۶ــ۲ــ عملیات روی تابع‌ها (+، -، ×، .)

اگر g و f دو تابع حقیقی باشند و به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g دو عدد حقیقی به‌دست آید، می‌توان چهار عمل اصلی (اعمال روی توابع) یعنی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را تعریف کرد.

۱ــ۶ــ۲ــ جمع دو تابع f و g: جمع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

دامنه‌ی مجموع f و g برابر است با اشتراک دامنه‌های آن‌ها :

$$D_{f+g}=D_f \cap D_g$$

مثال: اگر داشته باشیم : $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=\sqrt{۳x-۵}$

ضابطه‌ی $f+g$ را به‌دست آورید و سپس دامنه‌ی $f+g$ را محاسبه کنید.

حل: ضابطه‌ی $f+g$ برابر است با :

$$f(x)+g(x)=\sqrt{۲-x}+\sqrt{۳x-۵}$$

با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال و شرط $۲-x\geq ۰$ دامنه f برابر است با :

$$D_f=\{x|x\in\mathbb{R},۲-x\geq ۰\}=\{x|x\in\mathbb{R},x\leq ۲\}=(-\infty,۲]$$

ــ دامنه‌ی تابع g همانند تابع f برابر است با :

$$D_g=\{x|x\in\mathbb{R},۳x-۵\geq ۰\}=\left\{x|x\in\mathbb{R},x\geq\frac{۵}{۳}\right\}=\left[\frac{۵}{۳},+\infty\right)$$

دامنه‌ی $f+g$ برابر است با اشتراک دامنه‌های f و g :

$$D_{f+g}=D_f \cap D_g=(-\infty,۲] \cap \left[\frac{۵}{۳},+\infty\right)=\left[\frac{۵}{۳},۲\right]$$

۲ــ۶ــ۲ــ تفریق دو تابع f و g: تفریق g(x) از f(x) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

دامنه‌ی تفاضل f و g برابر است با :

$$D_{f-g}=D_f \cap D_g$$

۳ــ۶ــ۲ــ حاصل‌ضرب دو تابع f و g: حاصل‌ضرب دو تابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

ــ دامنه‌ی $f\times g$ برابر است با :

$$D_{f\times g}=D_f \cap D_g$$

مثال ۲: تابع‌های مقابل مفروض است

$$f(x)=۲x-۱ \ ، \ g(x)=\frac{x}{x-۱}$$

ضابطه‌ی $f-g$ و $f\times g$ را به‌دست آورید و دامنه‌ی هریک را محاسبه کنید.

ضابطه‌ی $f\times g$ برابر است با :

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۲x-۱-\frac{x}{x-۱}\Rightarrow$$

ــ پس از مخرج مشترک خواهیم داشت :

$$f(x)-g(x)=\frac{۲x^۲-۲x-x+۱-x}{x-۱}=\frac{۲x^۲-۴x+۱}{x-۱}$$

ضابطه‌ی $f\times g$ برابر است با :

$$f(x)\times g(x)=(۲x-۱)\times(\frac{x}{x-۱})=\frac{۲x^۲-x}{x-۱}$$

ــ تابع f دوجمله‌ای است. دامنه‌ی آن برابر است با :

$$D_f=\mathbb{R}$$

ــ تابع g کسری است دامنه‌ی آن برابر است با :

$$D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

ــ دامنه‌ی $f-g$ و $f\times g$ برابر است با اشتراک دامنه‌های توابع f و g، بنابراین خواهیم داشت :

$$D_{f-g}=D_{f\times g}=D_f \quad D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

۴ــ۶ــ۲ــ خارج قسمت دو تابع: تابع f/g به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g که $g(x)\neq ۰$ به صورت مقابل تعریف می‌شود :

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \ , \ g(x)\neq ۰$$

دامنه‌ی f/g برابر است با :

$$D_{f/g}=D_f \quad D_g-\{x|x\in\mathbb{R} \ , \ g(x)=۰\}$$

مثال ۳: تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$$f(x)=\sqrt{۳-x} \ \text{و} \ g(x)=\sqrt{۱۱+x}$$

ضابطه‌ی f/g را به‌دست آورید و سپس دامنه‌ی آن را محاسبه کنید.

حل: چون فرجه رادیکال زوج است با شرط $۳-x\geq ۰$ دامنه‌ی f، برابر است با :

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{۳-x}}{\sqrt{۱۱+x}}$$

$$D_f=\{x|x\in\mathbb{R} \ , \ ۳-x\geq ۰\}=\{x|x\in\mathbb{R} \ , \ x\leq ۳\}$$

$$=(-\infty,۳]$$

ــ دامنه‌ی g با شرط $x+۱۱\geq ۰$ برابر است با :

$$D_g=\{x|x\in\mathbb{R},۱۱+x\geq ۰\}=\{x|x\in\mathbb{R}, x\geq -۱۱\}$$

$$=[-۱۱,+\infty)$$

ـ دامنه‌ی f/g طبق رابطه کلی برابر است با :

$$D_{f/g}=D_f \quad D_g-\{x|x\in \mathbb{R}\ ,\ g(x)=۰\}\Rightarrow$$

آن‌گاه خواهیم داشت :

$$D_{f/g}=(-\infty,۳]\quad[-۱۱,+\infty)-\{x|x\in \mathbb{R}\ ,\ g(x)=\sqrt{۱۱+x}=۰\}$$

$$\Rightarrow D_{f/g}=[-۱۱,۳]-\{x|x\in \mathbb{R}\ ,\ ۱۱+x=۰\}$$

پس $D_{f/g}$ برابر است با :

$$\Rightarrow D_{f/g}=[-۱۱,۳]-\{-۱۱\}=(-۱۱,۳]$$

فعالیت ۲۴ــ۲

تابع‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۴}\ \text{و}\ g(x)=\sqrt{۹-x^۲}$$

ـ جاهای خالی را تکمیل کنید.

۱) $D_f=\{x|x\in \mathbb{R},x^۲-۴\geq ۰\}=(-\infty,-۲]\quad \boxed{}$

۲) $D_g=\{x|x\in \mathbb{R},۹-x^۲\geq ۰\}=[-۳,\boxed{}]$

۳) $D_{f+g}=D_f \quad D_g=\boxed{}$

۴) $D_{f/g}=D_f \quad D_g-\{\pm ۳\}=\boxed{}$

پاسخ:

مثال۴: تابع‌های مقابل مفروض‌اند. مطلوب است :

$$f=\{(۳,۵),(-۴,۹),(۱۱,۱)\}$$

$$g=\{(۳,۹),(۲۰,۵),(۱۱,۱۷),(۰,۱۲)\}$$

الف) $D_{f\times g},D_{f\pm g}$

ب) $f\times g,f+g$

حل: برای پیدا کردن دامنه‌های $f\pm g$ و $f\times g$ دامنه‌های f و g را می‌یابیم :

ـ اشتراک D_f و D_g برابر است با :

$$D_f=\{۳,-۴,۱۱\}\ \text{و}\ D_g=\{۳,۲۰,۱۱,۰\}$$

$$D_{f\pm g}=D_{f\times g}=D_f \quad D_g=\{۳,۱۱\}$$

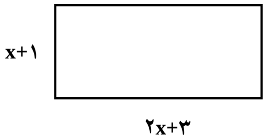
حل ب: برای یافتن $f+g$ ، $f\times g$ دامنه‌های مشترک f و g را مشخص می‌کنیم و مقادیر مربوط به دامنه‌های مشترک را با

هم جمع و یا در هم ضرب می‌کنیم.

$$f+g=\{(۳,۵+۹),(۱۱,۱+۱۷)\}=\{(۳,۱۴),(۱۱,۱۸)\}$$

$$f\times g=\{(۳,۵\times ۹),(۱۱,۱\times ۱۷)\}=\{(۳,۴۵),(۱۱,۱۷)\}$$

مثال ۵: مستطیل مقابل مفروض است.



ــ ضابطه‌ای برای مساحت $S(x)$ بنویسید، سپس $S(۳)$ را محاسبه کنید.

حل : مساحت مستطیل $S(x)$ برابر است با طول ضرب در عرض.

$$S(x)=\underbrace{(۲x+۳)}_{\text{طول}}\times \underbrace{(x+۱)}_{\text{عرض}}$$

ــ $S(۳)$ برابر است با :

$$S(۳)=(۲\times ۳+۳)(۳+۱)=۹\times ۴=۳۶$$

مثال ۶: مختصات نقاط M و N در روبه‌رو مفروض است.

$$M\left|\begin{matrix} t+۴ \\ t^۲ \end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad N\left|\begin{matrix} ۲t-۱ \\ ۴t+۳ \end{matrix}\right.$$

الف) مختصات وسط MN را برحسب t به‌دست آورید. سپس به ازای $t=۳$ مختصات وسط را محاسبه کنید.

حل : x نقطه‌ی P وسط MN برابر است با :

$$x_P=\frac{x_M+x_N}{۲}=\frac{t+۴+۲t-۱}{۲}=\frac{۳t+۳}{۲}$$

ــ yنقطه‌ی P وسط MN برابر است با :

$$y_P=\frac{y_M+y_N}{۲}=\frac{t^۲+۴t+۳}{۲}$$

ــ به ازای $t=۳$ ، مقادیر x_p و y_p برابر است با :

$$x_P=\frac{۳(۳)+۳}{۲}=۶ \quad y_p=\frac{۳^۲+۴(۳)+۳}{۲}=۱۲$$

ب) طول پاره‌خط MN را برحسب t یافته، سپس به ازای $t=۴$ مقدار MN را حساب کنید.

حل ب: رابطه‌ی محاسبه‌ی طول پاره‌خط MN برابر است با :

$$MN=\sqrt{(x_M-x_N)^۲+(y_M-y_N)^۲}$$

ــ مختصات M و N را در رابطه‌ی MN قرار می‌دهیم :

$$MN=\sqrt{(t+۴-۲t+۱)^۲+(t^۲-۴t-۳)^۲}$$

ـ طول پاره‌خط MN برحسب t به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(۵-t)^{۲} + (t^{۲} - ۴t - ۳)^{۲}}$$

ـ به ازای $t = ۴$ مقدار MN را محاسبه می‌کنیم.

$$MN = \sqrt{(۵-۴)^{۲} + (۴^{۲} - ۴\times ۴ - ۳)^{۲}}$$

$$= \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰}$$

تمرین: در مثال ۶، مختصات وسط پاره‌خط را به ازای $t = ۰$ حساب کنید.

پاسخ:

مثال ۷: مقدار آبی که درهر ثانیه، برحسب لیتر، از فواره‌های A و B وارد استخر می‌شود به ترتیب از دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل محاسبه می‌شود.

$f(t) = ۴t$ و $g(t) = ۷t$

الف) مقدار آبی که از فواره‌های A و B وارد استخر می‌شود از چه دستوری محاسبه می‌شود؟

حل: اگرمجموع $f(t)$ و $g(t)$ را $h(t)$ فرض کنیم داریم :

$$h(t) = (f+g)(t) = f(t) + g(t) = ۴t + ۷t$$

ـ آبی که وارد استخر می‌شود برابر است با :

$$h(t) = ۱۱t$$

ب) در ۲۰ ثانیه چقدر آب وارد استخر می‌شود؟

$$h(t) = ۱۱t \Rightarrow$$

به جای t عدد ۲۰ را درتابع با ضابطه‌ی $h(t)$ قرار می‌دهیم :

$h(۲۰) = ۱۱ \times ۲۰ = ۲۲۰$ لیتر

ج) فرض کنید گنجایش این استخر معادل ۷۷۰۰ لیتر باشد، پس از چند ثانیه پر می‌شود؟

$$h(t) = ۱۱t$$

ـ مقدار $h(t)$ را برابر ظرفیت استخر قرارمی‌دهیم، بنابراین :

$۱۱t = ۷۷۰۰ \Rightarrow t = \frac{۷۷۰۰}{۱۱} \Rightarrow t = ۷۰۰$ ثانیه

تمرین

ضابطه‌ی تابع‌های مقابل داده شده‌اند :

$f(t) = t^{۲} + ۲t , g(t) = ۳t$

۱ــ ضابطه‌ی $(f \pm g)$ را محاسبه کنید.

۲ــ به ازای $t = ۳$ مقدار $(f+g)(t)$ را پیدا کنید.

۳ــ به‌ازای $t = -۳$ مقدار $(f-g)(t)$ را پیدا کنید.

مثال ۸: تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \sqrt{۲ - x}$

ــ دامنه‌های $f+g$ و f/g را بیابید.

حل: باتوجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال، دامنه‌ی f برابر است با :

$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq ۰\} = [۰, +\infty)$

ــ با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال دامنه‌ی g برابر است با :

$D_g = \{x | x \in \mathbb{R}, ۲ - x \geq ۰\} = (-\infty, ۲]$

ــ دامنه‌ی $f+g$ برابر است با :

$D_{f+g} = D_f \quad D_g = [۰, ۲]$

ــ دامنه‌ی f/g را محاسبه می‌کنیم،

$D_{f/g} = D_f \quad D_g - \{x | x \in \mathbb{R}, g(x) = ۰\} \Rightarrow$

دامنه‌ی f/g برابر است با :

$D_{f/g} = [۰, ۲] - \{۲\} = [۰, ۲)$

تمرین

۱ــ تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$f = \sqrt{x - ۱}$ و $g(x) = \sqrt{۹ - x^{۲}}$

الف) ضابطه‌های $f \times g$ و g/f را محاسبه کنید.

ب) دامنه‌های $f - g$ و g/f را محاسبه کنید.

۲ــ دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$f(x) = ۳x + ۱$ ، $g(x) = x^{۲} - ۲x$

مقدار $(f+g)(۳)$ را محاسبه کنید.

آزمون پایانی (۶)

۱ــ تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$f(x)=\frac{۳x}{x^۲-۴}$ ، $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$

ــ دامنه‌های $f-g$ ، $f\times g$ و f/g را به‌دست آورید.

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. حاصل عبارت‌های $f(۳)\times f(۲)$ و $f(۳)+f(-۲)$ را به‌دست آورید.

$f(x)=۳x^۲-۲x+۱$

۳ــ تابع‌های f و g با ضابطه‌های روبه‌رومفروض‌اند :

$f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=۳x-۲$

الف) ضابطه‌ی $f\times g$ و f/g را بنویسید.

ب) مقدار $(f+g)(۰)$ را بیابید.

ج) مقدار $\frac{f(۸)}{g(۲)}$ را بیابید.

۴ــ هرگاه

$f=\{(-۱,۱),(۷,۳),(۹,۵),(۵,۱۱),(۰,۲),(۴,۰)\}$

$g=\{(-۱,۱۰),(۲,۵),(۷,۱۱),(-۵,۱۱),(۳,۹)\}$

الف) دامنه‌های $f\pm g$ و $f\times g$ را بیابید.

ب) توابع $۲f+۳g$ و $f\times g$ را تعیین کنید.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۶)

بخش دوم

فصل هفتم

ترکیب دو تابع

هدف کلی

ترکیب دو یا چند تابع و کاربردهای آن در حل مسائل

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ ضابطه‌ی fog و gof را با داشتن ضابطه‌ی f و g بنویسد ؛

۲ــ مقدار تابع‌های fog و gof را در بعضی از نقطه‌های دامنه‌اش تعریف کند ؛

۳ــ مسائل مربوط به کاربرد ترکیب تابع‌ها را حل کند.

پیش آزمون (۷)

۱ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رومفروض است :

الف) مقادیر $f(0)$ و $f(-2)$ را به‌دست آورید.

ب) $f(x-2)$ را بنویسید.

ج) $f(3x+2)$ را بنویسید.

۲ــ تابع‌های f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.

ضابطه‌های fog و gof را بنویسید.

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. اگر $f(-1)=4$ باشد مقادیر b و $f(-2)$ را بیابید.

۴ــ تابع f و fog با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند، $g(3)$ را بنویسید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۷)

$f(x)=3x+2$

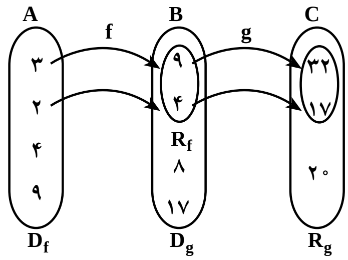
$f(x)=\sqrt{x+1}$ ، $g(x)=x^2-1$

$f(x)=3x^2+2bx-7$

$f(x)=2x+1$ ، $(fog)(x)=3x+4$

۷ــ۲ــ ترکیب دو تابع

فعالیت ۲۵ــ۲



شکل ۱۲۵ــ۲

فرض کنید $f:A\to B$ و $g:B\to C$

$x\to ۳x+۵$ $x\to x^{۲}$

با توجه به تابع‌های f و g و شکل ۱۲۵ــ۲ به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱ــ مقدارهای $f(۳)$ و $g(۹)$ برابر چه اعدادی هستند؟

۲ــ مقدارهای $f(۲)$ و $g(۴)$ برابر چه اعدادی هستند؟

۳ــ آیــا روابــط $g(f(۳))=g(۹)$ و $g(f(۲))=g(۴)$ صحیح است؟

۴ــ مجموعه‌ی $R_f \quad D_g$ را به‌دست آورید.

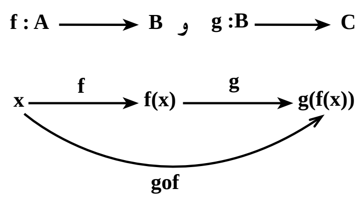
۵ــ با توجه به شکل ۱۲۵ــ۲ و روابط بالا، آیا می‌توان تابع h را به‌صورت $h:A\to C$ با ضابطه‌ی زیر تعریف کرد؟

$x\to ۳x^{۲}+۵$

(در حالت کلی $g(f(x))$ را می‌توان با نماد $(gof)(x)$ نشان داد)

تعریف: دو تابع f و g مفروض‌اند. ترکیب تابع g با f را با gof نشان می‌دهند و تابع $gof:A\to C$ است که به‌ازای هر $x\in A$، $(gof)(x)=g(f(x))$. شکل ۱۲۶ــ۲ نمودار ترکیب این دو تابع است.

تذکر: gof هنگامی قابل تعریف است که $R_f \quad D_g \neq$.



شکل ۱۲۶ــ۲

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است؛

$f(x)=x^{۲}+۲x+۳$

مقدارهای مقابل را به‌دست آورید.

$f(۱)$ ، $f(۳)$ ، $f(z)$ ، $f(-۲z+۱)$

حل: برای محاسبه‌ی $f(۱)$ به جای x، ۱ را قرار می‌دهیم:

$f(۱)=۱^{۲}+۲(۱)+۳=۱+۲+۳=۶$

ــ برای محاسبه‌ی $f(۳)$ ، به جای x، ۳ را قرار می‌دهیم:

$f(۳)=۳^{۲}+۲(۳)+۳=۹+۶+۳=۱۸$

ـ برای محاسبه‌ی $f(z)$ ، به جای x ، z را قرار می‌دهیم :

$$f(z)=z^{2}+2z+3$$

ـ برای محاسبه‌ی $f(-2z+1)$ ، به جای x، $-2z+1$ را قرار می‌دهیم :

$$f(-2z+1)=(-2z+1)^{2}+2(-2z+1)+3$$

ـ با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم :

$$\Rightarrow f(-2z+1)=4z^{2}-4z+1-4z+2+3$$

ـ پس از ساده کردن $f(-2z+1)$ به‌دست می‌آید :

$$\Rightarrow f(-2z+1)=4z^{2}-8z+6$$

مثال ۲: توابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض اند ؛ $(fog)(x)$ ، $gof(x)$ را به‌دست آورید.

$$f(x)=x^{2}\ ,\ g(x)=-2x+3$$

حل: روش اول: fog برابر است با :

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=\big(g(x)\big)^{2}=(-2x+3)^{2}$$

ـ gof برابر است با :

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=-2f(x)+3=-2x^{2}+3$$

روش دوم: در $f\big(g(x)\big)$ به جای $g(x)$ مقدار آن را قرار می‌دهیم، یعنی :

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=f(-2x+3)=(-2x+3)^{2}$$

ـ در $g\big(f(x)\big)$ به جای $f(x)$ مقدار آن را قرار می‌دهیم :

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=g(x^{2})=-2x^{2}+3$$

مثال ۳: تابع‌های f و fog با ضابطه‌های روبه‌رومفروض اند.

$$f(x)=4x+1 \text{ و } (fog)(x)=3x-1$$

ـ ضابطه تابع g را بیابید، سپس $g(1)$ را حساب کنید.

حل: در رابطه‌ی fog به جای x در $f(x)$ مقدار $g(x)$ را قرار می‌دهیم ؛

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=4g(x)+1$$

از تابع fog با ضابطه‌ی $۳x-۱$ خواهیم داشت :

$$\Rightarrow ۴g(x)+۱=۳x-۱$$

ـ ضابطه‌ی g برابر است با :

$$\Rightarrow ۴g(x)=۳x-۱-۱ \Rightarrow g(x)=\frac{۳x-۲}{۴}$$

ـ در $g(x)$، به جای x عدد ۱ را قرار می‌دهیم :

$$g(۱)=\frac{۳\times ۱-۲}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض‌اند.

$$f=\{(-۱,۷),(۳,۴),(۷,۵),(۴,۲)\}$$

$$g=\{(۷,۱۱),(۰,۱),(۵,۱۸),(۹,۹)\}$$

الف) $D_g \quad R_f$ را به‌دست آورید.

ب) $gof(۷)$ و $gof(-۱)$ را به‌دست آورید.

ج) دامنه‌ی gof را به‌دست آورید.

حل الف) $R_f=\{۷,۴,۵,۲\}$ و $D_g=\{۷,۰,۵,۹\} \Rightarrow$

$$D_g \quad R_f=\{۷,۵\}$$

حل ب)

$$(gof)(۷)=g(f(۷))=g(۵)=۱۸$$

$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۷)=۱۱$$

حل ج)

$$gof=\{(۷,۱۸),(-۱,۱۱)\} \Rightarrow$$

ـ دامنه‌ی gof برابر است با :

$$D_{gof}=\{۷,-۱\}$$

مثال ۵: رابطه‌ی مقابل مفروض است. $f(t)$ را به‌دست آورید.

$$f(-۴t+۱)=۵t-۱$$

حل: عبارت $-۴t+۱$ را برابر متغیر x قرار می‌دهیم و t را بر حسب x محاسبه می‌کنیم.

$$-۴t+۱=x \Rightarrow -۴t=x-۱ \Rightarrow t=\frac{x-۱}{-۴}$$

ـ درتابع f، متغیرها را برحسب x مرتب می‌کنیم.

$$f(x)=۵(\frac{x-۱}{-۴})-۱=\frac{۵x-۵}{-۴}-۱$$

ـ مخرج مشترک می‌گیریم :

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۵x-۵+۴}{-۴}$$

ـ ضابطه $f(x)$ برابر است با :

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۵x-۱}{-۴}$$

ـ به جای متغیر x متغیر t را قرار می‌دهیم، پس داریم :

$$f(t)=\frac{۵t-۱}{-۴}$$

مثال ۶: تابع‌های f و (fog) با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.

$$f(x)=۳x+۲ \quad و \quad (fog)(x)=\frac{۲x-۱}{۱-۵x}$$

مقدار g(۳) را محاسبه کنید.

حل: ابتدا (fog)(x) را به‌دست می‌آوریم :

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=۳g(x)+۲=\frac{۲x-۱}{۱-۵x}\Rightarrow$$

ــ از طرف دوم رابطه مخرج مشترک می‌گیریم.

$$۳g(x)=\frac{۲x-۱}{۱-۵x}-۲=\frac{۲x-۱-۲+۱۰x}{۱-۵x}=\frac{۱۲x-۳}{۱-۵x}$$

ــ ضابطه‌ی g(x) برابر است با :

$$\Rightarrow ۳g(x)=\frac{۳(۴x-۱)}{۱-۵x}\Rightarrow g(x)=\frac{۴x-۱}{۱-۵x}$$

ــ به جای x، عدد ۳ را قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow g(۳)=\frac{۴(۳)-۱}{۱-۵(۳)}\Rightarrow g(۳)=\frac{۱۱}{-۱۴}$$

فعالیت ۲۶ــ۲

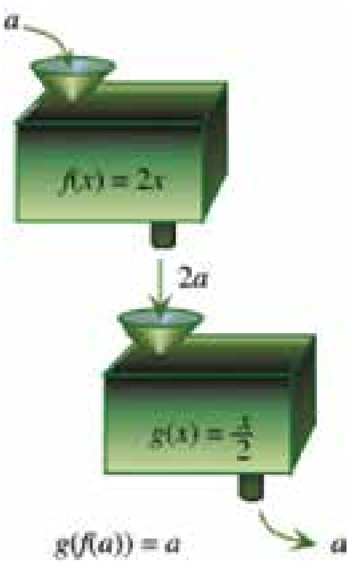
تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x)=۲x \quad و \quad g(x)=\frac{x}{۲}$$

با توجه به شکل ۱۲۷ــ۲ آیا می‌توان ادعا کرد که :

الف) $(gof)(۲)=۲$ ؟ چرا؟

ب) $(gof)(a)=a$ ؟ چرا؟



شکل ۱۲۷ــ۲

مثال ۷: تابع‌های f و g با ضابطه‌های روبه‌رومفروض‌اند.

$$f(x)=۳x+۷ \quad و \quad g(x)=۲x-۳$$

ــ معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$۳(fog)(x)+۲(gof)(x)=۷$$

حل: ضابطه‌ی تابع fog برابر است با :

$$(fog)(x) = ۳g(x) + ۷ = ۳(۲x - ۳) + ۷$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = ۶x - ۲$$

ــ ضابطه‌ی تابع gof برابر است با :

$$(gof)(x) = g(f(x)) = ۲f(x) - ۳$$

$$= ۲(۳x + ۷) - ۳$$

ــ پس از ساده کردن داریم :

$$\Rightarrow gof(x) = ۶x + ۱۱$$

ــ مقادیر $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را در معادله قرار می‌دهیم :

$$۳(fog)(x) + ۲(gof)(x) = ۱۸x - ۶ + ۱۲x + ۲۲ = ۷$$

ــ مقدار x برابر است با :

$$\Rightarrow ۳۰x + ۱۶ = ۷ \Rightarrow ۳۰x = ۷ - ۱۶ \Rightarrow x = \frac{-۳}{۱۰}$$

آزمون پایانی (۷)

۱ــ دو تابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.
مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(\circ)$ و $g(f(\circ))$

ب) $g(۱)$ و $f(g(۱))$

$$f(x)=\frac{۵x+۳}{۳x-۱} \quad \text{و} \quad g(x)=۱-۴x$$

۲ــ دو تابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.
ضابطهٔ توابع fog ، gof و fof را بنویسید.

$$f(x)=۲x+۱ \quad \text{و} \quad g(x)=۴x-۳$$

۳ــ دو تابع f و (fog) با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند. مقدار $g(-۲)$ را حساب کنید.

$$f(x)=۳x+۱ \quad \text{و} \quad (fog)(x)=\frac{۱}{۴}x+۳$$

۴ــ دو تابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.
ریشه‌های $(gof)(x)=۳x$ را به‌دست آورید.

$$f(x)=x^{۲}+۲ \quad \text{و} \quad g(x)=x+۳$$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۷)