بخش سوم

فصل دوم

پیوستگی

هدف کلی

شناسایی توابع پیوسته و حل مسائل آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ تابع پیوسته را تعریف کند ؛

۲ــ با استفاده از قضیه‌های پیوستگی، حد تابع را در نقطه‌های موردنظر حساب کند ؛

۳ــ نقطه‌های ناپیوستگی تابع‌ها را تعیین کند ؛

۴ــ مسائل پیوستگی را به طور نسبی حل کند.

پیش‌آزمون (۲)

۱ــ شکل ۱۷ــ۳ نمودار تابع f با دامنه‌ی [۱,۶) را نشان می‌دهد.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را در جای خالی بنویسید.

$\square$

ب) f(۲) را محاسبه کنید و در جای خالی بنویسید.

$\square$

ج) آیا نمودار f در نقطه‌ی x = ۲ گسستگی دارد؟

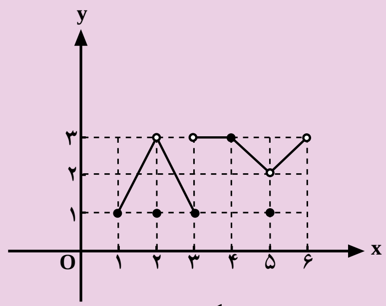
د) آیا نمودار تابع f در [۳,۵) پیوسته است؟

هـ) آیا تابع در نقطه‌ی x = ۵ حد دارد؟

و) آیا نمودار تابع در نقطه‌ی x = ۵ پیوسته است؟

۲ــ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ۱ & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$ را رسم کنید و سپس به سؤالات صفحه‌بعد پاسخ دهید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۲)



شکل ۱۷ــ۳

بلی : ☐

خیر : ☐

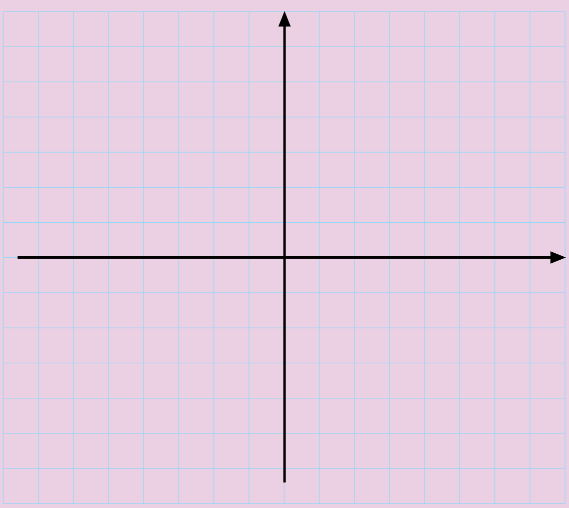
بلی : ☐

خیر : ☐

$\lim\limits_{x\to ۵} f(x) = \square$

بلی : ☐

خیر : ☐


شکل ۱۸ــ۳

الف) حد $f(x)$ وقتی $x \to 0^{+}$ را بیابید.

ب) حد $f(x)$ وقتی $x \to 0^{-}$ را بیابید.

ج) آیا تابع در نقطه‌ی $x = 0$ دارای حد می‌باشد؟

د) $f(0)$ را محاسبه کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۲)

$\lim\limits_{x \to 0^{+}} f(x) = \square$

$\lim\limits_{x \to 0^{-}} f(x) = \square$

بلی : ☐

خیر : ☐

$f(0) = \square$

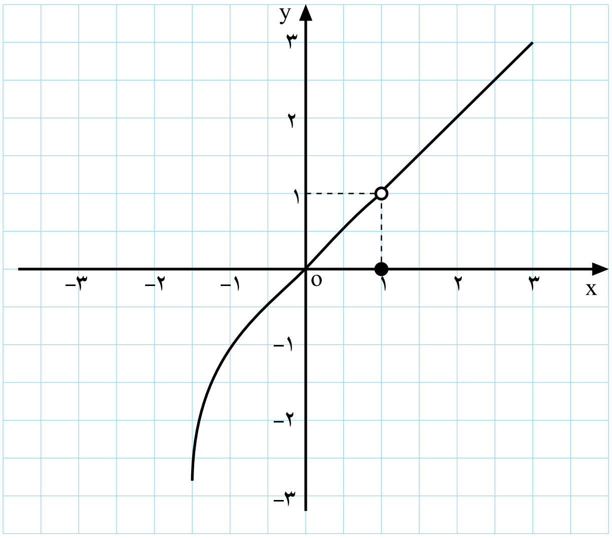
۲ــ۳ــ پیوستگی

اصطلاح پیوسته بودن یک تابع در ریاضی، به مفهوم یک پارچه بودن و عدم گسستگی است. به عبارت دیگر اگر تابع f در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌اش بریدگی نداشته باشد پیوسته است.

ــ نمودار ۱۹ــ۳ مفروض است.

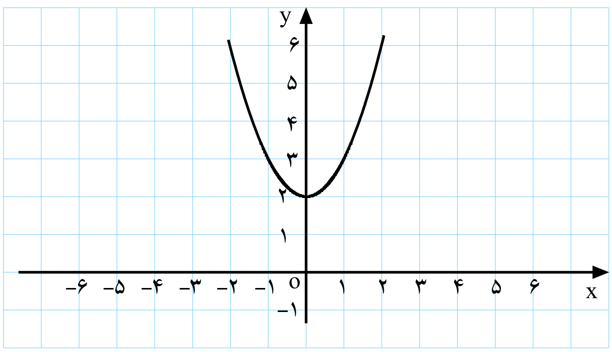
ــ در این نمودار یک بریدگی در نقطه‌ی (۱،۱) مشاهده می‌کنیم، بنابراین تابع پیوسته نیست.

ــ در نمودار ۱۹ ــ۳ وقتی $x \to 1^-$ مقدار $f(x)$ نیز به عدد ۱ میل می‌کند در حالی که مقدار تابع در نقطه‌ی $x=1$ برابر صفر می‌باشد. بنابراین حد تابع در نقطه‌ی $x=1$ با مقدارش برابر نیست.



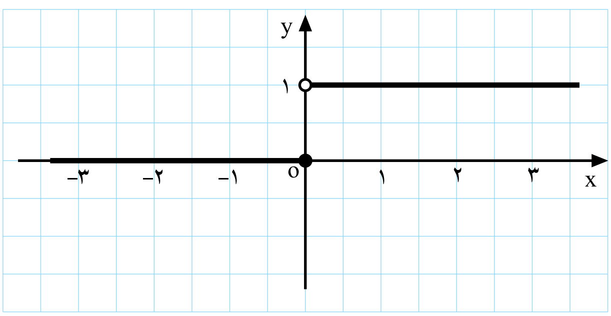
شکل ۱۹ــ۳

در شکل ۲۰ــ۳ نمودار بریدگی ندارد، بنابراین پیوسته است.



شکل ۲۰ــ۳

ــ در شکل ۲۱ــ۳ در نقطه‌ی $x=0$ ، نمودار دارای بریدگی است، بنابراین تابع در آن نقطه پیوسته نیست و دارای حد نیز نمی‌باشد، زیرا $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=0$ در حالی که $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=1$ است ؛ هرچند که مقدار تابع در $x=0$ برابر با حد چپ تابع در نقطه‌ی $x=0$ می‌باشد.



شکل ۲۱ــ۳

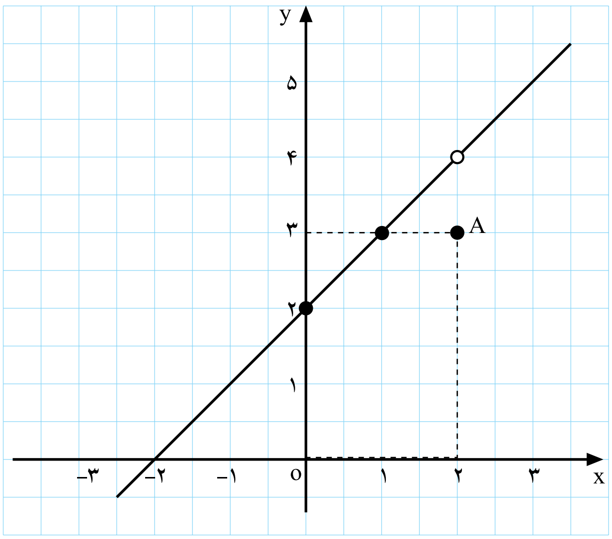
مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است پس از رسم نمودار تابع، پیوستگی آن را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$$

حل: دامنه‌ی این تابع $D_f=\mathbb{R}$ است. با فرض $x\neq ۲$ و با استفاده از اتحاد مزدوج $x^{۲}-۴=(x-۲)(x+۲)$ داریم :

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۲۲ــ۳ مشاهده می‌شود.
با مشاهده‌ی شکل تابع می‌بینیم که تابع در نقطه‌ی (۲،۴) دارای بریدگی است، بنابراین پیوسته نمی‌باشد.



شکل ۲۲ــ۳

از طرف دیگر با مشاهده‌ی نمودار تابع می‌بینیم وقتی $x\to ۲^{+}$ یا $x\to ۲^{-}$ ، $f(x)$ به عدد ۴ میل می‌نماید.

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۴$$

همچنین مقدار تابع در $x=۲$ موجود می‌باشد، امّا با حد تابع برابر نمی‌باشد در حالی که اگر $f(۲)=۴$ باشد بریدگی موجود در خط پوشانده می‌شود و تابع در دامنه‌اش پیوسته می‌گردد.

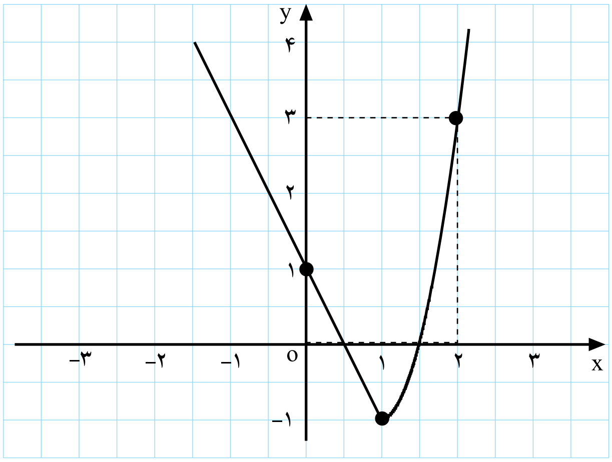
$$f(۲)=۳$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است، پس از رسم در مورد پیوستگی تابع بحث کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۱-۲x & x\leq ۱\\ x^{۲}-۲ & x>۱\end{cases}$$

حل: ضابطه‌ی تابع برای $x\leq ۱$ خط $f(x)=۱-۲x$ و

برای $x>1$ ، سهمی $f(x)=x^2-2$ می‌باشد (شکل ۲۳ــ۳).



شکل ۲۳ــ۳

با توجه به نمودار ۲۳ــ۳ مشاهده می‌کنیم که تابع در دامنه‌اش $D_f=\mathbb{R}$ پیوسته می‌باشد. به ویژه مشاهده می‌کنیم که $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1$ که با $f(1)=-1$ برابر می‌باشد، پس تابع در این نقطه نیز پیوسته است.

تعریف: تابع f را در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه :

۱) تابع f در $x=a$ تعریف شده باشد. $f(a)$ مشخص شده باشد.

۲) حد تابع در $x=a$ وجود داشته باشد. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد.

۳) حد تابع f وقتی $x\to a$ وجود داشته باشد و با مقدار تابع برابر باشد. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

نتیجه‌ی ۱: شرط پیوستگی تابع f در $x=a$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

نتیجه‌ی ۲: از آن‌جا که با پیوسته بودن تابع f در $x=a$ حد و مقدار تابع در این نقطه برابر است بنابراین برای به‌دست آوردن حد f وقتی $x\to a$ کافی است در ضابطه‌ی آن به جای متغیر مقدار a را قرار دهیم.

خط با ضابطه‌ی $f(x)=2x+1$ در $\mathbb{R}$ پیوسته می‌باشد بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to 2} f(x)=2(2)+1=5$$

پیوستگی تابع f دربازه‌ی $[a,b]$

تابع f به $[a,b]$ پیوسته است هرگاه :

۱ــ در (a,b) پیوسته باشد ؛ یعنی به ازای هر عضو این بازه حد و مقدارش یکی باشد ؛

به ازای هر $c\in(a,b)$ داشته باشیم $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

۲ ــ در $x=a$ از راست پیوسته باشد (پیوستگی راست داشته باشد) یعنی داشته باشیم :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

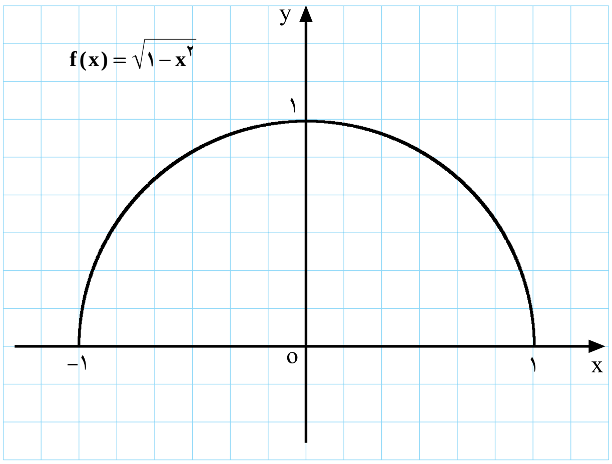
۳ــ در $x=b$ از چپ پیوسته باشد (پیوستگی چپ داشته باشد.)

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

مثال: پیوستگی تابع مقابل را در بازه‌ی $[-۱,۱]$ بررسی کنید.

$$f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$$

حل : نمودار این تابع به صورت نیم دایره است (شکل ۲۴ــ۳).



شکل ۲۴ــ۳

با توجه به نمودار می‌بینیم که :

۱ــ به ازای هر $c\in(-۱,۱)$ داریم :

$$\lim_{x\to c} f(x)=\sqrt{۱-c^۲}=f(c)$$

۲ــ در $x=-۱$ تابع پیوستگی راست دارد، زیرا :

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\sqrt{۱-(-۱)^۲}=۰=f(-۱)$$

۳ــ در $x=۱$ تابع پیوستگی چپ دارد، زیرا :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\sqrt{۱-(۱)^۲}=۰=f(۱)$$

بنابراین تابع f بربازه‌ی $[-۱,۱]$ پیوسته می‌باشد.

۱ــ۲ــ۳ــ قضیه‌های پیوستگی

قضیه‌ی ۱ : توابع زیر در هر نقطه از دامنه‌شان پیوسته‌اند.

۱ــ تابع چند جمله‌ای

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\quad +a_۱x+a_۰$$

اعداد $a_۰$ ، $a_۱$ ، $a_۲$ ، a_n اعداد حقیقی می‌باشند.

۲ــ توابع گویا

$$f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}\ ,\ g(x)\neq ۰$$

۳ــ توابع رادیکالی

$$f(x)=\sqrt[n]{x}$$

۴ــ توابع مثلثاتی

$$f(x)=\sin x, g(x)=\cos x, m(x)=\tan x, n(x)=\cot x$$

۵ــ تابع قدرمطلق

$$f(x)=|x|$$

مثال: حد توابع مقابل را بیابید.

چون اعداد داده شده در دامنه‌ی توابع می‌باشد بنابراین برای محاسبه‌ی حد توابع مقدار هر یک از تابع‌ها را به ازای اعداد داده شده به دست می‌آوریم.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}(x^{۲}-۴x+۱)=(۱)^{۲}-۴(۱)+۱=-۲$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}}\sin x=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۵}\sqrt{۲x-۱}=\sqrt{۲(۵)-۱}=۳$

قضیه‌ی ۲: هرگاه a و k اعداد حقیقی و f و g دو تابع پیوسته در $x=a$ باشند توابع مقابل در $x=a$ پیوسته می‌باشند.

۱) $f+g$

۲) $f-g$

۳) $f\times g$

۴) $\frac{f}{g}$ (با شرط $g(a)\neq ۰$)

۵) kf

نکته: با توجه به قضیه‌ی ۱ و ۲ می‌توان پیوستگی بسیاری از توابع دیگر را نتیجه گرفت؛ به طور مثال، توابع مقابل در دامنه‌شان پیوسته هستند.

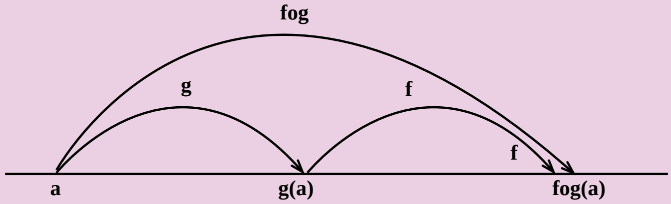
$$f(x)=۲x+\sin x$$

$$f(x)=۷\tan x$$

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۳}{\cos x}$$

نکته: حاصل جمع، تفریق و حاصل ضرب تعداد متناهی از توابع پیوسته در $x=a$ در این نقطه پیوسته می‌باشند.

قضیه: اگر تابع g در a و f در g(a) پیوسته باشد آن‌گاه تابع مرکب با ضابطه $fog(x)=f(g(x))$ در $x=a$ پیوسته است.



شکل ۲۵ــ۳

مثال: تابع با ضابطه‌ی $y=\left|\frac{\cos x}{x^{۲}+۴}\right|$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\frac{\cos x}{x^{۲}+۴} \text{ در } \mathbb{R} \text{ پیوسته} \\ f(x)=|x| \text{ در } \mathbb{R} \text{ پیوسته} \end{array}\right\} \Rightarrow y=fog(x)$$

در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

مثال: حدود الف و ب را به دست آورید.

حل: چون این دو تابع در دامنه‌شان پیوسته می‌باشند.

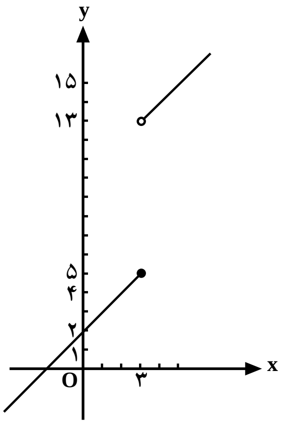
برای پیداکردن حدهای آن‌ها کافی است مقدار تابع را در نقاط خواسته شده پیدا کنیم.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۳x^{۴}+۲x+۱}{۵\sin x+۲}=\frac{۳(۰)^{۴}+۲(۰)+۱}{۵\sin ۰+۲}=\frac{۱}{۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۴-x^{۲}}}{۱+x}=\frac{\sqrt{۴-(۱)^{۲}}}{۱+۱}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

مثال: شکل ۲۶ــ۲ نمودار تابع مقابل است. نقاط پیوستگی تابع را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۷ & x>۳ \\ x+۲ & x\leq ۳ \end{cases}$$



شکل ۲۶ــ۳

حل: چون ضابطه‌ی تابع به ازای $x>۳$ ، $f(x)=۲x+۷$ و به ازای $x\leq ۳$ ، $f(x)=x+۲$ چند جمله‌ای می‌باشد، بنابر قضیه‌ی ۱ پیوستگی، تابع در این بازه‌ها پیوسته است. بنابراین تنها لازم است در نقطه‌ی $x=۳$ پیوستگی آن بررسی شود.

به ازای $x=۳$ مقدار f(x) برابر است با :

$$f(۳)=۳+۲=۵$$

ـ حد تابع، وقتی $x \to ۳^-$ و $x \to ۳^+$ ، برابر است با :

$$\lim_{x \to ۳^-} f(x) = ۳ + ۲ = ۵ \quad \text{و}$$
$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = \underset{x \to ۳^+}{۲(۳)} + ۷ = ۱۳$$

ـ حد چپ و راست برابر نیستند. بنابراین تابع در $x = ۳$ حد ندارد و لذا پیوسته هم نمی‌باشد. ناحیه‌ی پیوستگی تابع با ضابطه‌ی بالا عبارت است از :

$$\mathbb{R} - \{۳\}$$

مثال: مقدار a را در تابع روبه‌رو چنان محاسبه کنید که در $x = ۱$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + ۲x & x < ۱ \\ x^۲ + ۳ax + ۲ & x \geq ۱ \end{cases}$$

حل: شرط پیوستگی تابع f در $x = ۱$:

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = f(۱)$$

پس تابع f در $x = ۱$ حد دارد، یعنی :

$$\lim_{x \to ۱^-} ax^۲ + ۲x = \lim_{x \to ۱^+} x^۲ + ۳ax + ۲$$

ـ مقدار a برابر است با :

$$\Rightarrow a(۱)^۲ + ۲(۱) = ۱^۲ + ۳a(۱) + ۲$$
$$\Rightarrow ۳a - a = -۱ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۲}$$

مثال: مقدار a و b را چنان بیابید که تابع f در $x = ۳$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + a & x < ۳ \\ x - ۱ & x = ۳ \\ |x| + ۲b & x > ۳ \end{cases}$$

حل: چون تابع باید در $x = ۳$ پیوسته باشد بنابراین در این نقطه حد دارد و این حد با مقدار تابع $(f(۳))$ برابر است.

$$\lim_{x \to ۳^-} f(x) = ۳(۳)^۲ + a = ۲۷ + a$$
$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = |۳| + ۲b = ۳ + ۲b$$

ـ مقدار تابع به ازای $x = ۳$ از ضابطه‌ی $x - ۱$ به دست می‌آید، بنابراین :

$$f(۳) = ۳ - ۱ = ۲$$

ـ با توجه به پیوستگی تابع به ازای $x = ۳$ حد چپ و راست برابر مقدار تابع است، پس :

$$\begin{cases} ۲۷ + a = ۲ \Rightarrow a = ۲ - ۲۷ \Rightarrow a = -۲۵ \\ ۳ + ۲b = ۲ \Rightarrow ۲b = ۲ - ۳ = -۱ \Rightarrow b = \frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

ــ در $x = ۳$ تابع f پیوسته است، پس حد راست با مقدار تابع برابر است.

مثال: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. پیوستگی این تابع را در $x = ۳$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{۳}x & x > ۳ \\ ۹ - x^{۲} & x \leq ۳ \end{cases}$$

ــ با توجه به پیوسته بودن هر یک از ضابطه‌ها داریم :

$$\lim_{x \to ۳^-} f(x) = ۹ - (۳)^{۲} = ۰$$

$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = \sin(\frac{\pi}{۳} \times ۳) = \sin \pi = ۰$$

بنابراین تابع در $x = ۳$ حد دارد.

مقدار تابع در نقطه‌ی $x = ۳$ برابر است با :

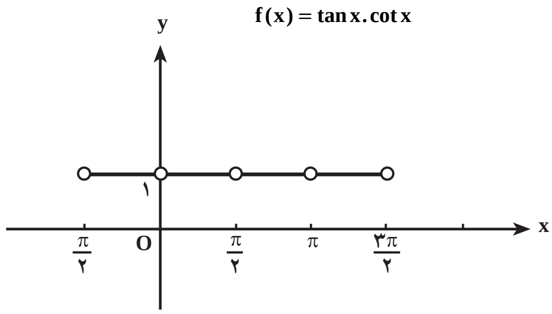
$$f(۳) = ۹ - ۳^{۲} = ۰$$

چون حد و مقدار تابع با یکدیگر برابرند تابع در $x = ۳$ پیوسته است.

$$\lim_{x \to ۳} f(x) = f(۳) = ۰$$

مثال: شکل ۲۷ــ۳ نمودار تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو را در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ نشان می‌دهد. تابع در چه نقاطی پیوسته نیست؟

حل: تابع در نقاط $(\frac{۳\pi}{۲}, ۱)$ ، $(\pi, ۱)$ ، $(\frac{\pi}{۲}, ۱)$ ، $(۰, ۱)$ و $(-\frac{\pi}{۲}, ۱)$ دارای ناپیوستگی است.



شکل ۲۷ــ۳

تمرین

۱ــ پیوستگی تابع‌های زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

$$۱)\ f(x)=\begin{cases}۱-۲x & x\neq ۵\\ -۱۴ & x=۵\end{cases}\quad (\text{در } x_{\circ}=۵)$$

$$۲)\ f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<۱\\ ۲x & x=۱\\ x^{۳}+x & x>۱\end{cases}\quad (\text{در } x_{\circ}=۱)$$

۲ــ شکل ۲۸ــ۳ نمودار تابع f را نشان می‌دهد.

الف) آیا $f(۱)$ وجود دارد؟ بلی ☐ خیر ☐

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ج) آیا نمودار f در $x=۱$ پیوسته است؟

۳ــ به ازای چه مقدار از a تابع f در $x=۲$ پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}+x & x<۲\\ ۳ax & x\geq ۲\end{cases}$$

۴ــ نقاط ناپیوستگی توابع زیر را بیابید.

$$۱)\ f(x)=\frac{۲x}{x^{۲}-۵x}$$

$$۲)\ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

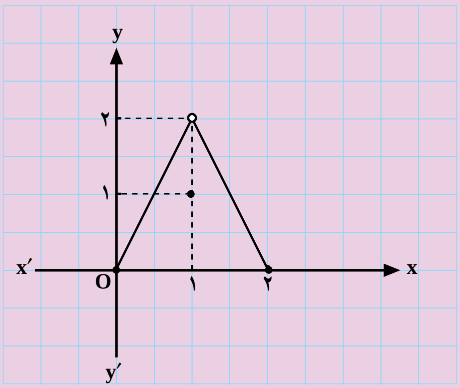
$$۳)\ f(x)=\sqrt{x-۲}$$

$$۴)\ f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}+۵x}$$

۵ــ تابع‌های f با ضابطه‌های زیر داده شده است در هر یک از قسمت‌های الف و ب مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع‌ها در $\mathbb{R}$ پیوسته باشند.

$$\text{الف})\ f(x)=\begin{cases}۵\sin x+۲ & x<\circ\\ b+۱ & x=\circ\\ bx^{۲}+a & x>\circ\end{cases}$$

$$\text{ب})\ f(x)=\begin{cases}۱-x+a & x<۴\\ ۲x & x=۴\\ \frac{۸}{x}-b & x>۴\end{cases}$$



شکل ۲۸ــ۳

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

۱ــ پیوستگی تابع‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$۱)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x}{۲}+۳ & x<۲\\ ۵x-۶ & x\geq ۲\end{cases}\quad (x=۲)$$

$$۲)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}-۱}{x+۱} & x\neq -۱\\ ۳ & x=-۱\end{cases}\quad (x=-۱)$$

۲ــ نقاط پیوستگی تابع‌های زیر را بیابید.

$$۱)\ f(x)=\frac{۷x+۱}{x^{۳}-x}$$

$$۲)\ f(x)=\sqrt{۳-x}$$

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+a}{۳x+۱} & x>۲\\ ۵ & x=۲\\ ۵bx+۴ & x<۲\end{cases}$$

بخش سوم

فصل سوم

تعمیم حد

هدف کلی

تعیین حد تابع وقتی متغیر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند، همچنین بررسی تابع‌هایی که حد آن‌ها، وقتی x به سمت یک عدد حقیقی یا $\pm\infty$ میل می‌کند، برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است.

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ حد بی‌نهایت را تعریف کند ؛

۲ــ حد در بی‌نهایت را برای یک تابع تعریف کند.

پیش آزمون (۳)

۱ــ تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

$$f(x)=\frac{۳}{x-۴}$$

الف) جدول ۱۴ــ۳ را کامل کنید.

ب) هر چقدر x با مقادیر کمتر از ۴ به عدد ۴ نزدیک می‌شود f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است:

$$f(x)=\frac{۳}{x-۴}$$

به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) جدول ۱۵ــ۳ را کامل کنید.

ب) هر چقدر x با مقادیر بیش‌تر از ۴ به عدد ۴ نزدیک و نزدیک‌تر شود f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

۳ــ حدهای مقابل را محاسبه کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۳)

$$f(x)=\frac{۳}{x-۴}$$

جدول ۱۴ــ۳

x	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	۴
f(x)	۱-	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\square$$

$$f(x)=\frac{۳}{x-۴}$$

جدول ۱۵ــ۳

x	۵	۴/۵	۴/۱	۴/۰۱	۴/۰۰۱	$\square$
f(x)	۳	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$+\infty$

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\square$$

الف) $\lim_{x\to\infty}\frac{۵x+۱}{۳x-۲}=?$

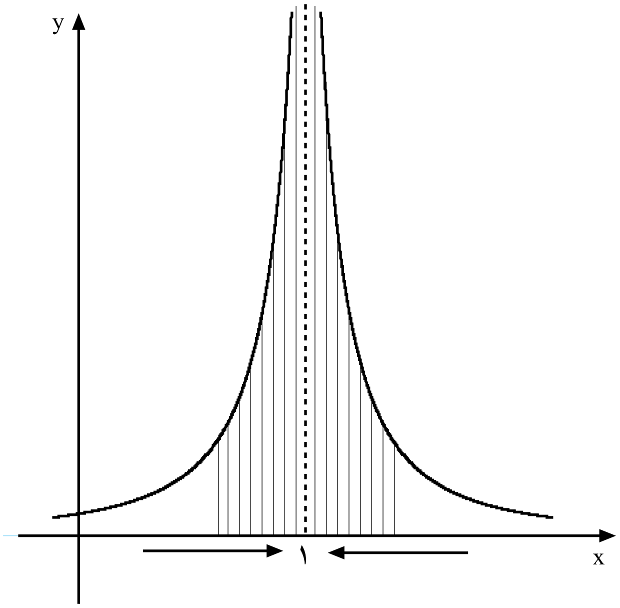
ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۷x^۲-۴x+۲}{-۵x+۳}=?$

۳ــ۳ــ حدبی‌نهایت

در قسمت‌های قبل با حدهایی که به صورت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ است و در آن‌ها a و L هر دو اعداد حقیقی می‌باشند، آشنا شدیم. اکنون با حدهایی که در آن‌ها L بی‌نهایت است آشنا می‌شویم.

فعالیت ۸ــ۳

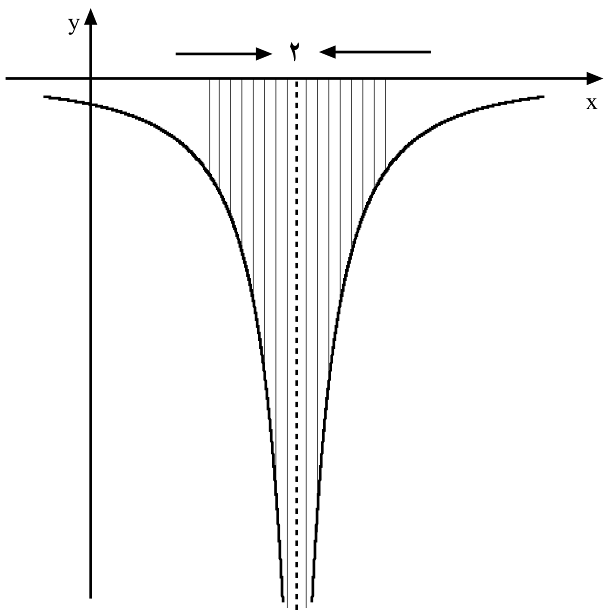
با توجه به نمودارهای مقابل به هر یک از سؤالات زیر پاسخ دهید.



نمودار ۲۹ــ۳

۱ــ در نمودار ۲۹ــ۳ وقتی x به عدد ۱ (یک) میل می‌کند مقدار f(x) از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود، یعنی به $+\infty$ میل می‌کند و داریم :

$$\lim_{x \to \square} f(x) = \bigcirc$$



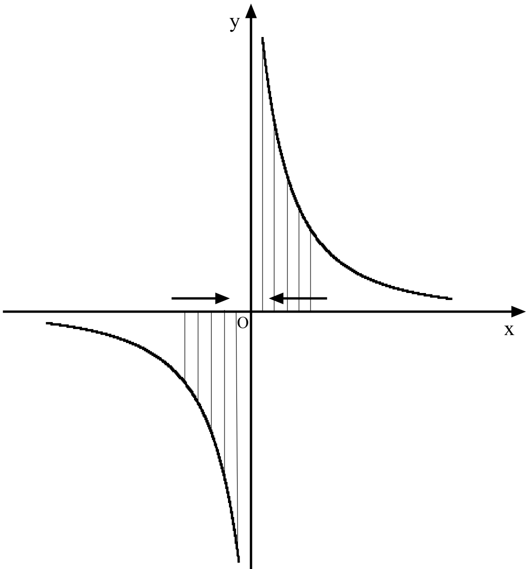
نمودار ۳۰ــ۳

۲ــ در نمودار ۳۰ــ۳ وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند f(x) از هر عدد منفی کوچکی کوچک‌تر می‌شود، یعنی داریم :

$$\lim_{x \to \square} f(x) = \bigcirc$$

۳ــ در نمودار ۳۱ــ۳ وقتی x با مقادیر بیش‌تر از صفر به عدد ۰ نزدیک شود $(x \to ۰^{+})$ ، $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود $(f(x) \to +\infty)$ پس داریم :

$$\lim_{x \to ۰^{+}} f(x) = +\infty$$



نمودار ۳۱ــ۳

با توجه به نمودار، حد چپ تابع در $x = ۰$ برابر چیست؟

$$\lim_{x \to ۰^{-}} f(x) = \square$$

آیا تابع f در $x = ۰$ دارای حد می‌باشد؟

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = \frac{۱}{(x - ۱)^{۲}}$$

جدول ۱۶ــ۳

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹
f(x)	۱	۴	$۱۰^{۲}$	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۸}$

جدول ۱۷ــ۳

x	۲	۱/۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱
f(x)	۱	۴	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰

جدول‌های ۱۶ــ۳ و ۱۷ــ۳ مقادیر مختلف تابع را به ازای اعداد نزدیک به یک نشان می‌دهند (شکل ۲۹ــ۳). هر چه x از مقادیر کم‌تر از ۱ و یا بیش‌تر از یک به عدد ۱ میل می‌کند مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌گردد. بنابراین به مثبت بی‌نهایت $(+\infty)$ میل می‌کند، پس می‌توان نوشت :

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = +\infty$$

فعالیت ۹ــ۳

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است.

$$f(x) = \frac{-۱}{(x - ۲)^{۲}}$$

در نمودار ۳۰ــ۳ شکل این تابع را مشاهده کرده‌اید.

۱ــ جدول ۱۸ــ۳ را تکمیل کنید.

جدول ۱۸ــ۳

x	۳	۲/۵	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱	۲
f(x)	−۱	$\square$	$\square$	$-۱۰^{۴}$	$\square$	$-۱۰^{۸}$	

۲ــ وقتی x با مقادیر بیش‌تر از ۲ (از راست) به عدد ۲ میل می‌کند آیا مقدار f(x) از هر عدد منفی کم‌تر می‌شود؟ (جدول ۱۸ــ۳)

بلی ☐ خیر ☐

۳ــ جدول ۱۹ــ۳ را تکمیل کنید.

جدول ۱۹ــ۳

x	۱	→	۱/۵	→	۱/۹	→	۱/۹۹	→	۱/۹۹۹	→	۱/۹۹۹۹	→	۲
f(x)	−۱		☐		−۱۰۰		−۱۰۰۰۰		−۱۰۰۰۰۰۰		☐		

۴ــ وقتی x با مقادیر کم‌تر از ۲ (ازچپ) به عدد ۲ میل می‌کند جدول ۱۹ــ۳ مقدار f(x) از هر عدد کوچکی کوچک‌تر می‌شود.

۵ــ با توجه به جدول ۱۸ــ۳ حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \square$$

۶ــ با استفاده از جدول ۱۹ــ۳ حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \square$$

۷ــ حاصل حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \square$$

تمرین

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = \frac{۵}{x-۲}$$

۱ــ جدولی تنظیم کنید که وقتی x با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود مقادیر f(x) را نشان دهد.

۲ــ جدولی را تنظیم کنید که وقتی x با مقادیر بیش‌تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود مقادیر f(x) را نشان دهد.

محل پاسخ:

مثال: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. نمودار f(x) را در شکل ۳۱ــ۳ مشاهده می‌کنید.

$$f(x)=\frac{۱}{x}$$

با توجه به جدول ۲۰ــ۳ می‌بینیم وقتی که x از راست به عدد ۰ (صفر) نزدیک می‌شود، f(x) از هر عدد بزرگی بزرگ‌تر می‌شود. به عبارت دیگر، f(x) را می‌توانیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرط آن که x را به اندازه‌ی کافی به ۰ نزدیک کنیم. در این حالت می‌گوییم حد تابع f وقتی $x\to ۰^{+}$ برابر با $+\infty$ می‌باشد و آن را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم.

جدول ۲۰ــ۳

x	۰	)	۰/۰۰۰۱	)	۰/۰۰۱	)	۰/۰۱	)	۰/۱
f(x)		)	۱۰۰۰۰	)	۱۰۰۰	)	۱۰۰	)	۱۰

$$\lim_{x\to ۰^{+}} f(x)=+\infty$$

جدول ۲۱ــ۳

x	−۰/۱	→	−۰/۰۱	→	−۰/۰۰۱	→	−۰/۰۰۰۱	→	۰
f(x)	−۱۰	→	−۱۰۰	→	−۱۰۰۰	→	−۱۰۰۰۰	→	−∞

با مشاهده‌ی جدول ۲۱ــ۳ درمی‌یابیم وقتی که x از چپ به عدد ۰ نزدیک می‌شود f(x) از هر عدد منفی کوچک‌تر می‌شود به عبارت دیگر f(x) می‌تواند از هر عدد منفی، کوچک‌تر شود، به شرط آن که x به اندازه‌ی کافی به ۰ نزدیک شود.

شکل ۳۲ــ۳

در این حالت می‌گوییم حد تابع f وقتی $x\to ۰^{-}$ برابر با $-\infty$ می‌باشد، و آن را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم :

$$\lim_{x\to ۰^{-}} f(x)=-\infty$$

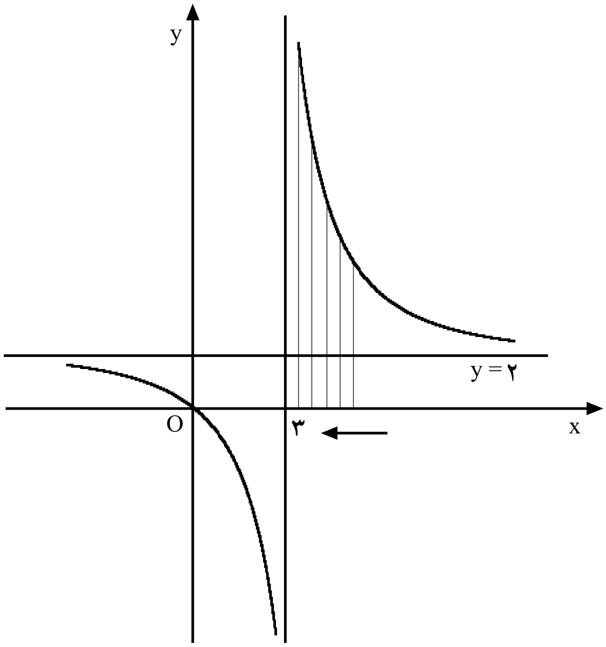
نتیجه: با توجه به مثال‌های حل شده، در می‌یابیم وقتی مخرج کسر به صفر میل کند و صورت کسر مخالف صفر باشد قدرمطلق کسر از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر می شود، یعنی کسر بی‌کران افزایش می‌یابد.

مثال: حدهای الف، ب و ج را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۳^{+}} \frac{۲x}{x-۳}$

حل الف: چون وقتی $x \to ۳^+$ مقدار صورت کسر ($۲x \to ۶$) عددی مثبت و مخرج کسر از سمت مقادیر بزرگ‌تر از صفر به عدد ۰ میل می‌کند، بنابراین حاصل کسر به $+\infty$ میل می‌کند (نمودار **۳۳ـ۳**). یعنی :

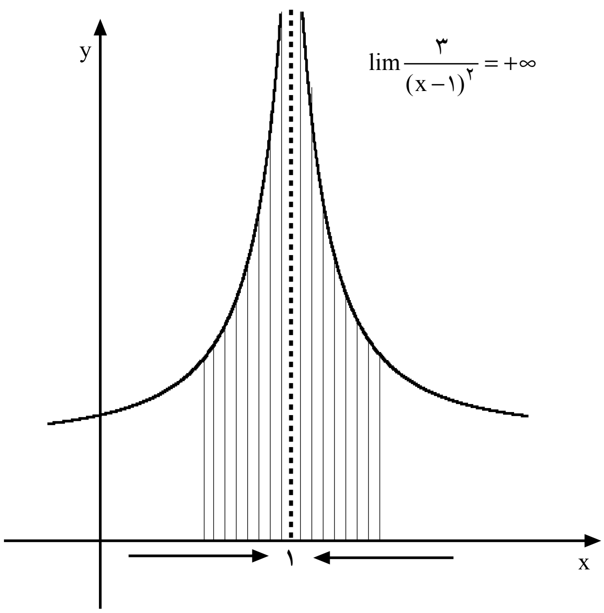
$$\lim_{x \to ۳^+} \frac{۲x}{x-۳} = +\infty$$



نمودار **۳۳ـ۳**

ب) $\lim_{x \to ۱} \frac{۳}{(x-۱)^۲}$

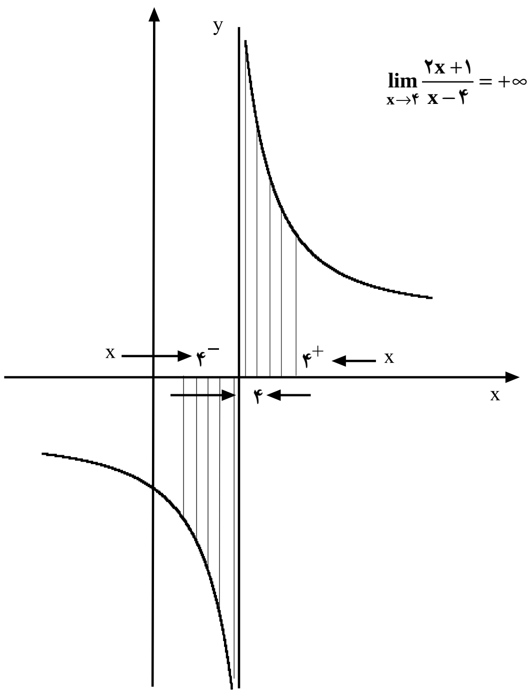
حل ب: وقتی $x \to ۱$ در مخرج کسر : $(x-۱)^۲ \to ۰^+$ ؛ بنابراین مقدار کسر به $+\infty$ میل می‌کند (نمودار **۳۴ـ۳**).



نمودار **۳۴ـ۳**

ج) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{۲x+۱}{x-۴}$

حل ج: وقتی $x \to ۴^+$ مخرج کسر با مقادیر بیش‌تر از صفر به صفر میل می‌کند. بنابراین با توجه به مثبت بودن صورت کسر ($۲x+۱ \to ۹$) مقدار حد به $+\infty$ میل می‌کند (نمودار ۳۵ــ۳).



نمودار ۳۵ــ۳

هرگاه $x \to ۴^-$ مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند. با توجه به مثبت بودن صورت کسر، حاصل کسر از هر عدد منفی کم‌تر می‌باشد. بنابراین به $-\infty$ میل می‌کند (نمودار ۳۵ــ۳).

$$\lim_{x\to ۴^-} \frac{۲x+۱}{x-۴} = -\infty$$

با توجه به مثال‌های حل‌شده می‌توان قضیه‌ی زیر را نتیجه گرفت:

قضیه‌ی ۲ــ۳ــ هرگاه a عدد حقیقی باشد و داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \; , \; L \neq ۰ \; , \; \lim_{x\to a} g(x) = ۰$$

الف) اگر $L > ۰$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند،

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ب) اگر $L < ۰$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

ج) اگر $L > ۰$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

د) اگر $L < ۰$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

مثال: حد کسر مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{۳x+۱}{x-۱}=?$$

حل: حد صورت کسر برابر است با :

$$\lim_{x\to ۱^+} ۳x+۱=۳(۱)+۱=۴$$

ــ مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند، پس بنابر قضیه‌ی الف ــ۲ــ۳ داریم :

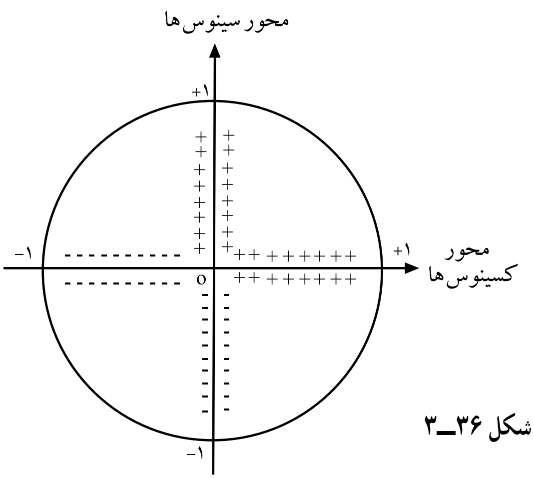
$$\lim_{x\to ۱^+} x-۱=۰$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{۳x+۱}{x-۱}=+\infty$$

مثال: حد کسر مقابل را به دست‌آورید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{۲\sin x+۱}{\cos x}=?$$

ــ با توجه به دایره‌ی مثلثاتی، وقتی x با مقادیر بیش‌تر از $\frac{\pi}{۲}$ به $\frac{\pi}{۲}$ میل می‌کند چون زاویه در ناحیه‌ی دوم قرار دارد مقدار کسینوس آن منفی است (شکل ۳۶ــ۳) بنابراین مخرج کسر با مقادیر منفی به عدد صفر میل می‌کند. بنابر قضیه‌ی ج‌ــ۲ــ۳ مقدار کسر از هر عدد منفی کوچکی کوچک‌تر می‌باشد در نتیجه :



شکل ۳۶ــ۳

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{۲\sin x+۱}{\cos x}=-\infty$$

مثال: حد کسر مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۲x}{۴-x^۲}=?$$

حل: چون $x > ۲$ بنابراین ؛ $x^۲ > ۴$ و $-x^۲ < -۴$ لذا داریم :

$$۴-x^۲<۰$$

ـ یعنی مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند.

حد صورت کسر برابر است با :

$$\lim_{x\to ۲^+} -۲x = -۴$$

بنابر قضیه‌ی (د ـ ۲ ـ ۳) داریم :

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{-۲x}{۴-x^۲} = +\infty$$

قضیه‌ی ۳ـ۳ـ اگر $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L$ ($L \neq ۰$ عددی ثابت است) آن‌گاه :

الف) حد حاصل مجموع دو تابع برابر است با : $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = +\infty$

ب) حد حاصل ضرب دو تابع وقتی $L > ۰$ ، برابر است با : $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = +\infty$

ج) حد حاصل ضرب دو تابع وقتی $L < ۰$ ، برابر است با : $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$

مثال ۱: حد عبارت روبه‌رو را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۳^+} \left(\frac{۷}{x-۳} + \frac{۲}{x+۱}\right) = ?$$

حل: حد هر یک از کسرها را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۷}{x-۳} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۳^+} \frac{۲}{x+۱} = \frac{۱}{۲}$$

حل: طبق قضیه‌ی (الف ـ ۳ ـ۳) داریم :

$$\lim_{x\to ۳^+} \left(\frac{۷}{x-۳} + \frac{۲}{x+۱}\right) = +\infty + \frac{۱}{۲} = +\infty$$

مثال ۲: حد عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۲^+} \left(\frac{x+۲}{x-۲} \cdot \frac{۲}{۱-x}\right) = ?$$

حل: حد هر یک از کسرها را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x+۲}{x-۲} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲}{۱-x} = -۲$$

ـ طبق قضیه‌ی (ج ـ۳ـ۳) داریم :

$$\lim_{x\to ۲^+} \left(\frac{x+۲}{x-۳} \cdot \frac{۲}{۱-x}\right) = (+\infty)(-۲) = -\infty$$

قضیه‌ی ۴ـ۳ـ اگر $\lim_{x. a} f(x) = .$ و $\lim_{x. a} g(x) = L$ (۰ L عددی ثابت است) آن‌گاه :

الف) حد حاصل مجموع دو تابع برابر است با : $\lim_{x. a} . f(x) . g(x) . = .$

ب) اگر $L > ۰$ ، حد حاصل ضرب دو تابع برابر است با : $\lim_{x. a} . f(x) . g(x) . = .$

ج) اگر $L < ۰$ ، حد حاصل ضرب دو تابع برابر است با : $\lim_{x. a} . f(x) . g(x) . = .$

مثال: حد عبارت روبه‌رو را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x. ۴} (\frac{۲x}{x \quad ۴} \cdot \frac{۳}{x \quad ۷}) = ?$

چون ۴ x . ، بنابراین $x > ۴$ و $۴ < ۰$ x می‌باشد، لذا داریم :

$$\lim_{x. ۴} \frac{۲x}{x \quad ۴} = .$$

از طرفی :

$$\lim_{x. ۴} \frac{۳}{x \quad ۷} = . ۱$$

بنابر قضیه ج ـ۴ـ۳ داریم :

$$\lim_{x. ۴} \cdot \frac{۲x}{x \quad ۴} \cdot \frac{۳}{x \quad ۷} . = (. \quad)(\quad ۱) = .$$

مثال: حد عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x. \quad ۲} . \frac{x^۲ . ۳}{(x . ۲)^۲} \cdot \frac{۲x . ۱}{x \quad ۱} . = ?$$

چون وقتی ۲ x . ، $(x . ۲)^۲$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند ؛ بنابراین :

$$\lim_{x. \quad ۲} x^۲ . ۳ = . ۱ \ , \ \lim_{x. \quad ۲} \frac{x^۲ . ۳}{(x . ۲)^۲} = .$$

از طرفی $x < . ۲$ و نزدیک ۲- است، بنابراین :

$$\lim_{x. \quad ۲} ۲x . ۱ = . ۳$$

لذا خواهیم داشت :

$$\lim_{x. \quad ۲} \frac{۲x . ۱}{x \quad ۱} = \frac{۳}{۳} = ۱$$

پس حد مجموع این دو تابع برابر است با :

$$\lim_{x. \quad ۲} . \frac{x^۲ . ۳}{(x . ۲)^۲} \cdot \frac{۲x . ۱}{x \quad ۱} . = (. \quad) . ۱ = .$$

تمرین

۱ــ حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \to ۳^+} \frac{۲x}{x-۳}$

۲) $\lim_{x \to ۲^-} \frac{۱-۳x}{x(۲-x)}$

۳) $\lim_{x \to -۱} \frac{۲}{(x+۱)^۲}$

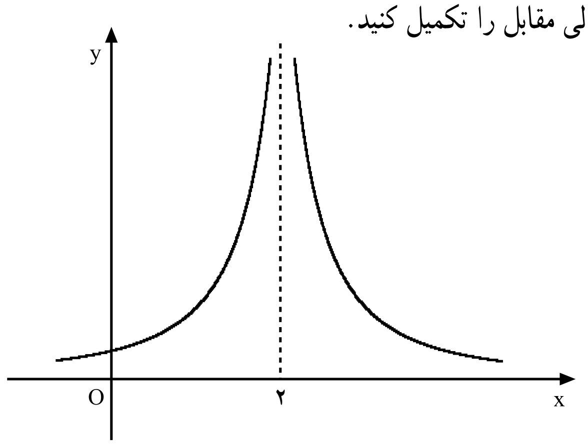
۴) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x$

۵) $\lim_{x \to ۰^+} \cot x$

۶) $\lim_{x \to ۰} \frac{۳}{x^۴}$

۲ــ با توجه به نمودار ۳۷ــ۳ ، ۳۸ــ۳ و ۳۹ــ۳ جاهای خالی مقابل را تکمیل کنید.

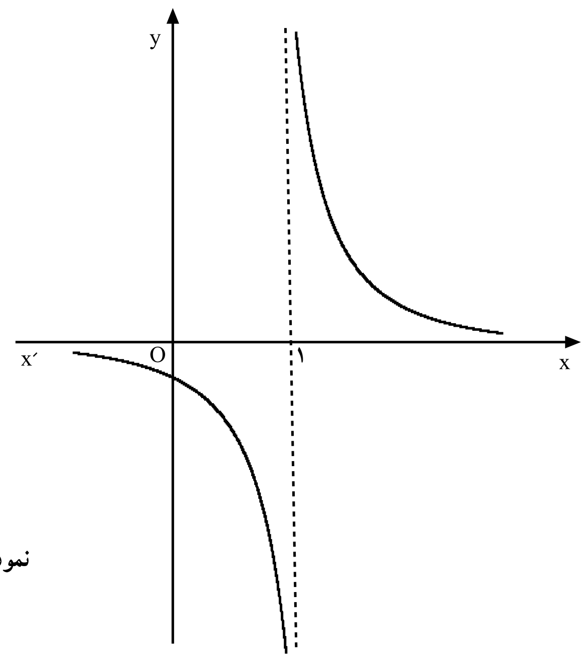
$\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = \square$



نمودار ۳۷ــ۳

$\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = \square$

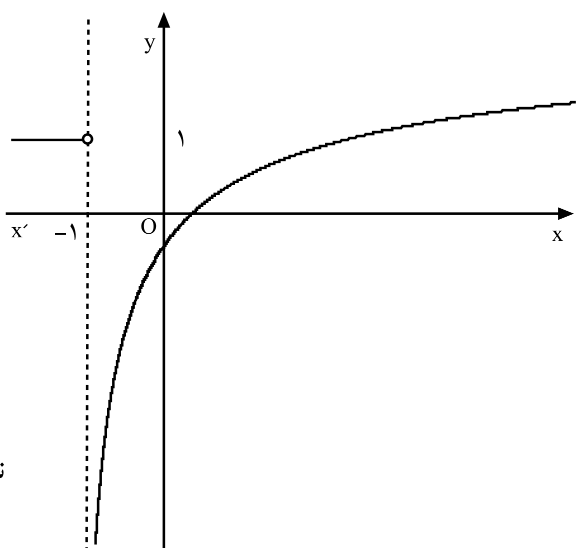
$\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = \square$



نمودار ۳۸ــ۳

$\lim\limits_{x \to -۱^-} f(x) = \square$

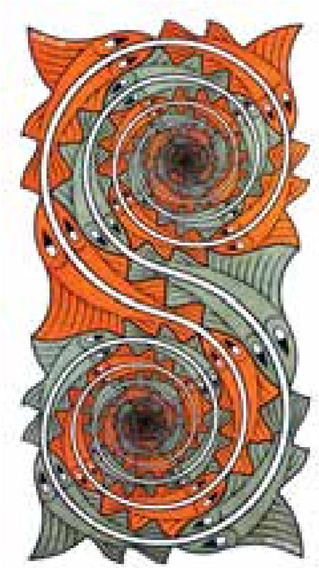
$\lim\limits_{x \to -۱^+} f(x) = \square$



نمودار ۳۹ــ۳

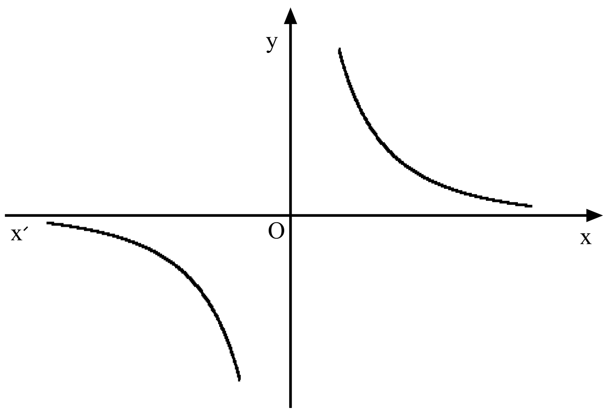
۱ــ۳ــ۳ــ حد در بی‌نهایت : در $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ هرگاه a بی‌نهایت باشد، حد حاصل را حد در بی‌نهایت می‌نامند.

برای داشتن درک بهتری از این نوع حدها به مثال‌های زیر توجه کنید.



شکل ۴۰ــ۳

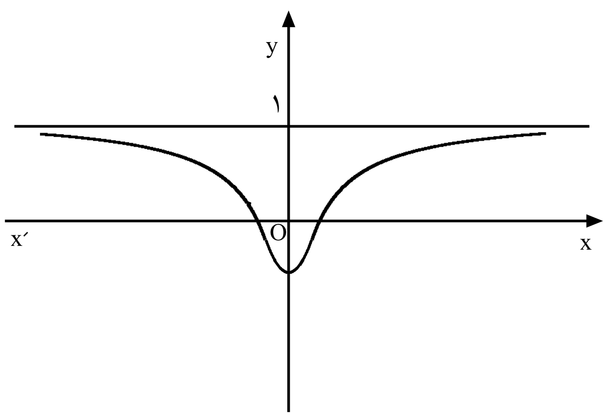
مثال: با توجه به نمودار ۴۱ــ۳ درمی‌یابیم که هرگاه مقدار x از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود ($x\to+\infty$) آن‌گاه f(x) به صفر نزدیک می‌گردد. همچنین وقتی x از هر عدد منفی کم‌تر شود ($x\to-\infty$) مقدار f(x) به صفر میل می‌کند. بنابراین داریم :



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

نمودار ۴۱ــ۳

همچنین هرگاه به نمودار ۴۲ــ۳ توجه کنیم در می‌یابیم که وقتی x از هر عدد مثبتی بیش‌تر باشد ($x\to+\infty$) و یا از هر عدد منفی کوچک‌تر شود ($x\to-\infty$) مقدار f(x) به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد ($f(x)\to 1$) یعنی داریم :



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$$

نمودار ۴۲ــ۳