

۴-۱-۴ قضیه‌های مشتق

قضیه‌ی ۱: اگر تابع f در $x=a$ مشتق داشته باشد در این نقطه پیوسته است.

$$f(x) = x^2 - 3x$$

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است این تابع

در $x=1$ مشتق پذیر است و مشتق آن برابر است با:

$$f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(1) = -1$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۱ تابع پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -2$$

قضیه‌ی ۲: (مشتق حاصل جمع دو تابع)

اگر u و v دو تابع برحسب x و مشتق پذیر باشند و $f(x) = u + v$ ، آن گاه $f'(x) = u' + v'$

$$y = x^2 + x^3$$

مثال ۲: مشتق تابع مقابل را به دست آورید.

$$y' = 2x + 3x^2$$

x^2 و x^3 دو تابع مشتق پذیرند، پس:

قضیه‌ی ۳: اگر u و v برحسب x دارای مشتق باشند و $f = u \cdot v$ آن گاه $f' = u'v + v'u$

$$f(x) = (-6x^2 + 7x)(3x^4 + \sqrt{x})$$

مثال ۳: مشتق تابع مقابل را به دست آورید.

با استفاده از قضیه‌ی ۳، مشتق $f(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = (-12x + 7)(3x^4 + \sqrt{x}) + (12x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}})(-6x^2 + 7x)$$

تذکر: مشتق حاصل ضرب دو تابع به حاصل ضرب تعداد متناهی تابع قابل تعمیم است.

$$f(x) = (x-2)(x-5)(x+6)$$

مثال ۴: مشتق تابع مقابل را به ازای $x=2$ به دست

آورید.

حل: مشتق تابع برابر است با:

$$f'(x) = (x-2)'(x-5)(x+6) + (x-2)(x-5)'(x+6) + (x-2)(x-5)(x+6)'$$

– پس از محاسبه‌ی مشتق هر پراتز خواهیم داشت:

$$\Rightarrow f'(x) = (x-5)(x+6) + (x-2)(x+6) + (x-2)(x-5)$$

– به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow f'(2) = (2-5)(2+6) + (2-2)(2+6) + (2-2)(2-5)$$

پس مشتق $f(x)$ به ازای $x=2$ برابر است با:

$$f'(2) = -24$$

قضیه‌ی ۴: (مشتق حاصل تقسیم دو تابع)

اگر $u'(x)$ و $v'(x)$ وجود داشته باشد و $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ به شرط $v(x) \neq 0$ آن‌گاه داریم:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

مثال ۵: مشتق تابع مقابل را بنویسید.

$$y = \frac{-7x+5}{3+4x}$$

حل: با استفاده از قضیه‌ی ۴ داریم:

$$\Rightarrow y' = \frac{-v(3+4x) - 4(-7x+5)}{(3+4x)^2}$$

$$= \frac{-21 - 28x + 28x - 20}{(3+4x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-41}{(3+4x)^2}$$

پس از ساده کردن، مشتق تابع برابر است با:

مثال ۶: مشتق تابع مقابل را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{5}{x^3}$$

حل: طبق قضیه‌ی ۴ داریم:

$$f'(x) = \frac{0 \times x^3 - (3x^2) \times 5}{(x^3)^2} = \frac{-15x^2}{x^6}$$

– مشتق تابع برابر است با :

$$f(x) = -\frac{15}{x^4}$$

قضیه ی ۵: (مشتق ترکیب دو تابع)

اگر y تابعی برحسب u با ضابطه ی $y = f(u)$ و u نیز تابعی برحسب x با ضابطه ی $u = g(x)$ باشد، آن گاه

$$y = f(u) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) \quad y \text{ تابعی برحسب } x \text{ با این ضابطه:}$$

می باشد. حال اگر $u = g(x)$ در x مشتق پذیر و تابع f در $u = g(x)$ مشتق پذیر باشد آن گاه y نیز در x مشتق پذیر است و همچنین :

$$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

مثال ۷: تابع های u و y در مقابل مفروض اند. مشتق y

را برحسب x (y'_x) به دست آورید.

$$y = -2u^3, \quad u = 3x^2 + 5x$$

– با توجه به قضیه ی ۵ و رابطه ی y'_x خواهیم داشت :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u) \Rightarrow y' = (6x + 5)(-6u^2)$$

– در عبارت مشتق، به جای u ، مساوی آن را قرار می دهیم،

$$y' = -6(6x + 5)(3x^2 + 5x)^2$$

پس :

مثال ۸: تابع های u و y در مقابل مفروض اند ؛

$$y = 3u^2 + 5u - 3 \quad \text{و} \quad u = \sqrt{3x+1}$$

ابتدا y'_x را یافته، سپس مقدار $y'_{(5)}$ را حساب کنید.

حل: با کاربرد قضیه ی ۵ مشتق تابع مرکب عبارت است

از :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u) \Rightarrow$$

$$y'_x = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)(6u + 5) \Rightarrow$$

– در مشتق تابع به جای u مقدار آن را قرار می دهیم :

$$y'_x = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)(6\sqrt{3x+1} + 5) \Rightarrow$$

– برای محاسبه ی $y'_{(5)}$ به جای x عدد ۵ را در مشتق

قرار می دهیم.

$$y'_{(5)} = \left(\frac{3}{2\sqrt{3 \times 5 + 1}}\right)(6\sqrt{3 \times 5 + 1} + 5)$$

– مشتق تابع در $x = 5$ برابر است با :

$$\Rightarrow y'_{(5)} = \left(\frac{3}{8}\right)(29) \Rightarrow y'_{(5)} = \frac{87}{8}$$

(مشتق توابع مثلثاتی)

الف) مشتق تابع سینوس

مثال‌های نمونه:

$$y = \sin x \cdot \sqrt{x} \quad y' = \cos x \cdot \sqrt{x}$$

$$y = 2 \sin x \cdot 3 \sin(x^2 \cdot x)$$

$$y' = 2 \cos x \cdot 3(2x \cdot 1) \cos(x^2 \cdot x)$$

۱- اگر $y = \sin x$ آن‌گاه $y' = \cos x$

۲- اگر $y = \sin u$ (بر حسب x) آن‌گاه $y' = u \cdot \cos u$

ب) مشتق تابع کسینوس

$$y = \cos \sqrt{x} \quad y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$$

۱- اگر $y = \cos x$ آن‌گاه $y' = -\sin x$

۲- اگر $y = \cos u$ (بر حسب x) آن‌گاه $y' = -u \cdot \sin u$

ج) مشتق تابع تانژانت

$$y = (3x \cdot 5) \tan x \quad y' = 3 \tan x \cdot (3x \cdot 5) + (1 \cdot \tan^2 x) \quad y' = 1 \cdot \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

۲- اگر $y = \tan u$ (بر حسب x) آن‌گاه $y' = u \cdot (1 + \tan^2 u) = \frac{u}{\cos^2 u}$

$$y = \tan 4x \quad y' = 4(1 + \tan^2 4x) = \frac{4}{\cos^2 4x}$$

د) مشتق تابع کتانژانت

۱- اگر $y = \cot x$ آن‌گاه

$$y = \cot^3 x \quad y' = -3(1 + \cot^2 x) \cot^2 x$$

$$y' = -(1 + \cot^2 x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y' = -u(1 + \cot^2 u) = \frac{u}{\sin^2 u}$$

۲- اگر $y = \cot u$ آن‌گاه

$$y = \cot \sqrt{x} \quad y' = -\sqrt{x}(1 + \cot^2 \sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 \sqrt{x}}$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب

$$f(x) = 5x^2 - 3 \sin 2x, \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{کنید.}$$

حل: مشتق تابع را به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ حساب می‌کنیم.

$$f(x) = 10x - 6 \cos 2x. \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) - 6 \cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

— در $x = \frac{\pi}{4}$ ، مشتق برابر است با:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{2} - 6 \cos \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده

محاسبه کنید.

$$f(x) = \sin 3x \cdot \cos 2x, \quad x = \frac{\pi}{6}$$

حل: مشتق حاصل ضرب دو تابع برابر است با:

$$f(x) = 3 \cos 3x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin 3x.$$

— به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ ، مشتق برابر است با:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{2}.$$

— پس از ساده کردن مشتق به دست می‌آید.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \sqrt{3}$$

مثال ۱۱: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده

به دست آورید.

$$f(x) = x\sqrt{2x} \quad \text{و} \quad x = \frac{9}{2}$$

حل: مشتق حاصل ضرب دو تابع برابر است.

$$f(x) = 1 \cdot \sqrt{2x} + \frac{2}{2\sqrt{2x}} \cdot x = \sqrt{2x} + \frac{x}{\sqrt{2x}}$$

— به ازای $x = \frac{9}{2}$ مقدار مشتق برابر است با:

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = \sqrt{9} + \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{9}} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

مثال ۱۲: مشتق تابع مقابل را به ازای نقطه‌ی داده

شده به دست آورید.

$$f(x) = 2x \cdot \cot \frac{x}{2} \quad \text{و} \quad x = \pi$$

حل: مشتق جمع دو تابع برابر جمع مشتق‌های آن دو

تابع است؛ در نتیجه داریم:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cot^2 \frac{x}{2}\right). \quad f(\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cot^2 \frac{\pi}{2}\right)$$

— به ازای $x = \pi$ مقدار مشتق برابر است با:

$$f(\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} (1 - 0) = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

— پس از ساده کردن $f(\pi)$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow f'(\pi) = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{5x-1} \text{ و } x=1$$

$$f'(x) = \frac{0 \times (5x-1) - 5 \times 3}{(5x-1)^2} = \frac{-15}{(5x-1)^2} \Rightarrow$$

$$f'(1) = \frac{-15}{16}$$

$$f(t) = \frac{2t-4}{5-4t}, \quad t=4$$

$$f'(t) = \frac{2(5-4t) - (-4)(2t-4)}{(5-4t)^2} = \frac{10 - 8t + 8t - 16}{(5-4t)^2}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{-6}{(5-4t)^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-6}{121}$$

$$y = \sqrt{4 + \sin 2x} \text{ و } x=0$$

$$y' = \frac{\cancel{2} \cos 2x}{\cancel{2} \sqrt{4 + \sin 2x}} \Rightarrow y'_{(0)} = \frac{\cos(0)}{\sqrt{4 + \sin(0)}} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \sin^3 + \cos^3 0, = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(0) = 3 \cos 0 \sin^2 - \sqrt{\sin 0} \cos^2 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2} - \sqrt{\sin \frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{\pi}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f(x) = (x^2 + \cos x)(-3x + 4), \quad x=0$$

مثال ۱۳: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده

محاسبه کنید.

– با استفاده از مشتق کسر به ازای $x=1$ مشتق را

به دست می آوریم:

مثال ۱۴: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده

محاسبه کنید.

– مشتق تابع کسری برابر است با:

– به ازای $t=4$ ، مشتق تابع برابر است با:

مثال ۱۵: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده

محاسبه کنید.

حل: مشتق تابع به ازای $x=0$ برابر است با:

مثال ۱۶: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده

محاسبه کنید.

حل: مشتق برابر است با:

– به ازای $\frac{\pi}{2}$ ، مقدار مشتق به دست می آید.

مثال ۱۷: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده

حساب کنید.

حل: مشتق تابع حاصل ضرب برابر است با: $f'(x) = (2x - \sin x)(-3x + 4) - 3(x^2 + \cos x)$

به ازای $x = 0$ مقدار مشتق به دست می آید.
 $f'(0) = (2(0) - \sin(0))(-3(0) + 4) - 3(0^2 + \cos(0))$
 $\Rightarrow f'(0) = 0 - 3 \Rightarrow f'(0) = -3$

۵-۱-۴- مشتق دوم یک تابع: با تکرار عمل مثال:

$$f(x) = 3x^5 - 6x^2 + 11$$

$$f'(x) = 15x^4 - 12x$$

$$f''(x) = 60x^3 - 12$$

مشتق گیری در صورت وجود مشتق می توان از مشتق تابع دوباره مشتق گرفت که به آن مشتق مرتبه ی دوم تابع می گوئیم و آن را به صورت y'' یا $f''(x)$ نمایش می دهیم.

نکته: اگر تابع f با ضابطه ی $y = f(x)$ روی بازه ی I مشتق پذیر باشد، اگر تابع f' روی I مشتق پذیر باشد آنگاه می گوئیم تابع f روی I مشتق دوم دارد و مشتق دوم y را با $f''(x)$ نمایش می دهیم و به همین ترتیب مشتق مرتبه ی سوم را با $f'''(x)$ یا $f^{(3)}(x)$ و ... و مشتق مرتبه ی n ام را با $f^{(n)}(x)$ نمایش می دهیم.

$$f^{(3)}(x) = 180x^2 \text{ و } f^{(4)}(x) = 360x$$

$$f^{(5)}(x) = 360 \text{ و } f^{(6)}(x) = 0$$

$$f(x) = -3x^3 + 5x^2 \text{ و } x = -2$$

$$f'(x) = -9x^2 + 10x \Rightarrow f''(x) = -18x + 10$$

$$f''(-2) = -18(-2) + 10 \Rightarrow f''(-2) = 46$$

مثال ۱: در تابع روبه رو $f''(x)$ را در نقطه ی داده شده

حساب کنید.

– از مشتق اول دوباره مشتق می گیریم:

– به ازای $x = -2$ مشتق دوم تابع برابر است با:

مثال ۲: در تابع مقابل $f''(x)$ را در نقطه ی داده شده

به دست آورید.

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow f''(x) = -\sin x - \cos x$$

– از مشتق اول دوباره مشتق می گیریم:

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

– به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق دوم تابع برابر است با:

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

– پس از ساده کردن داریم:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 5Bx^2 + 3x$$

مثال ۳: تابع مقابل مفروض است، هرگاه $y''(2) = 9$ باشد

مقدار B را محاسبه کنید.

$$y' = x^2 - 1 \cdot Bx + 3 \Rightarrow y'' = 2x - 1 \cdot B$$

حل: مشتق اول و دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$9 = 2(2) - 1 \cdot B \Rightarrow 1 \cdot B = 4 - 9 \Rightarrow B = \frac{-5}{1} = \frac{-1}{2}$$

- مشتق را برابر عدد داده شده قرار می‌دهیم، B به دست

می‌آید.

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} \text{ و } g(x) = x\sqrt{x}$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض‌اند:

$$f''(8) + g''(4) = \frac{35}{72}$$

نشان دهید بین مشتق‌های دوم آن‌ها رابطه‌ی روبه‌رو برقرار

است:

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

حل: مشتق اول تابع با ضابطه f(x) برابر است با:

- برای محاسبه‌ی f''(x) از f'(x) مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right) x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}$$

- به ازای x = 8 مقدار f''(x) برابر است با:

$$f''(x) = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f''(8) = \frac{4}{9\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{9}$$

- مشتق اول g(x) برابر است با:

$$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x \Rightarrow g'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

- برای محاسبه‌ی g''(x) از g'(x) مشتق می‌گیریم:

$$g''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1 \times (2\sqrt{x}) - x(2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}})}{(2\sqrt{x})^2}$$

- مشتق دوم g(x) برابر است با:

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2x - x}{4x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

- به ازای x = 4 مشتق دوم g(x) برابر است با:

$$\Rightarrow g''(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2+1}{8}$$

$$\Rightarrow g''(4) = \frac{3}{8}$$

- با مقایسه‌ی مقادیر مشتق دوم نتیجه می‌گیریم که رابطه

برقرار است.

$$f''(8) + g''(4) = \frac{1}{9} + \frac{3}{8} = \frac{8+27}{72} = \frac{35}{72}$$

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۱)

۱- مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

$$۱) f(x) = 5 - 3x$$

$$۲) f(x) = x^2 - 7x$$

۲- با استفاده از تعریف مشتق، ثابت کنید تابع $f(x) = |x - 2|$ در نقطه‌ی $x = 2$ مشتق ندارد.

۳- مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) y = \sqrt[3]{(2x^2 + 3x)^2}$$

$$۲) y = (3x^2 + 5x)^6$$

$$۳) y = (-6 \sin 2x + \cos 3x)^4$$

$$۴) y = \frac{1 - 7x}{3x + 4}$$

۴- مشتق دوم توابع زیر را به دست آورید.

$$y = 3\sqrt{5x+1} + 7x^2 \text{ (الف)}$$

$$y = 2 \cos 3x \text{ (ب)}$$

$$y = \frac{3}{x} \text{ (ج)}$$

$$y = (3x^2 - 5x)^3 \text{ (د)}$$