بخش سوم

حد و پیوستگی

هدف کلی بخش

مفاهیم حد و به‌کارگیری آن در تعیین پیوستگی توابع

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	حد
دوم	پیوستگی
سوم	تعمیم حد

بخش سوم

فصل اول

حد

هدف کلی

مفاهیم میل کردن یک متغیر به یک عدد و میل کردن مقدارهای یک تابع به عدد و تعمیم مفهوم حد

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ میل کردن یک متغیر را از چپ و راست به یک عدد، به سوی $+\infty$ یا به سوی $-\infty$ تعریف کند ؛

۲ــ حد تابع را تعریف کند ؛

۳ــ حد چپ و راست یک تابع در یک نقطه را تعریف کند ؛

۴ــ حد چپ و راست تابع را از روی نمودار آن تعیین کند ؛

۵ ــ حد چپ و راست تابع را از روی ضابطه‌ی آن تعیین کند.

۶ــ حد توابع کسری را که صورت و مخرج آن‌ها، (وقتی که $x \to a$) برابر صفر می‌شود، به‌دست آورد.

۷ــ قضیه فشردگی را در تعیین حد بعضی از توابع به‌کار برد.

پیش آزمون (۱)

۱ـ اعداد $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۵}{۶}$ ، ... بر روی محور اعداد حقیقی مشخص شده‌اند (شکل ۱ـ۳).

الف) این اعداد به کدام عدد نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

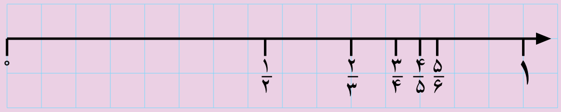
ب) این اعداد از کدام سمت (راست یا چپ) به این عدد نزدیک می‌شوند؟

۲ـ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-|x-۱|$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده است. با توجه به شکل ۲ـ۳ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

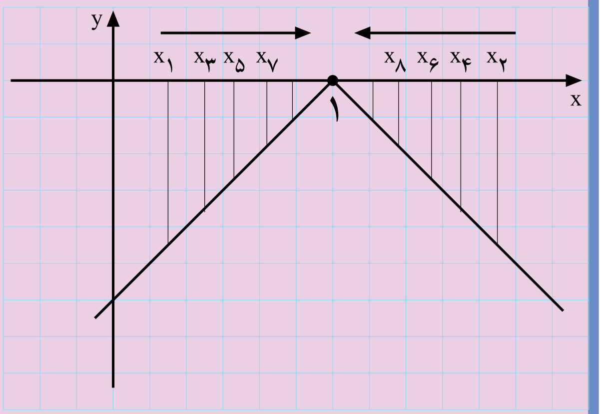
الف) هرگاه $x_۱$ ، $x_۳$ ، $x_۵$ ، ... از چپ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر شوند، $f(x_۱)$ ، $f(x_۳)$ ، ... به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) هرگاه مقادیر $x_۲$ ، $x_۴$ ، $x_۶$ ، ... از مقادیر بیشتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر گردند، $f(x_۲)$ ، $f(x_۴)$ ، ... به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۱)



شکل ۱ـ۳



شکل ۲ـ۳

۱ـ۳ـ حد

مفهوم حد یکی از مفاهیم پایه در ریاضیات است. در این بخش سعی شده که به صورت شهودی به بیان این مفهوم بپردازیم.

فعالیت ۱ـ۳

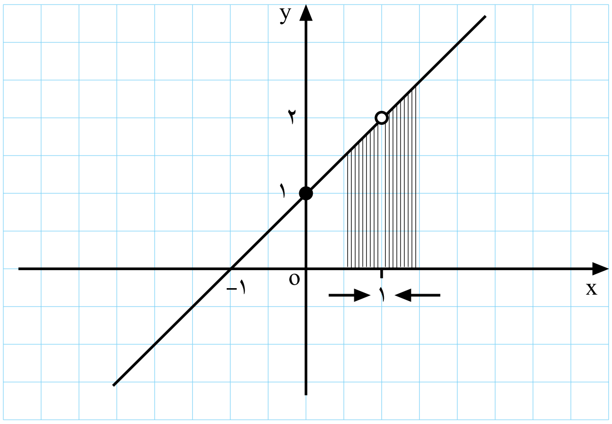
نمودارهای مقابل را نگاه کنید، سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱ـ در شکل ۳ـ۳ وقتی بر روی محور xها به عدد ۱ نزدیک شویم مقدار y به کدام عدد نزدیک می‌شود؟

۲ـ آیا مقدار تابع در $x=۱$ وجود دارد؟

بله ☐ خیر ☐

$f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ و $x\neq ۱$

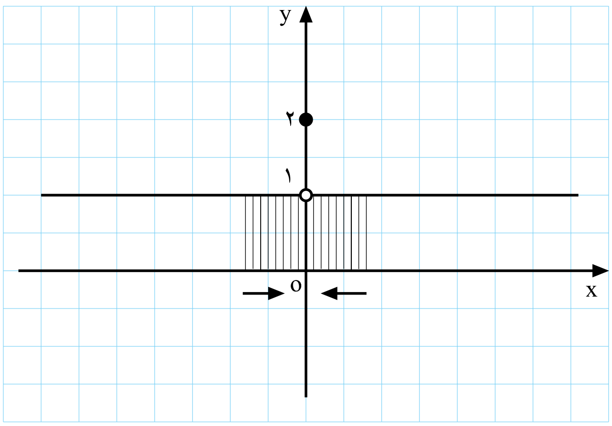


شکل ۳ـ۳

۳ـ در شکل ۴ـ۳ وقتی x از راست و یا از چپ به عدد صفر (۰) نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود مقدار y به کدام عدد نزدیک می شود؟

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x\neq ۰\\ ۲ & x=۰\end{cases}$$

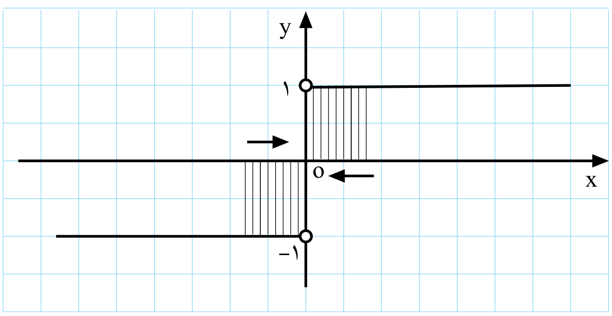


شکل ۴ـ۳

۴ـ در شکل ۵ ـ۳ وقتی که x از سمت راست صفر یعنی ازمقادیر بیشتر از صفر به عدد ۰ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود مقدار f(x) به کدام عدد نزدیک‌تر می‌شود؟

۵ ـ در شکل ۵ ـ۳ وقتی که x از سمت چپ صفر یعنی از مقادیر کم‌تر از ۰ به عدد صفر نزدیک‌تر می‌شود f(x) به کدام عدد نزدیک می‌شود؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$



شکل ۵ـ۳

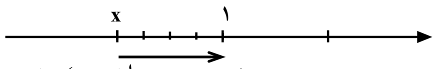
مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=x+۱ \text{ ، } x\neq ۱$$

جدول ۱ــ۳ مقادیر مختلف تابع را به ازای چند عدد نزدیک به ۱ نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول ۱ــ۳ مشاهده می‌کنید، هرچه مقدار x با مقادیر کمتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد (از چپ به عدد ۱ میل می‌کند) تابع f یا y به ۲ میل می‌کند و هرچه x با مقادیر بیشتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد (از راست به ۱ میل می‌کند) مقدار تابع f یا y به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود (به عدد ۲ میل می‌کند) (جدول ۲ــ۳).

جدول ۱ــ۳

x	۰ →	۰/۸ →	۰/۹ →	۰/۹۹ →	۰/۹۹۹ →	۰/۹۹۹۹ →	۱
f(x)	۱	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	?



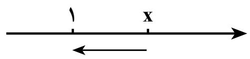
$x\to ۱^{-}(x<۱$ یا $x-۱<۰)$

(میل کردن x به عدد ۱ از چپ)

از ترکیب نماد جدول‌های ۱ــ۳ و ۲ــ۳ جدول ۳ــ۳ به‌دست می‌آید.

جدول ۲ــ۳

x	۱	← ۱/۰۰۰۱	← ۱/۰۰۱	← ۱/۰۱	← ۱/۱	← ۲
f(x)	?	← ۲/۰۰۰۱	← ۲/۰۰۱	← ۲/۰۱	← ۲/۱	← ۳



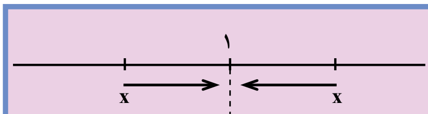
$x\to ۱^{+}(x>۱$ یا $x-۱>۰)$

(میل کردن x به عدد ۱ از راست)

جدول ۳ــ۳

x	۰ →	۰/۸ →	۰/۹ →	۰/۹۹ →	۰/۹۹۹ →	۰/۹۹۹۹ →	۱	← ۱/۰۰۰۱	← ۱/۰۰۱	← ۱/۰۱	← ۱/۱	← ۲
f(x)	۱	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	۲	← ۲/۰۰۰۱	← ۲/۰۰۱	← ۲/۰۱	← ۲/۱	۳

نتیجه: حد تابع f وقتی x به ۱ میل می‌کند برابر ۲ می‌باشد و آن را به صورت مقابل می‌نویسیم :



«میل کردن x به عدد ۱»

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=۲$$

فعالیت ۲ــ۳

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است :

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\neq ۰ \\ ۲ & x=۰ \end{cases}$$

با تکمیل جدول ۴ــ۳ به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

جدول ۴ــ۳

x	−۱→	−۰/۱→	−۰/۰۱→	−۰/۰۰۱→	۰)	۰/۰۰۱)	۰/۰۱)	۰/۱)	۰/۵	) ۱
f	۱	$\square$	۱	$\square$	$\square$	۱	$\square$	۱	$\square$	$\square$

۱ــ هرگاه x از چپ به عدد ۰ میل کند f(x) به کدام عدد میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=?$$

۲ــ هرگاه x از راست به عدد صفر میل کند f(x) به کدام عدد میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=?$$

۳ــ حد f(x) وقتی x به ۰ میل می‌کند چیست؟

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=?$$

تابع f در نقطه‌ی $x=a$ زمانی دارای حد می‌باشد که حد چپ و حد راست تابع در این نقطه برابر باشند. به بیان دیگر :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

فعالیت ۳ــ۳

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. با تکمیل جاهای خالی به سؤال‌های ۱،۲و۳ پاسخ دهید.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}=\frac{\square}{x}=۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ \frac{|x|}{x}=\frac{\square}{x}=-۱ & x<۰ \end{cases}$$

۱ــ با توجه به جدول ۵ ــ۳ وقتی x از چپ به صفر میل می‌کند f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

جدول ۵ــ۳

x	۱.	۰/۱.	۰/۰۱.	۰/۰۰۱.	۰/۰۰۰۱.	۰
f(x)	۱	۱	□	□	۱	۱

$\lim\limits_{x.\ \circ} f(x) = \square$

۲ــ با توجه به جدول ۶ ــ۳ وقتی x از راست (با مقادیر بیش‌تر از صفر) به عدد صفر میل می‌کند f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

جدول ۶ــ۳

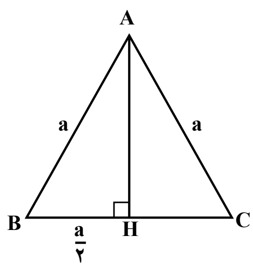
x	۰	.	۰/۰۰۱	.	۰/۰۱	.	۰/۱	.	۰/۷	.	۱
f(x)	۱		□		۱		□		□		۱

$\lim\limits_{x.\ \circ^{\cdot}} f(x) = \square$

$\lim\limits_{x.\ \circ} f(x) = \square$

۳ــ با توجه به سؤال‌های ۱ و ۲ آیا تابع f در $x = ۰$ دارای حد می‌باشد؟ چرا؟

مثال: در شکل ۶ ــ۳ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a رسم شده است. مساحت مثلث را برحسب a حساب کنید.



شکل ۶ــ۳

حل: در مثلث متساوی‌الاضلاع میانه، ارتفاع و عمودمنصف بر یکدیگر منطبق می‌باشند، در نتیجه BH برابر است با :

$$BH = \frac{BC}{۲} = \frac{a}{۲}$$

ــ مساحت مثلث از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید :

$$S = \frac{۱}{۲} BC .\ AH \quad و \quad AB = BC = AC = a \quad (۱)$$

ــ طول ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHB را محاسبه می‌کنیم :

$$AB^{۲} = BH^{۲} .\ AH^{۲} .\quad AH^{۲} = AB^{۲} \quad BH^{۲}$$

ــ مقدار BH و AB را در رابطه قرار می‌دهیم و AH را به‌دست می‌آوریم.

$$AH^{۲} = AB^{۲} \quad (\frac{AB}{۲})^{۲} .\quad AH^{۲} = \frac{۴AB^{۲} \quad AB^{۲}}{۴}$$

$$.\quad AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} AB \quad (۲)$$

ــ با قراردادن مقدار AH و BC در رابطه‌ی مساحت خواهیم داشت :

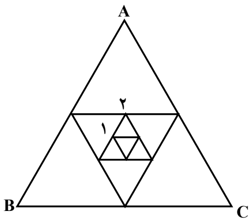
$$S = \frac{۱}{۲}(a)(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a) .\quad S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر است با : $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$

برای مثال، اگر طول ضلع برابر $a_0 = 4$ باشد داریم :

$$a_0 = 4 \Rightarrow S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}(4)^2 \Rightarrow S_0 = 4\sqrt{3}$$

۲) هرگاه وسط ضلع‌های مثلث شکل ۶ــ۳ را به هم وصل کنیم مثلث جدیدی (شکل ۷ــ۳) به‌دست می‌آید. اگر a_1 طول ضلع و S_1 مساحت این مثلث باشد، a_1 و S_1 را حساب کنید.



شکل ۷ــ۳

۳ــ هرگاه عمل قبل را سه مرتبه‌ی دیگر ادامه دهیم (شکل ۷ــ۳) در هریک از مثلث‌های ایجاد شده طول ضلع مثلث و مساحت آن را محاسبه کنید.

$$a_1 = \frac{a_0}{2} = 2 \text{ و } S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2)^2 = \sqrt{3}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 1 \text{ و } S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{4} \text{ و } S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{4})^2 = \frac{\sqrt{3}}{64}$$

۴ــ هرگاه عمل فوق را n مرتبه تکرار کنیم مقدارهای a_n و S_n به چه عددی میل می‌کنند؟

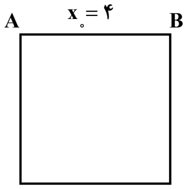
$$a_0 = 4, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4},$$

همان‌طوری که می‌بینیم هرقدر تعداد این مراحل زیاد شود مخرج کسرهای a_n و S_n رو به افزایش است به‌طوری که حاصل کسر از هر عدد کوچک مثبتی کمتر می‌شود یعنی به سمت صفر میل می‌کند.

$$S_0 = 4\sqrt{3}, S_1 = \sqrt{3}, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}, S_3 = \frac{\sqrt{3}}{16}, S_4 = \frac{\sqrt{3}}{64},$$

فعالیت ۴ــ۳

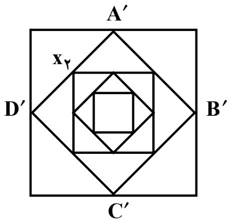
۱ــ در شکل ۸ ــ۳ مربعی به طول ضلع ۴ را مشاهده می‌کنید. اگر x_0 طول ضلع و S_0 مساحت مربع باشد مساحت مربع چقدر است؟



شکل ۸ ــ۳

$$S_0 = x_0^2 \Rightarrow S_0 = 16$$

۲ــ وسط ضلع‌های مربع را به یکدیگر وصل کنید (شکل ۹ــ۳) طول ضلع جدید را $x_۱$ و مساحت آن را $S_۱$ می‌نامیم. $x_۱$ و $S_۱$ را به‌دست آورید.



شکل ۹ــ۳

$x_۱^۲ = ۲^۲ + \square^۲ \Rightarrow x_۱ = ۲\sqrt{\square}$

$S_۱ = x_۱^۲ = \square$

۳ــ عمل فوق را سه بار دیگر تکرار می‌کنیم.

در هر یک از مربع‌های ایجاد شده طول ضلع مربع و مساحت آن را محاسبه کنید.

$x_۲^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = ۴ \Rightarrow x_۲ = \square$

$S_۲ = x_۲^۲ = \square$

۴ــ هرگاه $n \to +\infty$ ، x_n به چه عددی میل می‌کند؟

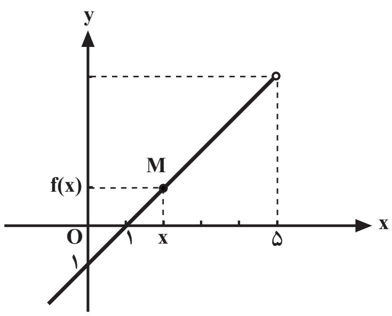
۵ ــ هرگاه $n \to +\infty$ ، S_n به چه عددی میل می‌کند؟

$x_۳^۲ = \square^۲ + ۱^۲ = ۲ \ , \ x_۳ = \sqrt{۲} \ , \ S_۳ = x_۳^۲ = \square$

$x_۴^۲ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + \square = ۱ \ , x_۴ = \square \ , \ S_۴ = x_۴^۲ = ۱$

$S_n \to \square \ , \ x_n \to \square$

مثال: در شکل مقابل متحرک M روی مسیر داده شده از چپ به راست حرکت می‌کند، وقتی x به عدد ۵ نزدیک و نزدیک‌تر شود، $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟



$\lim\limits_{x \to ۵^-} f(x) = \square$

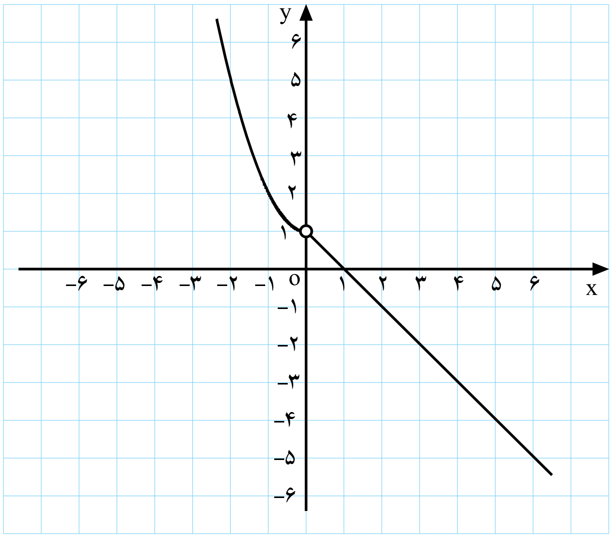
شکل ۱۰ــ۳

تعریف حد: در یک بازه‌ی باز شامل عدد a، تابع $f(x)$ را گوییم دارای حد است اگر هر قدر متغیر x به عدد a نزدیک شود مقدار تابع به عدد L نزدیک گردد (ممکن است $f(a)$ تعریف نشده باشد). این موضوع را با نماد ریاضی $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ نشان می‌دهیم.

فعالیت ۵ــ۳

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ 1-x & x>0 \end{cases}$

تعریف شده است (شکل ۱۱ــ۳).



شکل ۱۱ــ۳

۱ــ با توجه به شکل ۱۱ــ۳، حد $f(x)$ را وقتی $x\to 0$ به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\square$$

۲ــ جدول ۷ــ۳ را کامل کنید.

جدول ۷ــ۳

x	۰	←	۰/۰۰۰۰۱	←	۰/۰۰۱	←	۰/۰۱	←	۰/۱	←	۰/۷	←	۱
f(x)	?	←	۰/۹۹۹۹		$\square$	←	$\square$	←	۰/۹		۰/۳	←	۰

۳ــ وقتی $x\to 0^+$، حد $f(x)$ چیست؟

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\square$$

۴ــ جدول ۸ــ۳ را کامل کنید.

جدول ۸ــ۳

x	−۱→	−۰/۱→	−۰/۰۱→	−۰/۰۰۱→	−۰/۰۰۰۱	۰
f(x)	۲	۱/۰۱	$\square$	۱/۰۰۰۰۰۱	$\square$	?

۵ــ وقتی $x\to 0^-$، حد $f(x)$ به چه عددی میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\square$$

۶ــ با توجه به مراحل ۳ و ۵ حد مقابل را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\square$$

فعالیت ۶ــ۳

تابع f با ضابطه روبه‌رو مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x>۰\\ a+۳ & x<۰\end{cases}$$

الف) جدول ۹ــ۳ را با توجه به مقادیر f(x) تکمیل کنید.

ب) با توجه به جدول وقتی $x \to ۰^+$ مقدار f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

جدول ۹ــ۳

x	۰	)	۰/۰۰۰۱	)	۰/۰۰۱	)	۰/۰۱	)	۰/۱
f(x)			$\square$	)	۱/۰۰۲		$\square$	)	۱/۲

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\square$$

ج) اگر تابع f در $x=۰$ دارای حد باشد مقدار a را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)\Rightarrow ۱=\square\Rightarrow a=-۲$$

تمرین

۱ــ تابع f به صورت روبه‌رو تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} ۱-۲x & x>۲ \\ x-۵ & x<۲ \end{cases}$$

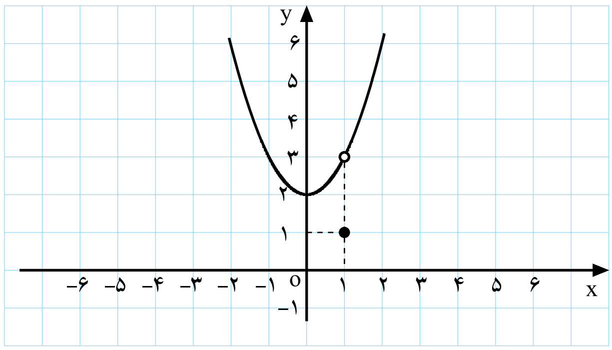
الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) آیا تابع f در $x=۲$ دارای حد می‌باشد؟

بلی ☐　　　خیر ☐

۲ــ در هریک از شکل‌های زیر مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آورید.

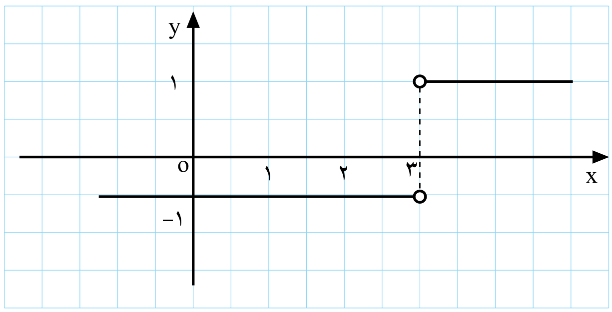
الف) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲ & x\neq ۱ \\ ۱ & x=۱ \end{cases}$



شکل ۱۲ــ۳

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=?$$

ب) $f(x)=\dfrac{|x-۳|}{x-۳}$



شکل ۱۳ــ۳

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=?$$

۳ــ در هر یک از تمرین‌های زیر ابتدا جدول داده شده را کامل کنید سپس مقدار حد را به‌دست آورید.

جدول‌های ۱۰ــ۳

x	۱/۹→	۱/۹۹→	۱/۹۹۹→	۲	۲/۰۰۱→	۲/۰۱→	۲/۱→
f(x)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

الف) $f(x)=۲x+۷$

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\square$

جدول ۱۱ــ۳

x	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۱
$f(x)$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۴}$

$\lim\limits_{x\to ۴^{+}} f(x)=\square$

۴ــ مقدار b را طوری بیابید که تابع f با ضابطه‌ی مقابل در نقطه‌ی $x=۳$ دارای حد باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\cos \pi x+b & x<۳\\ x^{۲}+۲ & x>۳\end{cases}$$

۵ ــ تابع f با ضابطه‌ی رو به رو مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

نمودار آن را رسم کنید و سپس $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را به‌دست آورید.

۶ ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x)=\frac{x}{|x|}$$

الف) جاهای خالی را پر کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\square}=۱ & x>۰\\[2mm] \dfrac{x}{\square}=\bigcirc & x<۰\end{cases}$$

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

ج) با استفاده از نمودار رسم شده حدهای مقابل را به‌دست آورید.

$\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=\square$ و $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=\square$

د) آیا تابع فوق در نقطه‌ی $x=۰$ دارای حد می‌باشد؟

بله ☐ خیر ☐