلی یک چندضلعی منتظم	جلسه ششم

## جلسه پنجم: محاسبه زاویه

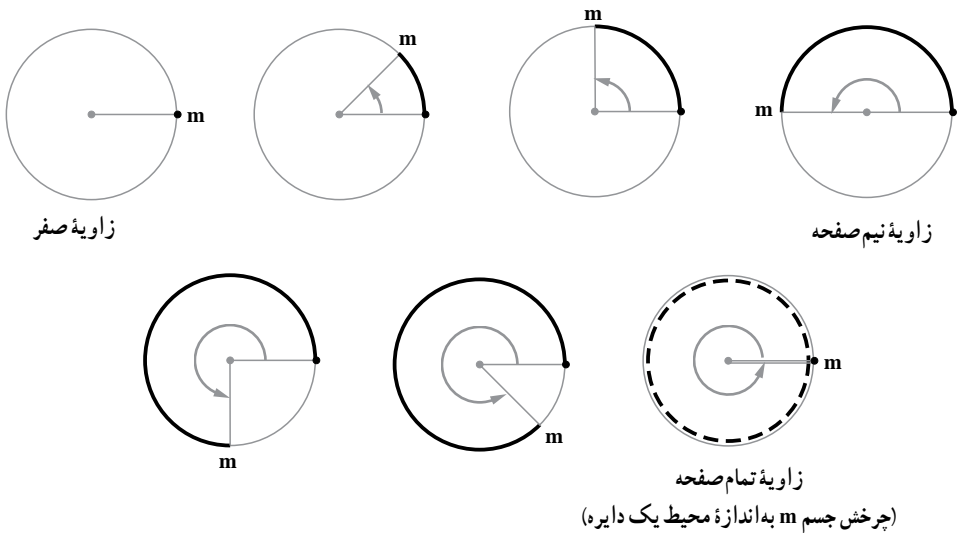
**مقدمه:** پیاده کردن امتداد یک مسیر، خیابان و بزرگراه، همچنین بریدن و عملیات تراشکاری روی یک قطعه، فرم دادن به پاکت بسته بندی ها و نهایتاً عملیات برداشت یک قطعه زمین و پیاده سازی آن در روی نقشه و ... نیاز به داشتن طول و زاویه دارند.

آمادگی برای یادگیری واحدهای اندازه گیری، می تواند دانش آموز را در درس هایی نظیر، نقشه کشی، برداشت و نقشه برداری کمک نماید. بدون تسلط بر به کارگیری واحدهای اندازه گیری زوایا نمی توان با دقت مناسب ابعاد قطعه زمینی را برداشت و سپس مساحت دقیق آن را تعیین نمود.

استفاده از نقاله های تمام دایره کمک بسیار زیادی جهت آشنایی دانش آموزان با درجه و اجزای آن می نماید.

### ۱-۲- واحدهای اندازه گیری زاویه

**۱-۱-۱-۲- درجه:** تعریف زاویه تمام صفحه: اگر جسمی حول یک نقطه دور کاملی بزند، به عبارتی چرخش آن به اندازه یک دایره کامل باشد، زاویه طی شده را تمام صفحه گویند.



**درجه:** اگر محیط یک دایره را به  $360^\circ$  قسمت مساوی تقسیم کنید، هرکدام از زوایای تشکیل شده  $(\frac{1}{360})$  زاویه تمام صفحه را درجه می نامند.

**اجزای درجه:** اجزای درجه عبارتند از دقیقه و ثانیه، به طوری که  $60^\circ$  دقیقه تشکیل یک درجه و  $60$  ثانیه تشکیل یک دقیقه می دهد.

$$1 = 60' = 3600'' \text{ یا } 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

**توجه:** برای نمایش زاویه به ترتیب بر حسب درجه، دقیقه و ثانیه از نمادهای  $(^\circ)$ ،  $(')$  و  $('' )$  استفاده می شود.

**مثال:** زوایای زیر را بر حسب نمادهای علمی (درجه، دقیقه و ثانیه) بنویسید.

۱۴ درجه و ۵۴ ثانیه و ۵۴" و ۱۴°  
 ۳۴ درجه و ۲۷ دقیقه و ۲۹/۳۲ ثانیه و ۳۴°  
 صفر درجه و ۲ دقیقه و ۱۲ ثانیه و ۰°  
 یک دقیقه و ۱'

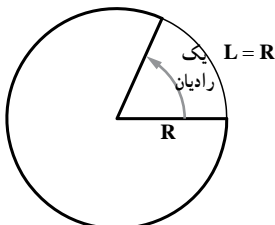
### ۲-۱-۲- گراد

- $\frac{1}{400}$  زاویه تمام صفحه را «گراد» می نامند و آن را با حرف  $g$  نمایش می دهند.
- $\frac{1}{100}$  گراد را دقیقه گراد و  $\frac{1}{10000}$  دقیقه گراد را ثانیه گراد می گویند.
- معمولاً اجزای زاویه گراد را به صورت اعشاری نمایش می دهند.

**مثال:** ۷۲ گراد و ۵ دقیقه و ۲۳ ثانیه گراد را چنین می نویسند:  $72/0523^\circ$



**تشریح مثال:** به دلیل اینکه اجزاء گراد دارای سلسله مراتب  $10000$  قسمتی است (نظیر عدد  $25/72$  که خوانده می شود بیست و پنج و هفتاد و دو صدم) دقیقه و ثانیه به ترتیب پس از عدد صحیح و به عنوان صدم و ده هزارم قرار می گیرند.



شکل ۱

### ۲-۱-۳- رادیان

در هر دایره، یک رادیان اندازه زاویه مرکزی است که طول قوس مقابل به آن، برابر شعاع دایره باشد.

برای تعیین اندازه یک زاویه برحسب رادیان، کافی است طول قوس مقابل آن را به شعاع دایره تقسیم کنیم.

طول قوس مقابل زاویه شعاع دایره  
اندازه زاویه برحسب رادیان

**مثال:** یک زاویه تمام صفحه چند رادیان است؟

$$\theta = \frac{l}{R} \quad \text{رادیان} \quad \begin{array}{l} \text{طول قوس} \\ \text{شعاع} \end{array}$$

در این مثال، طول قوس عبارت است از محیط دایره، یعنی:

$$l = 2\pi R$$

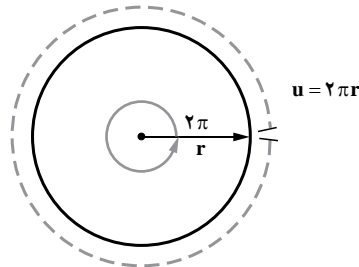
$$\theta = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

بنابراین زاویه تمام صفحه برابر است با:

**تشریح مثال:**

$$l = 2\pi r$$

$$\theta = \frac{l}{R} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$



**نتیجه:** زاویه تمام صفحه برابر 2π رادیان یا 6/28 Ra یا ۲×۳/۱۴ می باشد.

**۲-۲- تبدیل واحدهای اندازه گیری زاویه به همدیگر**

**۲-۲-۱- تبدیل واحدهای درجه و گراد:** یک زاویه تمام صفحه برابر است با ۳۶۰ درجه

یا ۴۰۰ گراد، بنابراین اگر مقدار یک زاویه برحسب درجه را با حرف D و مقدار همان زاویه را برحسب

گراد با حرف G نمایش دهیم، داریم:

$$\boxed{\frac{D}{360} = \frac{G}{400}} \xrightarrow{\text{و به صورت ساده شده}} \boxed{\frac{D}{9} = \frac{G}{10}}$$

**مثال:** ۳۶° چند گراد است؟

$$\frac{D}{9} = \frac{G}{10}$$

یعنی ۳۶ D و می خواهیم G را محاسبه کنیم، داریم:

$$\frac{36}{9} = \frac{G}{10} \Rightarrow G = \frac{10 \times 36}{9} = 40 \Rightarrow G = 40$$

**تشریح مثال:** برای تبدیل درجه به گراد و یا بالعکس رابطه ذکر شده را به صورت

ساده شده  $\boxed{D = \circ / 9G}$  مورد استفاده قرار می دهیم.

$$36^\circ \text{ grad} \Rightarrow 36 \circ / 9G$$

$$G = \frac{36}{\circ / 9} = 40 \text{ grad}$$

**مثال:** یک زاویه ۵۵ گراد چند درجه است؟

$$\frac{D}{9} = \frac{G}{10} \Rightarrow \frac{D}{9} = \frac{55}{10} \rightarrow D = 9 \times 5 / 5 = 49 / 5^\circ$$

$$D (49^\circ / 5 \times 60') \Rightarrow D (49^\circ 30')$$

یعنی

**تشریح مثال:**

$$G \ 55 \ D \ ?$$

$$D \circ / 9G \ D \circ / 9 \times 55 \ 49 / 5^\circ$$

$$D (49^\circ, \circ / 5 \times 60') \ 49^\circ, 30'$$

## ۲-۲-۲ تبدیل واحدهای درجه و گراد به رادیان: اگر اندازه زاویه برحسب رادیان را

با Ra نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{G}{400} = \frac{Ra}{2\pi}$$

**مثال:** یک رادیان چند درجه و چند گراد است؟

$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{Ra}{2\pi}, Ra = 1$$

• تبدیل رادیان به درجه:

$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow D = \frac{360^\circ}{2 \times 3.14} = 57^\circ, \left(\frac{51}{157}\right)^\circ \approx 57^\circ, \left(\frac{5}{15}\right)^\circ$$

$$D \approx 57^\circ \frac{1}{3} \Rightarrow D \approx 57^\circ 20'$$

$$\frac{G}{400} = \frac{Ra}{2\pi}, Ra = 1$$

• تبدیل رادیان به گراد:

$$\frac{G}{400} = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow G = \frac{400}{2 \times 3.14} = 64/38g$$



**تشریح مثال:** در این حالت با برقرار نمودن تناسب بین رادیان و درجه  $\left(\frac{D}{360} = \frac{Ra}{2\pi}\right)$

اقدام به تعیین درجه می شود که نتیجه به دست آمده مؤید  $57^\circ, 20'$  است.  $1 Ra$

و برای تبدیل رادیان به گراد از تناسب  $\frac{G}{400} = \frac{Ra}{2\pi}$  استفاده می شود که نتیجه برابر

است با:

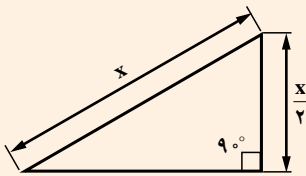
$$1 Ra \quad 64/38 \text{ grad}$$



## جلسه ششم: ادامه محاسبه زاویه

در این جلسه با به کارگیری روابط مثلث قائم الزاویه، متساوی الساقین و مثلث نامشخص اقدام به تعیین برخی مجهولات خواسته شده می‌گردد.  
در مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین از نسبت‌های مثلثاتی و برای مثلث نامشخص از قانون سینوس‌ها و کسینوس استفاده می‌شود.

### بیشتر بدانید



۱- در مثلث قائم الزاویه (راست گوشه) اگر زاویه یکی از گوشه‌ها  $30^\circ$  درجه باشد، اندازه ضلع روبه‌رو به آن، برابر نصف وتر است.

۲- سایر روابط در مثلث قائم الزاویه به شرح زیر

می‌باشد:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{(الف)}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{(ب)}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{(ج)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1 \quad \text{(د)}$$

بر اساس برابری نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه B و C و با توجه به اینکه زوایای C, B متمم هستند. به عبارتی اگر زاویه یکی از آنها x باشد آنگاه زاویه دیگری  $(\frac{\pi}{2} - x)$  است می‌توان روابط زیر را استخراج نمود.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$$

## ۳-۲- محاسبه زوایای مثلث

۳-۲-۱- مثلث قائم الزاویه: در این مثلث یکی از زوایای  $90^\circ$  درجه (قائمه) است و

نسبت‌های زیر برای سایر زوایای آن که کوچک‌تر از  $90^\circ$  درجه (حاده) هستند، برقرار است.

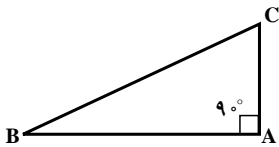
(الف) نسبت ضلع روبه‌رو به هر زاویه حاده، به وتر را سینوس آن زاویه نامند.

(ب) نسبت ضلع مجاور به هر زاویه حاده، به وتر را کسینوس آن زاویه نامند.

(ج) نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور به هر زاویه حاده را تانژانت آن زاویه نامند.

(د) نسبت ضلع مجاور به ضلع مقابل به هر زاویه حاده را کتانژانت آن زاویه نامند.

### نسبت‌های مثلثاتی



$$\left\{ \begin{array}{l} \sin B = \frac{AC}{BC} \\ \cos B = \frac{AB}{BC} \\ \operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \\ \operatorname{cot} g B = \frac{AB}{AC} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin B = \cos C \\ \cos C = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \cos B = \sin C \\ \operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \operatorname{tg} B = \operatorname{cot} g C \\ \operatorname{cot} g C = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \operatorname{cot} g B = \operatorname{tg} C \end{array} \right.$$

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

### قضیه فیثاغورس

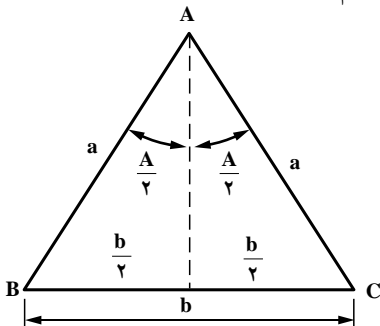
۳-۲-۲- مثلث متساوی الساقین: در این مثلث اندازه دو ضلع با هم برابر است و روابط

خاصی برای زاویه بین دو ضلع برابر وجود دارد. کاربرد روابط این مثلث ضمن این که در حل آن به کار

می‌رود بلکه برای برداشت زوایای بین دو امتداد نظیر برداشت یک قطعه زمین کاربرد فراوانی دارد.

در مثلث متساوی الساقین ABC (شکل ۴) ارتفاع نظیر رأس A، نیم‌ساز زاویه A و عمود منصف ضلع

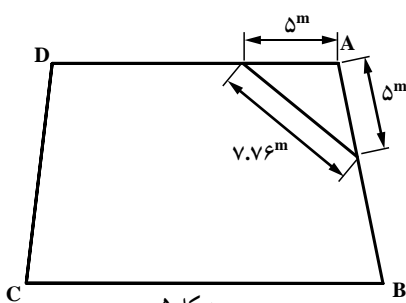
مقابل به زاویه A می‌باشد؛ بنابراین با توجه به روابط مثلثاتی داریم:



شکل ۴

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{b}{2a} = \frac{b}{2a} \quad \text{یا} \quad \cos C = \frac{b}{2a} = \frac{b}{2a}$$

یعنی با محاسبه  $\frac{b}{2a}$  و با استفاده از جدول سینوس‌ها، نصف زاویه A را به دست می‌آوریم. همچنین با داشتن  $\frac{b}{2a}$ ، می‌توان مقدار زاویه C و نیز B (چون C + B) را از جدول کسینوس‌ها به دست آورد.

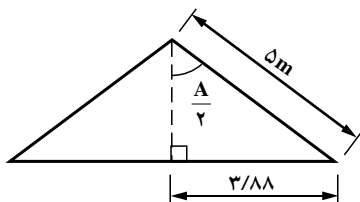


شکل ۵

**مثال:** برای اندازه‌گیری زاویه A در گوشه یک زمین، دو طول مساوی ۵ متری در روی دو ضلع آن جدا کرده و سپس ضلع سوم آن را اندازه‌گیری نموده‌ایم (شکل ۵). اندازه زاویه A چند درجه است؟

**حل:**

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{b}{2a} = \frac{7.76}{2 \times 5} = 0.776 \rightarrow \frac{A}{2} = 50^\circ 54' \rightarrow A = 101^\circ 48'$$



**تحلیل:** در صورتی که رابطه  $\sin \frac{A}{2} = \frac{b}{2a}$  فراموش شود با رسم نیمساز A (عمود منصف ضلع مقابل A) به راحتی زاویه  $\frac{A}{2}$  و سپس A تعیین می‌شود.

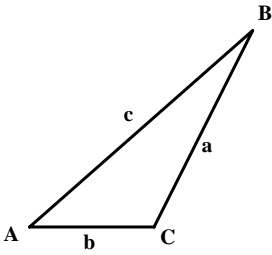
$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3.88}{5} = 0.776 \rightarrow \frac{A}{2} = 50^\circ, 54' \Rightarrow A = |0|^\circ, 48'$$

**۲-۳-۳- مثلث غیر مشخص (عمومی):** روابطی که برای این مثلث اثبات می‌شود، شامل سایر مثلث‌ها (نظیر قائم‌الزاویه، متساوی‌الساقین و ...) می‌شود و حالت عمومی‌تری دارند.

**۲-۳-۱- رابطه کسینوس‌ها**

در هر مثلث، مربع هر ضلع، برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر، منهای حاصل ضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها.

در مثلث ABC شکل ۶ داریم :



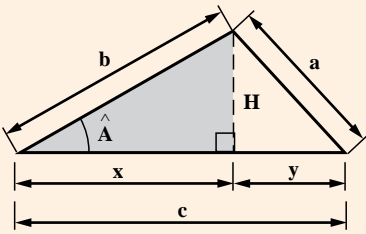
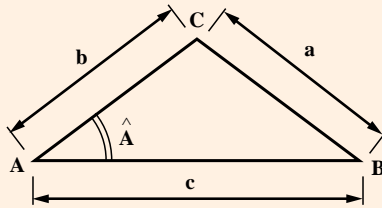
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

با استفاده از روابط بالا که به رابطه کسینوس‌ها معروف است،

می‌توانیم زوایای مثلث را به صورت زیر بنویسیم :

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

**اثبات رابطه کسینوس‌ها :** فرض کنید مثلث نامشخصی مطابق شکل زیر داشته باشیم.



فرض کنید هدف تعیین ضلع BC (یا a) می‌باشد و دو ضلع b و c مشخص باشند. برای این منظور کافی است از رأس C عمودی بر ضلع AB استخراج شود و مثلث سمت چپ که یک مثلث قائم‌الزاویه است را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بدیهی است که در مثلث سمت چپ داریم :

$$x = b \cos A$$

$$H = b \sin A$$

و در مثلث سمت راست داریم:

$$y^2 = c^2 - b^2 \cos^2 A$$

$$a^2 = y^2 + H^2 = (c^2 - b^2 \cos^2 A) + (b \sin A)^2$$

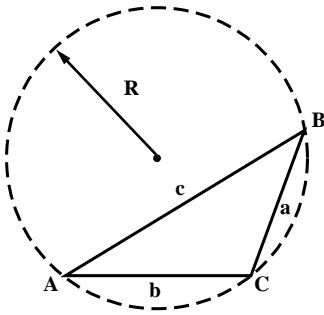
$$a^2 = (c^2 - b^2 \cos^2 A + 2b^2 \cos A \sin A) + b^2 \sin^2 A$$

$$a^2 = c^2 - b^2 (\cos^2 A - \sin^2 A) + 2b \cdot c \cos A$$

$$a^2 = c^2 - b^2 + 2b \cdot c \cos A$$

**۲-۳-۳-۲- رابطه سینوس ها:** در مثلث غیر مشخص، نسبت هر ضلع به سینوس زاویه

مقابلش برابر است با قطر دایره محیطی آن مثلث



$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R$$

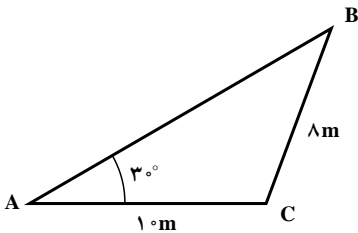
$$\frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

**مثال:** با استفاده از قانون سینوس ها، زوایای  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  را تعیین کنید.

$$\hat{A} = 3^\circ$$



$$\frac{10}{\sin 3^\circ} = \frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{10 \times \sin 3^\circ}{8} = \frac{10 \times \frac{1}{200}}{8} = 0.625$$

$$\hat{B} = 38.6822^\circ = 38^\circ, 40', 56''$$

از آنجایی که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  درجه

است پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$C = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 38^\circ, 40', 56'' = 111^\circ, 19', 4'' \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{\sin(111^\circ, 19', 4'')} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 1491 \text{ m}$$

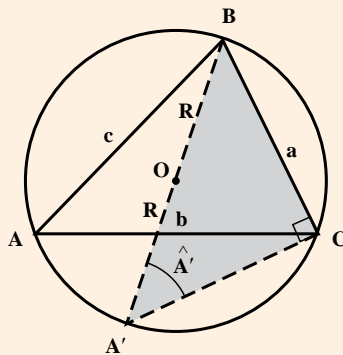
همچنین از روابط کسینوس‌ها می‌توان طول ضلع AB را تعیین نمود.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC)\cos C \Rightarrow 1491^2 = 1000^2 + 800^2 - 2(1000)(800)\cos(111^\circ, 19', 4'')$$

$$222/166 \Rightarrow AB = 1491 \text{ m}$$

**اثبات رابطه کسینوس‌ها:** مثلث ABC را در نظر بگیرید. با ثابت نگه داشتن

رئوس B و C و جابجایی رأس A به نحوی که ضلع AB از مرکز دایره عبور کند مثلث قائم‌الزاویه A'BC حاصل می‌شود که همچنان زاویه A' با زاویه A برابر است و با نوشتن روابط مثلثاتی داریم:



$$\hat{BAC} = \hat{BA'C} = \hat{A}$$

ثابت می‌شود که:

$$\sin A' = \frac{a}{2R} \quad \text{چون} \quad \sin A' = \sin A$$

$$\sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin A} = 2R}$$

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که:

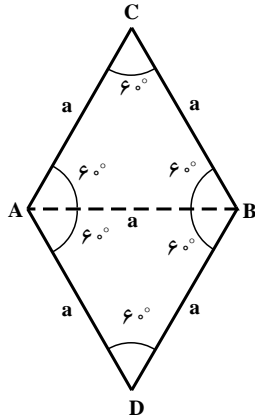
$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

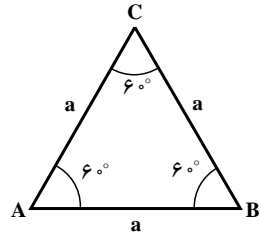
## ۴-۲- محاسبه زوایای داخلی یک چندضلعی منتظم

زوایای داخلی برای شکل‌های نشان داده شده به شرح زیر تعیین می‌شوند.

$\triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow$   
 $A \cong B \cong C \Rightarrow 180^\circ$   
 مجموع زوایای داخلی آن دو  
 برابر مثلث ABC است.  
 $\Sigma \theta = 180^\circ \times 2 = 360^\circ$

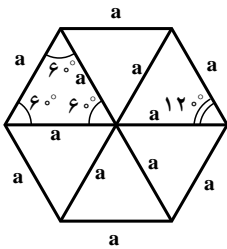


(ب) چهارضلعی  $n=4$



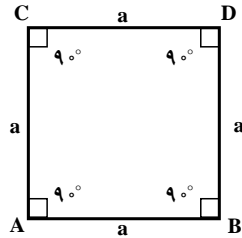
(الف) سه‌ضلعی  $n=3$

$$\Sigma \theta = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



(د) شش‌ضلعی

$$\Sigma \theta = 120^\circ \times 6 = 720^\circ$$



(ج) چهارضلعی  $n=4$

$$\Sigma \theta = 4 \times 90^\circ = 360^\circ$$

همان طوری که از زوایای اشکال برمی‌آید مجموع زوایای داخلی رابطه‌ای با تعداد اضلاع

دارد که :

$$\text{اگر } n \rightarrow 3 \Rightarrow \Sigma \theta = 180^\circ \quad (n-2) \times 180^\circ$$

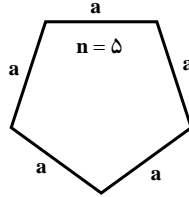
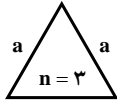
$$\text{اگر } n \rightarrow 4 \Rightarrow \Sigma \theta = 360^\circ \quad (n-2) \times 180^\circ$$

$$\text{اگر } n \rightarrow 6 \Rightarrow \Sigma \theta = 720^\circ \quad (n-2) \times 180^\circ$$

۲-۴-۱- مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\Sigma\theta = (n-2)180^\circ$$

مثال: مجموع زوایای n ضلعی های نشان داده شده را تعیین کنید.



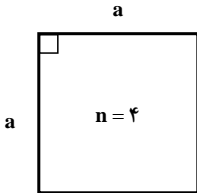
$$\Sigma\theta = (3-2)180^\circ = 180^\circ$$

$$\Sigma\theta = (5-2)180^\circ = 540^\circ$$

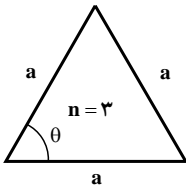
۲-۴-۲- اندازه هر زاویه یک n ضلعی منتظم عبارت است با:

$$\theta = \frac{\Sigma\theta}{n} = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

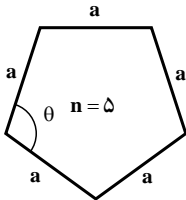
مثال: اندازه زاویه داخلی هر ضلع از اشکال زیر را تعیین کنید.



$$\theta = \frac{(4-2)180^\circ}{4} = \frac{2}{4} \times 180^\circ = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

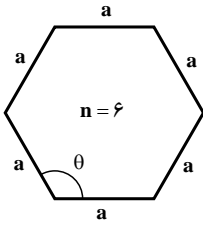


$$\theta = \frac{(3-2)180^\circ}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

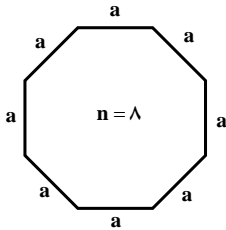


$$\theta = \frac{(5-2)180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$



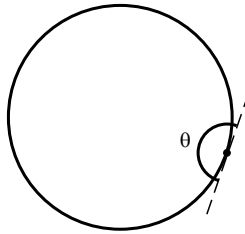


$$\theta = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(6-2)180^\circ}{6} = 120^\circ$$



$$\theta = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(8-2)180^\circ}{8} = 135^\circ$$

**نکته:** دایره یک  $n$  ضلعی منتظم است که تعداد اضلاع آن به سمت بی نهایت میل می کند و هر اندازه تعداد اضلاع زیادتر شود زاویه داخلی ضلع به سمت  $180^\circ$  درجه میل می کند.



$$\text{اگر } n \rightarrow 1000 \Rightarrow \theta = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(1000-2)180^\circ}{1000} = 179/640^\circ$$

$$\text{اگر } n \rightarrow 10000 \Rightarrow \theta = 179/96^\circ$$

$$\text{اگر } n \rightarrow 100000 \Rightarrow \theta = 180^\circ$$

### محاسبه ابعاد دیوار


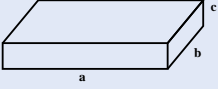
#### خلاصه فصل

این فصل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا دانش آموزان می‌توانند با تعیین تعداد آجرهای مصرفی در یک دیوار و یا ساختمان، هزینه خرید آجرها را برآورد نمایند. و براساس نوع دیوار ساخته شده مبادرت به محاسبه آجرهای مصرفی آنها نمایند.

#### اهداف فصل

نگرشی	مهارتی	دانشی
۱- با مفهوم تکثیر و تکرار آشنایی پیدا می‌کند	۱- دلیل نسبت‌های ابعادی آجر را یاد می‌گیرد	۱- آشنایی با ابعاد آجر استاندارد
۲- با توسعه براساس نظم آشنایی پیدا می‌کند	۲- توانایی محاسبه طول دیوار در تلافی یکطرفه	۲- محاسبه طول دیوار در تلافی یکطرفه
۳- در شکل‌گیری نظم کوچک‌ترها و بزرگ‌ترها مکمل هم هستند و بدون وجود هم نظام متنوعی ایجاد نمی‌شود و فهم این موضوع که در جهان هستی با وجود اختلافات در ابعاد و اندازه‌های عناصر باز هم نظم حاکم است	۳- توانایی محاسبه طول دیوارهای آزاد را کسب می‌نماید	۳- محاسبه طول دیوار آزاد
	۴- توانایی محاسبه طول دیوارها در تلافی دوطرفه را کسب می‌نماید	۴- محاسبه طول دیوار در تلافی دوطرفه
	۵- براساس تعداد رج‌های آجرچینی توانایی محاسبه ارتفاع دیوار را کسب می‌نماید	۵- محاسبه ارتفاع دیوار
	۶- براساس نوع دیوار توانایی محاسبه آجرهای مصرفی را به دست می‌آورد	۶- محاسبه تعداد آجر مصرفی

## روابط و فرمول‌های کلی فصل سوم

روابط پایه مورد نیاز	تعریف اجزاء روابط و فرمول‌ها	روابط و فرمول‌ها
متر - خط کش	 <p>a - طول آجر یا طول راسته b - عرض آجر یا عرض کله</p>	<p>ابعاد آجر استاندارد</p> <p>a = ۲۱ cm b = ۱ cm c = ۵/۵ cm</p>  <p>a = ۲b+۱</p>
متر - خط کش	تعداد کله با n نمایش می‌دهند	<p>(۱ cm × تعداد بند ملات) + (عرض یک آجر) (cm × تعداد کله) = طول دیوار (cm)</p>
متر - خط کش	n - تعداد کله	<p>محاسبه طول دیوار در تلاقی یک طرفه :</p> <p>n - تعداد کله یا سرنمای آجر    L = ۱۱n</p>
متر - خط کش	n - تعداد کله	<p>محاسبه طول دیوار آزاد :</p> <p>L = ۱۱n - ۱</p>
متر - خط کش	n - تعداد کله	<p>محاسبه طول دیوار در تلاقی دو طرفه :</p> <p>L = ۱۱n + ۱</p>
	n - تعداد رج	<p>محاسبه ارتفاع دیوار :</p> <p>H = ۶/۵n</p>

جدول بودجه‌بندی فرآیند اجرای برنامه درسی فصل سوم

امکانات و تجهیزات مورد نیاز	اهداف آموزشی	شماره صفحه کتاب درسی	موضوعات و عناوین	جلسه آموزشی
آجر - خط‌کش - متر	+ شناخت ابعاد آجر استاندارد + رابطه ابعادی آجر با هم + تعیین طول دیوار با شمارش آجرها	۳۲ و ۳۳	۱- کلیاتی در مورد ابعاد آجر و ابعاد دیوار	جلسه هفتم
آجر - خط‌کش - متر	+ تعیین طول دیواری که از یک طرف محدودیت دارد	۳۳	۲- محاسبه طول دیوار در تلاقی یک طرفه	
آجر - خط‌کش - متر	+ تعیین طول دیواری که از دو طرف آزاد است	۳۴	۳- محاسبه طول دیوار آزاد	
آجر - خط‌کش - متر	+ تعیین طول دیواری که از دو طرف محدودیت دارد	۳۴	۴- محاسبه طول دیوار در تلاقی دو طرفه	
	+ تعیین ارتفاع دیوار با شمارش تعداد رج‌ها	۳۵	۵- محاسبه ارتفاع دیوار	

جدول زمان بندی فرآیند تدریس در جلسات آموزشی

شماره صفحه کتاب	اقدامات لازم برای جلسه بندی	مدت تدریس (دقیقه)	موضوعات و مطالب	جلسه آموزشی
	تکرار مختصر مطالب جمع بندی شده در جلسه قبل		مروری بر مطالب جلسه گذشته	جلسه هفتم
	تشریح اهمیت و ضرورت موضوع جهت ایجاد انگیزه و افزایش تمرکز دانش آموزان		تشریح مقدمه جهت ورود به موضوع	
	با پرورش مهارت و آموختن راه یادگیری از طریق مشارکت دانش آموزان سعی در انتقال مطالب شود		تحلیل محتوای کتاب درسی	
	مثال ها به بحث گذاشته تا راه حل های دیگر هم مشخص شوند		تشریح مثال های کتاب درسی	
	با هدف انگیزش و ایجاد توسعه فکری دانش آموز مثال های اضافی حل شوند		حل مثال های پیشنهادی و ضروری	
	فعالیت های متناسب با موضوع تدریس شده به دانش آموزان واگذار شود و در جلسه بعدی به بحث گذاشته شوند		تشریح مطالب فوق برنامه	
	تمرینات کتاب و یا طراحی شده توسط معلم، با مشارکت دانش آموزان حل می شوند		حل تمرینات مربوط و خارج از کلاس	
	با یک نگاه کلی مطالب تدریس شده را بار دیگر جمع بندی تا باعث افزایش تمرکز دانش آموزان شود		جمع بندی مطالب تدریس شده	
	با سؤالات کوتاه از دانش آموزان سعی شود که تعداد بیشتری از آنها مورد ارزیابی قرار گیرند تا مطالب درسی در حافظه آنان ماندگار گردد		ارزیابی مطالب تدریس شده از دانش آموزان	

## جلسه هفتم: محاسبه ابعاد دیوار

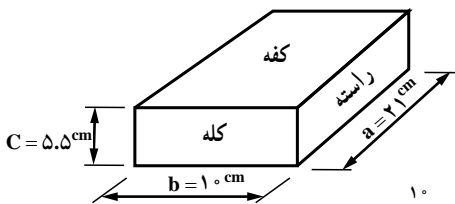
**مقدمه:** یکی از فعالیت‌های مهندسی عمران، متره و برآورد است که در این بحث ابتدا اقدام به محاسبه حجم عملیات نموده و سپس براساس واحد خرید یا واحد کار هزینه‌های آن محاسبه می‌شود. دانستن تعداد آجرهای مصرفی در یک ساختمان یا دیوار از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا می‌توان به اندازه کافی سفارش خرید داد و یا با دانستن وزن یک آجر می‌توان تئاًر حدودی آجرها را تعیین نمود. پیشنهاد می‌شود دانش‌آموزان با اندازه‌گیری آجرهای دیوار حیاط مدرسه و یا کارگاه تعیین و تفاوت ابعادی آنها با آجر استاندارد یک عملیات واقعی اجراء نمایند.

### ۳-۱- کلیاتی در مورد ابعاد آجر و دیوار

نماهای آجری، یکی از زیباترین نماهای بی‌شمار می‌روند زیرا مواد آجر که خاک رس باشد، یک ماده طبیعی است و رنگ آن با جذب رطوبت و آب تغییر می‌یابد و همچنین یکی از رنگ‌های ملایم و بدون زمینه حساسیت‌زایی است سازگاری آن با اقلیم و میزان عایق بودن آن از اهمیت خاصی برخوردار است. لذا انتخاب ابعاد آجر بستگی به مدول‌های معماری دارند و ابعاد پایه‌ها، جزها، پنجره‌ها و حتی ارتفاع ساختمان متأثر از ابعاد آجر می‌باشند.

انتخاب ابعاد آجر تابع مدول معماری، وزن آن و تناسب و زیبایی می‌باشد، وزن آجر باید به اندازه‌ای باشد که به راحتی توسط شاگرد بنا برای بنا پرتاب و بدون کش آمدن کتف بنا دریافت و نصب گردد. در کتاب درسی ابعاد آجر به صورت  $۲۱ \times ۱۰ \times ۵/۵$  سانتی‌متر پیشنهاد شده است که از اصل زیر تبعیت می‌کنند.

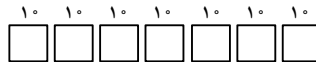
۱  $۲b \Rightarrow a$  درز ملات به اندازه یک سانتی‌متر دو برابر عرض آجر طول آجر



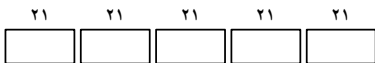
a طول آجر (اندازه راسته)

b عرض آجر (اندازه کله)

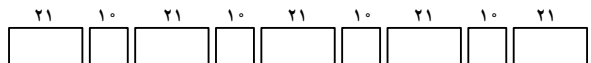
اصطلاحات و مشخصات آجر:



دیوارچینی با نمای کله

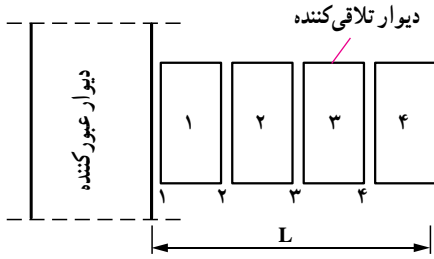


دیوارچینی با نمای راسته



### ۲-۳- محاسبه طول دیوار در تلاقی یک طرفه

برای دیوارهایی که از یک طرف با دیوار دیگر تلاقی پیدا کرده باشند، تعداد سر نما (کله) و بند عمودی مساوی دارند، رابطه محاسبه طول با اندازه آجر داده شده ( $21 \times 10 \times 5/5 \text{ cm}$ ) عبارت است از:



شکل ۲

$n$  - تعداد کله‌ها در طول دیوار  $11n$   $(n \times 1)$   $(n \times 10)$  طول دیوار کله چین

**آموزش تکمیلی:** برای درک بهتر می‌توان دانش‌آموزان را به محوطه مدرسه و یا محلی که دارای دیوار چینی آجری است دعوت نمود و از نزدیک ضمن برداشت ابعاد آجرهای استفاده شده که عموماً دارای اندازه‌های استاندارد و یکنواخت نیستند، آموزش لازم را به آنها داد. در صورتی که دیوار آجری در دسترس نباشد با سفارش تهیه قالب‌های چوبی با ابعاد مناسبی (فرض یک چهارم ابعاد آجر) می‌توان مثال‌های عینی جهت تسلط بیشتر دانش‌آموزان به کار بست.

**مثال:** اگر دیواری از یک طرف با دیوار دیگری تلاقی کند و دارای ۱۴ سر نما باشد، طول این دیوار چند متر است؟

$$L \quad 11n \quad L \quad 11 \times 14 \quad 154 \text{ cm} \quad 154 \div 100 \quad 1/54 \text{ m}$$

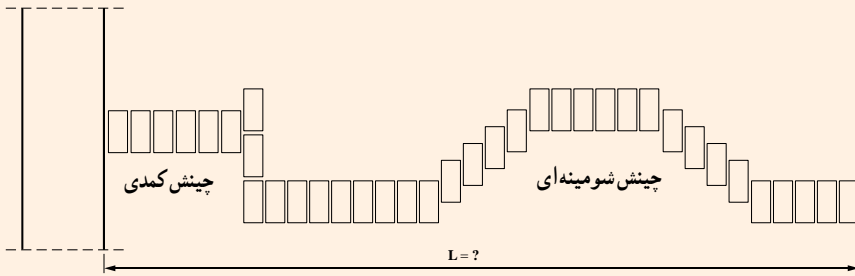
**تحلیل:** برای تعداد سر کله‌های کم می‌توان از روش ترسیمی بهره جست، در زیر با روش ترسیمی طول محاسبه شده است.

از شمارش نتیجه می‌شود که تعداد سر کله ۱۰ سانتی متری برابر ۱۴ و تعداد بندهای قائم یک سانتی متری برابر ۱۴ می‌باشد.

$$L \quad 14 \times 10 \quad 14 \times 1 \quad 154 \text{ cm}$$

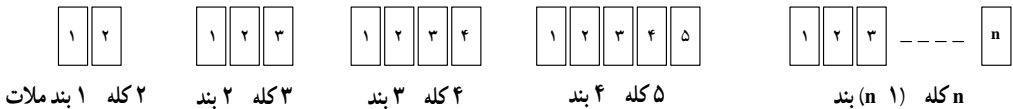


از دانش آموزان بخواهید چیدمان‌های جدیدی از آجرها به صورت کله (سرنما) روی کاغذ ترسیم و براساس ابعاد آجر پیشنهادی، طول تصویر شده آن را محاسبه نمایند.  
به عنوان مثال، در طرح زیر طول (L) را محاسبه کنند.



### ۳-۳- محاسبه طول دیوار آزاد

در دیوارهایی که از دو طرف آزاد هستند، همواره تعداد درز ملات‌ها (بند عمودی) یکی کمتر از تعداد کله‌ها است. به شکل زیر مراجعه گردد.



طول دیواری که دارای n کله آجر است با احتساب (n-1) بند یک سانتیمتری (بند قائم) برابر

است با:

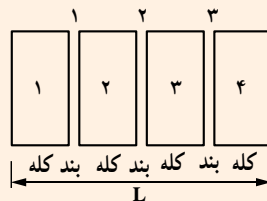
$$L = n \times 10 + (n - 1) \times 1 = 10n - n + 1 = 9n + 1$$

### نتیجه‌گیری

اندازه طول دیوارهای آزادی که از دو طرف باز باشند، برابر است با:

$$L = n \times 10 + (n - 1) \times 1$$

$$L = 9n + 1$$





## تحلیل مثال صفحه ۳۴ کتاب درسی :

**مثال :** طول یک دیوار آزاد با ۱۵ سرنما چند متر است؟

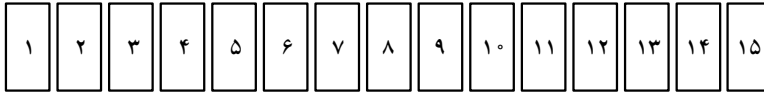
$$L \quad 11n \quad 1$$

$$L \quad 11 \times 15 \quad 1 \quad 164 \text{cm}$$

$$164 \div 100 \quad 1/64 \text{m}$$



**تحلیل :** از روش ترسیمی می توان استفاده کرد.



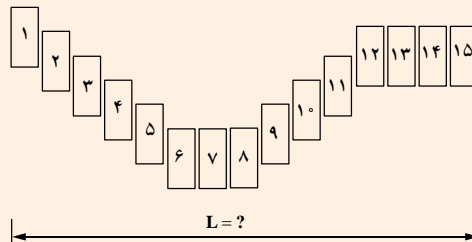
با شمارش به دست می آید که تعداد سرکله برابر ۱۵ عدد و مقدار بند قائم برابر ۱۴ (۱۵ ۱) بند است.

$$L \quad 15 \times 10 \quad 14 \times 1 \quad 164 \text{cm} \quad 1/64 \text{m}$$

$$\text{یا } L \quad 11n \quad 1 \quad 11 \times 15 \quad 1 \quad 164 \text{cm} \quad 1/64 \text{m}$$

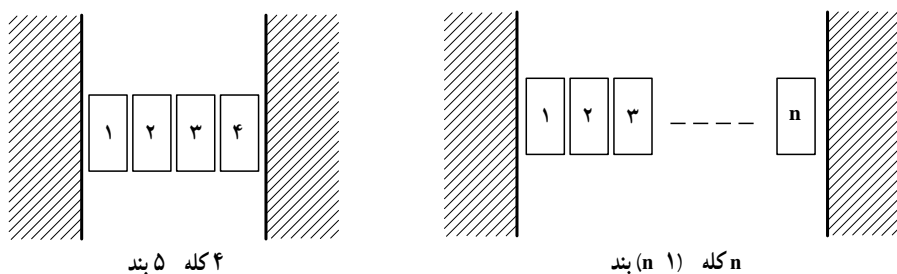
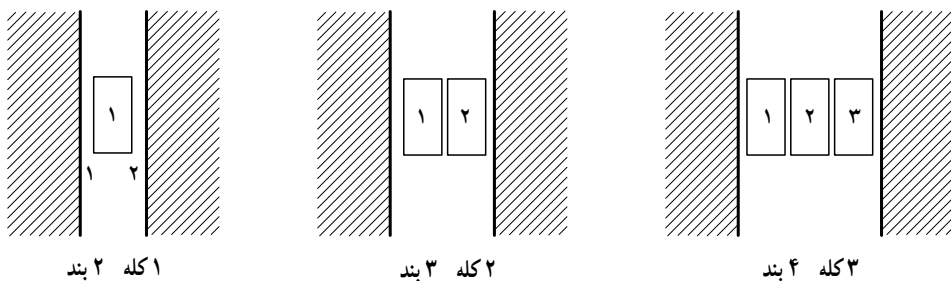
### فعالیت بیشتر

برای تسلط بیشتر می توان انواع مختلفی چیدمان کله ای را به دانش آموزان واگذار نمود تا با تمرین های بیشتر آمادگی بهتری برای درک مسائل داشته باشند.  
به عنوان مثال، دانش آموزان طول های تصویری، نظیر مثال زیر را به دست آورند.



### ۳-۴. محاسبه طول دیوار در تلاقی دو طرفه

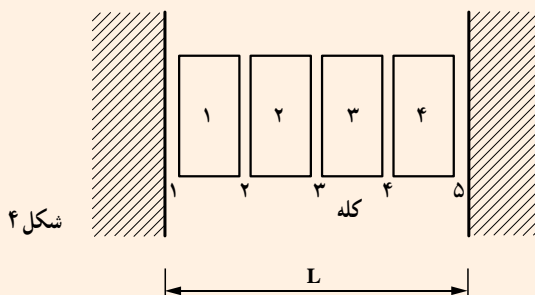
طول دیوارهایی که از دو طرف مسدود (بسته) هستند و یا با دو دیوار دیگر تلاقی می‌کنند با افزودن تعداد یک بند به تعداد کله‌ها تعیین می‌شوند. به نمونه‌های زیر توجه شود.



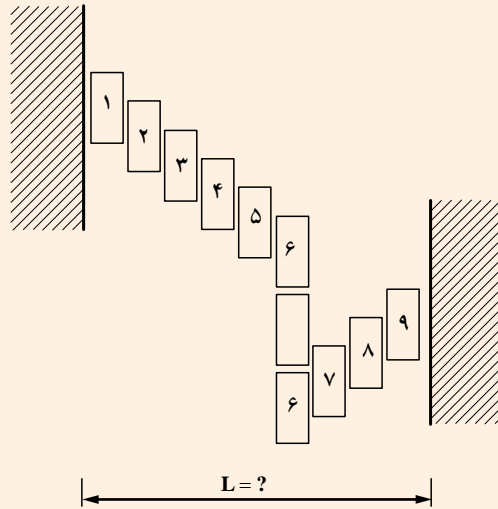
۱ ۱ n ۱ (n ۱) × ۱ ° n × ۱ ° L طول دیوار در تلاقی دو طرفه برای n کله

**نتیجه‌گیری:** طول دیوار در تلاقی دو طرف

$$L \quad ۱ \quad ۱ \quad n \quad ۱ \quad (n \quad ۱) \times ۱ \Rightarrow L \quad ۱ \quad ۱ \quad n \quad ۱$$

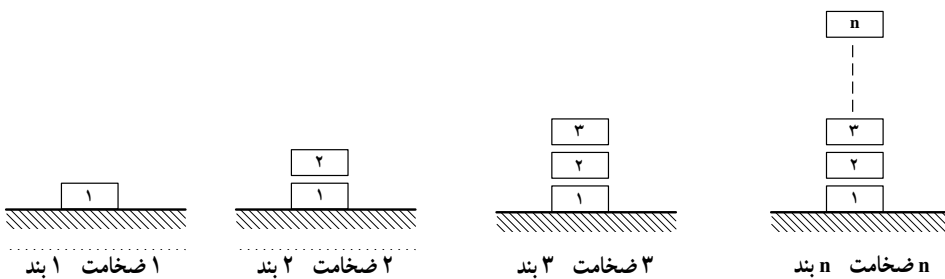


از دانش آموزان بخواهید طول تصویر نمونه‌ای از دیوار با تالاقی دو طرفه مطابق شکل را محاسبه کنند و سپس از نحوه چیدمان هم خط (هم محور) و چیدمان پله ای در تعیین طول نتیجه‌گیری کنند.

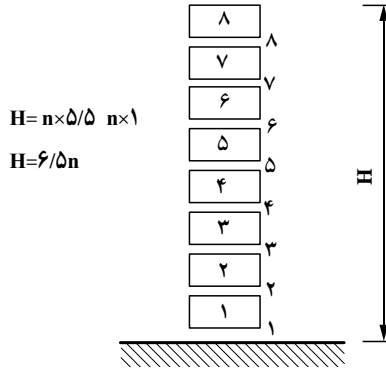


### ۳-۵- محاسبه ارتفاع دیوار

در محاسبه ارتفاع دیوار با انتهای آزاد، باید دقت داشت که تعداد ردیف‌های آجر (با ضخامت ۵/۵ سانتی متر) با تعداد بندهای افقی (به ضخامت یک سانتی متر) برابر است. به اشکال زیر توجه شود.



اگر ضخامت هر آجر ۵/۵ سانتی متر و ضخامت بند افقی یک سانتی متر باشند آنگاه برای محاسبه ارتفاع دیواری که دارای n رج می باشد، به صورت زیر عمل می شود.



شکل ۵

در شکل زیر انواع دیوارها (آزاد، تلاقی یک طرفه و تلاقی دوطرفه) را در حال اجرا مشاهده

می کنید.



شکل ۶