بخش چهارم

مشتق و کاربردهای آن

هدف کلی بخش

تعیین رفتار تابع‌ها و رسم دقیق نمودار آن‌ها

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	مشتق
دوم	کاربرد مشتق ۱

بخش چهارم

فصل اول

مشتق

هدف کلی

درک مفهوم مشتق و به‌دست آوردن مشتق توابع

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ به کمک تعریف حد، مشتق توابع را به‌دست آورد ؛

۲ــ مشتق یک تابع را در یک نقطه تعریف کند ؛

۳ــ قضیه‌های مشتق و فرمول‌های آن را برای تعیین مشتق توابع دیگر به‌کار گیرد.

پیش‌آزمون (۱)

۱ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

الف) $f(x+h)$ را حساب کنید.

ب) $f(x+h)-f(x)$ را به‌دست آورید.

ج) $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ را حساب کنید.

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

الف) $f(۲)$ را حساب کنید.

ب) $f(x)-f(۲)$ را به‌دست آورید.

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را حساب کنید.

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. هرگاه نمو x را Δx و نمو y را Δy بنامیم :

الف) نمو y را بیابید. ($\Delta y=?$)

ب) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تعیین کنید.

ج) مقدار $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را به‌دست آورید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)

$f(x)=x^{۲}-۲x$

$f(x)=x^{۲}+۳$

$f(x)=-x^{۳}+۵$

۱ــ۴ــ نمو متغیر: اگر f تابعی با ضابطه‌ی $y=f(x)$ و با دامنه‌ی D_f و $x_۱$ و $x_۲$ دو مقدار متمایز از D_f باشند، در این‌صورت $x_۲-x_۱$ را نمو متغیر گوییم و آن را با Δx نمایش می‌دهیم.

$$\Delta x=x_۲-x_۱ \Rightarrow x_۲=x_۱+\Delta x$$:نمو متغیر

نمو تابع: اگر متغیر مستقل x نموی به اندازه‌ی Δx داشته باشد، آن‌گاه متغیر وابسته $f(x)$ نموی به اندازه‌ی Δy خواهد داشت. اگر $y_۱=f(x_۱)$ و $y_۲=f(x_۲)$ دو مقدار از تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ به‌ازای $x_۱$ و $x_۲$ باشند، در این‌صورت $y_۲-y_۱$ را نمو تابع گوییم و آن را با Δy نمایش می‌دهیم :

$$\Delta y=y_۲-y_۱=f(x_۲)-f(x_۱)$$:نمو تابع

$$\Rightarrow \Delta y=f(x_۱+\Delta x)-f(x_۱)$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

مثال ۱: تابع f مفروض است، نمو تابع را به‌دست آورید :

$$f(x)=۳x^۲+۵$$

حل: نمو تابع عبارت است از :

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

ــ در تابع اصلی به‌جای متغیر x مقدار $x+\Delta x$ را قرار می‌دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت :

$$\Delta y=۳(x+\Delta x)^۲+۵-(۳x^۲+۵)\Rightarrow$$

ــ عبارت را ساده می‌کنیم :

$$\Delta y=\cancel{۳x^۲}+۶x.\Delta x+۳\Delta x^۲\cancel{+۵}\cancel{-۳x^۲}\cancel{-۵}$$

Δy برابر است با :

$$\Rightarrow \Delta y=۶x.\Delta x+۳\Delta x^۲$$

مثال ۲: تابع f باضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است نمو تابع را به‌دست آورید.

$$f(x)=x+۷$$

حل: نمو تابع برابر است با :

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\Rightarrow \Delta y=(x+\Delta x)+۷-(x+۷)$$

ــ پس از ساده کردن عبارت، Δy برابر است با :

$$\Rightarrow \Delta y=x+\Delta x+۷-x-۷\Rightarrow \Delta y=\Delta x$$

مثال ۳: تابع f باضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

$$f(x)=x^۲-۵x$$

الف) به‌ازای $x=۲$ و $\Delta x=۰/۱$ مقدار Δy را به‌دست آورید.

حل: نمو تابع برابر است با :

$$. y = f(x + . x) - f(x)$$

ــ $x + . x$ را به‌جای متغیر $f(x)$ قرار می‌دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت :

$$. y = (x + . x)^{۲} - ۵(x + . x) - (x^{۲} - ۵x)$$

ــ پس از ساده کردن عبارت داریم :

$$\Rightarrow . y = \cancel{x^{۲}} + ۲x.. x + . x^{۲} - \cancel{۵x} - ۵. x - \cancel{x^{۲}} + \cancel{۵x}$$

ــ $. y$ برابر است با :

$$. y = ۲x. x + . x^{۲} - ۵. x$$

ــ به‌ازای $x = ۲$ و $. x = ۰/۱$ ، $. y$ را محاسبه می‌کنیم :

$$. y = ۲(۲)(۰/۱) + ۰/۱^{۲} - ۵(۰/۱) \Rightarrow . y = -۰/۰۹$$

ب) به‌ازای $x = ۲$ و $. x = ۰/۰۱$ ، مقدار $. y$ را به‌دست آورید.

حل: با توجه به قسمت الف، داریم :

$$. y = ۲x. x + . x^{۲} - ۵. x \Rightarrow$$

ــ به‌ازای $. x = ۰/۰۱$ و $x = ۲$ مقدار $. y$ را به‌دست می‌آوریم :

$$. y = ۲(۲)(۰/۰۱) + (۰/۰۱)^{۲} - ۵(۰/۰۱) = -۰/۰۰۹۹$$

نکته: (در تابع پیوسته f) از مقایسه‌ی مقدار $. y$ درحالت الف و ب نتیجه می‌گیریم که هرقدر مقدار $. x$ کوچک‌تر شود مقدار $. y$ نیز کوچک‌تر خواهد شد.

۱ــ۱ــ۴ــ تعریف و محاسبه‌ی مشتق: مشتق تابع f را با f' نمایش می‌دهیم و به سه روش زیر تعریف می‌کنیم :

روش ۱: به‌طورکلی حد نمو تابع به نمو متغیر را مشتق تابع می‌نامیم، در صورتی‌که حد موجود و متناهی باشد. یعنی :

$$۱)\ f'(x) = \lim_{. x \to ۰} \frac{f(x + . x) - f(x)}{. x}$$

روش ۲: با تعویض h به $. x$ خواهیم داشت :

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

روش ۳: مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال ۱: مشتق تابع مقابل را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$f(x)=۲-۵x$$

مراحل حل: رابطه‌ی مشتق برابر است با :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ـ $x+\Delta x$ را به‌جای متغیر تابع با ضابطه $f(x)$ جایگزین می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۲-۵(x+\Delta x)-(۲-۵x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-۵\Delta x}{\Delta x}$$

ـ پس از ساده کردن صورت مشتق تابع به‌دست می‌آید.

$$f'(x)=-۵$$

مثال ۲: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست می‌آید :

$$f(x)=x^۲+۶$$

حل: رابطه‌ی مشتق برابر است با :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Rightarrow$$

ـ به‌جای متغیر، در تابع مقدار $x+h$ را قرار می‌دهیم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^۲+۶-(x^۲+۶)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{x^۲}+۲xh+h^۲+\cancel{۶}-\cancel{x^۲}-\cancel{۶}}{h}$$

ـ پس از ساده کردن، مشتق به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{۲xh+h^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲x+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}۲x+h$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x$$

مثال ۳: مشتق تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=x^۲-۴\ ،\ x_۰=۵$$

حل: $f(۵)$ را حساب می‌کنیم،

$$f(۵)=۵^۲-۴=۲۵-۴\Rightarrow f(۵)=۲۱$$

ـ مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=۵$ برابر است با :

$$f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}$$

ـ به‌جای $f(x)$ و $f(۵)$ مقدار آن‌ها را قرار می‌دهیم، پس :

$$\Rightarrow f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{(x^۲-۴)-۲۱}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{x^۲-۲۵}{x-۵}$$

ـ با استفاده از اتحاد مزدوج کسر را ساده می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{\cancel{(x-۵)}(x+۵)}{\cancel{x-۵}}=\lim_{x\to ۵}x+۵$$

ـ مشتق تابع در $x=۵$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(۵)=۱۰$$

مثال ۴: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=x^{۲}-۵x \ ، \ x_{\circ}=۳$$

حل: مقدار $f(۳)$ را حساب می‌کنیم :

$$f(۳)=۳^{۲}-۵(۳)\Rightarrow f(۳)=-۶$$

ـ مشتق تابع f در $x=۳$ برابر است با :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۵x-(-۶)}{x-۳}$$

ـ با استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک صورت کسر تابع را تجزیه می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۵x+۶}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۲)\cancel{(x-۳)}}{\cancel{x-۳}}$$

ـ مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=۳$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(۳)=\lim_{x\to ۳}x-۲=۳-۲\Rightarrow f'(۳)=۱$$

> می‌دانیم $f'(x)=\lim_{\Delta x\to \circ}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to \circ}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ و از طرفی حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی Δx به صفر میل می‌کند درصورتی وجود دارد که حد چپ و راست آن برابر باشند ؛ به بیان دیگر تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ در $x=a$ دارای مشتق است هرگاه داشته باشیم :
>
> $$\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال ۵: مشتق‌پذیری تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$f(x)=|x+۵| \ ، \ x_{\circ}=-۵$$

حل: رابطه‌ی مشتق تابع f در $x=a$ برابر با :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ـ مقدار تابع f را در $x=-۵$ حساب می‌کنیم :

$$f(-۵)=|-۵+۵|=\circ$$

ـ مشتق تابع f در $x=-۵$ برابر است با :

$$f'(-۵)=\lim_{x\to -۵}\frac{f(x)-f(-۵)}{x-(-۵)}=\lim_{x\to -۵}\frac{|x+۵|-\circ}{x+۵}$$

ـ حد تابع را با استفاده از تعریف قدرمطلق حساب می‌کنیم.

ـ هرگاه $x > -۵$ حد تابع برابر است با :

$$\lim_{x\to -۵^+} \frac{|x+۵|}{x+۵} = \lim \frac{\cancel{(x+۵)}}{\cancel{x+۵}} = ۱$$

ـ هر گاه $x < -۵$ حد تابع برابر است با :

$$\lim_{x\to -۵^-} \frac{|x+۵|}{x+۵} = \lim \frac{\cancel{-(x+۵)}}{\cancel{x+۵}} = -۱$$

ـ مشتق f در $x = -۵$ وجود ندارد، زیرا :

$$۱ \neq -۱$$

مثال ۶: مشتق تابع مقابل را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$f(x) = ۳ + ۵x$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق را می‌نویسیم :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

با جای‌گذاری $f(x+\Delta x)$ و $f(x)$ در رابطه داریم :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{۳ + ۵(x+\Delta x) - (۳+۵x)}{\Delta x}$$

ـ صورت کسر را ساده می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\cancel{۳} + \cancel{۵x} + ۵\Delta x - \cancel{۳} - \cancel{۵x}}{\Delta x}$$

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{۵(\Delta x)}{\Delta x} = ۵$$

مثال ۷: مشتق تابع روبه رو را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{۵}{x}$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ـ به جای متغیر x در تابع $x + \Delta x$ قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\frac{۵}{x+\Delta x} - \frac{۵}{x}}{\Delta x}$$

ـ از صورت کسر مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\frac{\cancel{۵x} - \cancel{۵x} - ۵\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{۱}}$$

ـ کسر مرکب را به کسر ساده تبدیل می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{-\cancel{۵\Delta x}}{x(x+\Delta x)} \times \frac{۱}{\cancel{\Delta x}}$$

ـ حد تابع را حساب می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{-۵}{x(x+\Delta x)} = \frac{-۵}{x(x+۰)}$$

مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x)=\frac{-۵}{x^{۲}}$$

مثال ۸: مشتق تابع روبه رو را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

$$f(x)=x^{۳}$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق برابر است با :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^{۳}-x^{۳}}{h}\Rightarrow$$

ـ با استفاده از اتحاد مکعب صورت را ساده می‌کنیم.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{x^{۳}+۳x^{۲}h+۳xh^{۲}+h^{۳}-x^{۳}}{h}$$

ـ از متغیر h در صورت فاکتور می‌گیریم.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{۳x^{۲}h+۳xh^{۲}+h^{۳}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۳x^{۲}+۳xh+h^{۲})}{h}$$

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to ۰}۳x^{۲}+۳xh+h^{۲}\Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ی خواسته شده حساب کنید.

$$f(x)=\sqrt{x}\ \text{،}\ x=۲$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=۲$ برابر است با :

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$$

ـ با توجه به صورت کسر مخرج را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{x-۲}=\lim\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{(\sqrt{x}-\sqrt{۲})(\sqrt{x}+\sqrt{۲})}$$

ـ پس از رفع ابهام از تابع داریم :

$$\Rightarrow f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{۲}}$$

ـ مشتق تابع f در $x=۲$ برابر است با :

$$f'(۲)=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ی خواسته شده به‌دست آورید.

$$f(x)=x^{۲}+۵\ \text{،}\ x=۳$$

حل: مقدار $f(x)$ در $x=۳$ برابر است با :

$$f(۳)=۳^{۲}+۵=۱۴$$

ـ رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=۳$ برابر است با :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$$

ـ به جای $f(x)$ مقدار تابع را جایگزین می‌کنیم :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲+۵-۱۴}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}$$

ـ صورت کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه و ساده می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}x+۳$$

مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=۳$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(۳)=۳+۳\Rightarrow f'(۳)=۶$$

۲ـ۱ـ۴ـ برخی از رابطه‌های مشتق

قاعده‌ی ۱ : مشتق تابع ثابت :

$f(x)=c$ و $c\in\mathbb{R}$

مشتق تابع ثابت همواره برابر صفر است.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to ۰}۰=۰$$

مشتق تابع ثابت همواره برابر صفر است ؛ به بیان دیگر :

$$f(x)=c\ ,\ c\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=۰$$

مثال:

$$f(x)=-۲\sqrt{۵}\Rightarrow f'(x)=۰$$

قاعده‌ی ۲ : مشتق تابع درجه اول :

$f(x)=ax+b$ ، $a\neq ۰, a, b\in\mathbb{R}$

ـ از رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ برابر است :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ـ عبارت حاصل را حساب می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}$$

مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{ah}{h}=a$$

مشتق تابع با ضابطه $f(x)=ax+b$ برابر است با : $f'(x)=a$

مثال ۱: مشتق تابع روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$f(x) = -5x + 7$$

ــ مشتق تابع برابر است با ضریب x :

$$f'(x) = -5$$

مثال ۲: مشتق تابع روبه‌رو را به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 5\pi$$

حل: مشتق تابع برابر است با ضریب x :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۳: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق، محاسبه کنید.

$$f(x) = x^2$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow$$

ــ با استفاده از اتحاد مربع کامل عبارت را ساده می‌کنیم :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

ــ پس از فاکتورگیری از h، مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h \Rightarrow f'(x) = 2x$$

نتیجه: هرگاه $f(x) = x^2$ آن‌گاه $f'(x) = 2x$

در حالت کلی می‌توان قاعده‌ی ۳ را بیان کرد.

قاعده‌ی ۳: هرگاه $f(x) = x^n$ و $n \in \mathbb{R}$ آن‌گاه $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال ۴: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

$y = x^2$ $y' = 2x^{2-1} = 2x$

$y = x^7$ $y' = 7x^{7-1} = 7x^6$

$y = x^{-6}$ $y' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7} = \frac{-6}{x^7}$

$y = x^{\frac{4}{3}}$ $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

قاعده‌ی ۴: فرض کنید $f(x)=u^{n}$، (u برحسب متغیر x) $\qquad f'(x)=nu'u^{n-۱}$

مثال ۵: مشتق تابع مقابل را بیابید.

$$f(x)=(-۴x+۷)^{۳}$$

حل:

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=۳(-۴)(-۴x+۷)^{۳-۱}\Rightarrow y'=-۱۲(-۴x+۷)^{۲}$$

قاعده‌ی ۵: فرض کنید $f(x)=kg(x)$، (kمقدار ثابت) آن‌گاه : $\qquad f'(x)=kg'(x)$

اثبات قاعده‌ی ۵: رابطه‌ی کلی تعریف مشتق عبارت است از :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ـ در رابطه‌ی کل به جای $f(x)$ مساوی آن یعنی $kg(x)$ را قرار می‌دهیم، پس :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{kg(x+\Delta x)-kg(x)}{\Delta x}$$

$$=k.\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

در نتیجه مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=k.g'(x)}$$

مثال ۶: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=۷x^{۵}$

$$f'(x)=۷\times ۵\times x^{۴}=۳۵x^{۴}$$

ب) $f(x)=-۶(\frac{۳}{۲}x+۵)^{۶}$

$$f'(x)=(-۶)(۶)(\frac{۳}{۲})(\frac{۳}{۲}x+۵)^{۶-۱}=-۵۴(\frac{۳}{۲}x+۵)^{۵}$$

مثال ۷: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲}x^{\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲x^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

ب) $f(x)=\sqrt{-۳x+۵}$

$$f(x)=(-۳x+۵)^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}(-۳)(-۳x+۵)^{\frac{۱}{۲}-۱}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{۲}(-۳x+۵)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{-۳}{۲}\times\frac{۱}{(-۳x+۵)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$=\frac{-۳}{۲\sqrt{-۳x+۵}}$$

نتیجه‌ی ۱: اگر $y=\sqrt{u}$ (u برحسب x) آن‌گاه $y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

اثبات نتیجه‌ی ۱: می‌دانیم $\sqrt[m]{u^n}=u^{\frac{n}{m}}$ $(m,n\in\mathbb{N})$

پس :

$$y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}(u')\times u^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}u'.u^{-\frac{1}{2}}$$

ـ چون $n\in\mathbb{N}$ و $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ مشتق برابر است با :

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2}u'\times\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

نتیجه‌ی ۲: هرگاه $y=\sqrt[m]{u^n}$ آن‌گاه : $y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

مثال ۸: مشتق تابع مقابل را محاسبه کنید :

$$y=\sqrt[3]{(-4x+3)^2}$$

حل: با استفاده از نتیجه‌ی ۲ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=\frac{2(-4)}{3\sqrt[3]{(-4x+3)^{3-2}}}=\frac{-8}{3\sqrt[3]{-4x+3}}$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=\sqrt{2x+5} \text{ و } x=2$$

حل: با استفاده از نتیجه‌ی ۲ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=\frac{2}{2\sqrt{2x+5}}=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

ـ مقدار مشتق به ازای $x=2$ برابر است با :

$$y'_{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2\times2+5}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$f(x)=\sqrt[5]{(2x+1)^3}\text{ ، } x=0$$

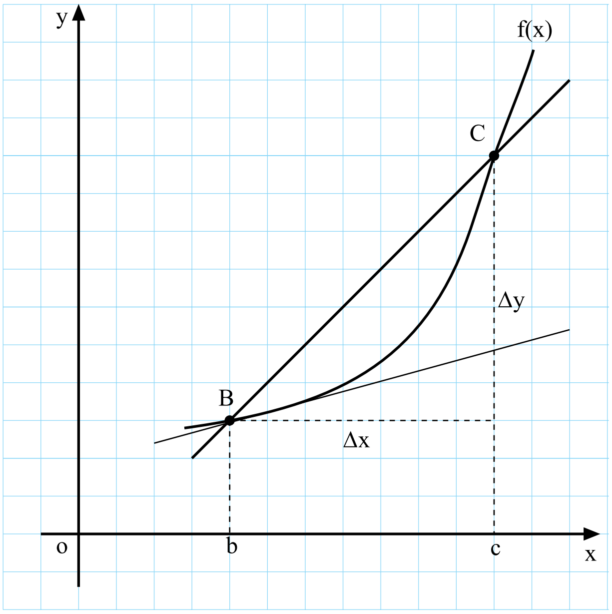
حل: با استفاده از نتیجه ۲ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=\frac{2\times3}{5\sqrt[5]{(2x+1)^{5-3}}}=\frac{6}{5\sqrt[5]{(2x+1)^2}}$$

مقدار مشتق به ازای $x=0$ برابر است با :

$$\Rightarrow y'_{(0)}=\frac{6}{5\sqrt[5]{(0+1)^2}}=\frac{6}{5}$$

۳ــ۱ــ۴ــ تعبیر هندسی مشتق: نمودار ۱ــ۴ را مشاهده کنید : اگر $B(b,f(b))$ نقطه‌ای از منحنی باشد،



نمودار ۱ــ۴

ــ شیب خط مماس برابر است با :

$$m = f'(b) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}$$

نتیجه: شیب خط مماس (ضریب زاویه) بر نمودار y=f(x) که از نقطه‌ی (b,f(b)) می‌گذرد برابر مشتق تابع f با ضابطه‌ی y=f(x) در نقطه‌ی x=b، یعنی :

$$m = f'(b)$$

مثال ۱: معادله‌ی خط مماس بر منحنی روبه‌رو را که از نقطه‌ی $A(-۱,۱)$ می‌گذرد بنویسید.

$$f(x) = -x^۲ + ۲$$

حل: شیب خط مماس بر منحنی تابع f(x) در $x = ۱$ برابر است با :

$$f'(x) = -۲x \Rightarrow m = f'(-۱) = -۲(-۱) \Rightarrow m = ۲$$

ــ معادله‌ی خط مماس بر منحنی که از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} x_۱ \\ y_۱ \end{matrix}\right.$ می‌گذرد برابر است با :

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \quad (/\ )$$

$A\Big|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}$ و $m = 2$ را در رابطه‌ی (*) قرار می‌دهیم :

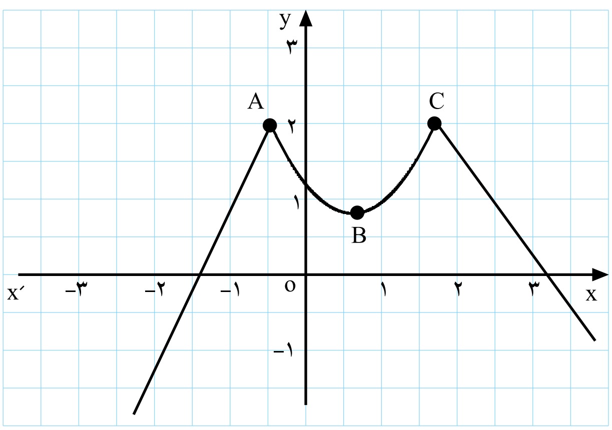
$$y-1=2(x+1) \Rightarrow y=2x+2+1 \Rightarrow$$

ـ معادله‌ی خط مماس که از نقطه‌ی A می‌گذرد برابر است با :

$$\boxed{y=2x+3}$$

نکته: درنقاطی که مماس بر نمودار وجود نداشته باشد، تابع مشتق ندارد.

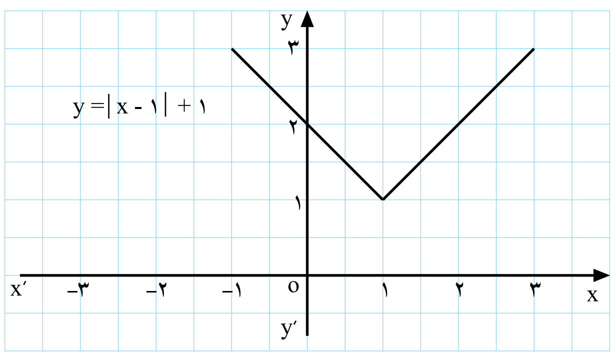
مثال ۲: در نقاط C و A در نمودار ۲ــ۴ مماس وجود ندارد، پس در این نقاط تابع f مشتق ندارد. ولی در نقطه‌ی B دارای مشتق است، زیرا می‌توان در نقطه‌ی B مماس بر منحنی رسم کرد.



نمودار ۲ــ۴

مثال ۳: با توجه به نمودار ۳ــ۴ آیا تابع مقابل در $x=+1$ دارای مشتق است؟ چرا؟

حل: خیر، زیرا نمی‌توان در نقطه‌ی $x=1$ مماس بر نمودار ۳ــ۴ رسم کرد.



نمودار ۳ــ۴