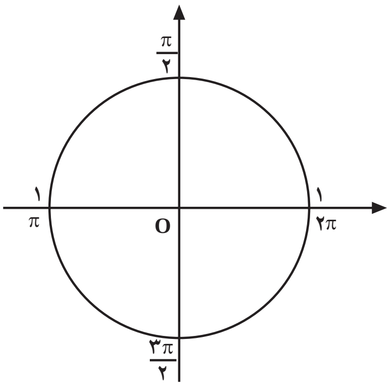
۴ــ وقتی $\sin x = ۰$ باشد، می‌خواهیم تمامی زوایایی را تعیین کنیم که مقدار سینوس آن‌ها صفر باشد. در شکل ۱۱۸ــ۲ مشخص کنید چه زوایایی دارای سینوس صفر می‌باشند؟



شکل ۱۱۸ــ۲

$\sin \boxed{} = ۰$ و $\sin \boxed{} = ۰$ و $\sin ۲\pi = ۰$

$\sin(۰^\circ + ۲\pi) = ?$

۵ ــ سینوس زوایای ۰، π، ۲π برابر صفر است. آیا سینوس زوایای ۳π، ۴π، ۵π و ... نیز صفر است؟ چرا؟

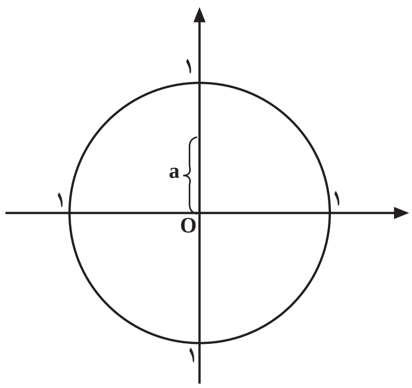
$\sin(\pi + ۲\pi) = ?$ و $\sin(\pi + ۳\pi) = ?$

$\sin(\pi + ۴\pi) = ?$

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\sin x = ۰$ برابر است با : $x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

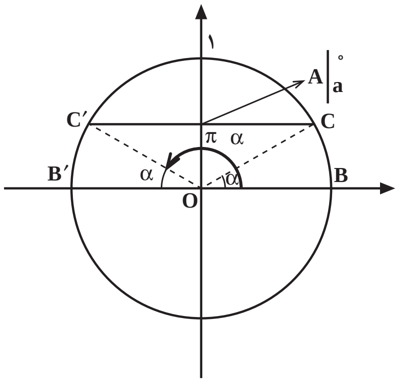
فعالیت ۲۰ــ۲

شکل ۱۱۹ــ۲ دایره‌ی مثلثاتی را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن جواب‌های معادله‌ی $\sin x = a$، که $-۱ \le a \le ۱$، مراحل زیر را انجام دهید.



شکل ۱۱۹ــ۲

$\sin x = a$ و $-۱ \le a \le ۱$ و $x = ?$



شکل ۱۲۰ــ۲

۱ــ خط گذرا از نقطه‌ی $A(\circ,a)$ و موازی با محور کسینوس‌ها را رسم کنید. این خط، دایره‌ی مثلثاتی را در چند نقطه قطع می‌کند؟ (شکل ۱۲۰ــ۲).

۲ــ نقاط C و C' را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم. سینوس دو زاویه‌ی α و $\pi-\alpha$ با هم چه رابطه‌ای دارند؟ (شکل ۱۲۰ــ۲).

$$\sin(\pi-\alpha)\,\boxed{}\,\sin\alpha$$

۳ــ اگر α یا $\pi-\alpha$ یک جواب معادله باشند آیا هرچند بار دور دایره گردش نماییم مقدار سینوس تغییر می‌کند؟

$\sin(\alpha+۲k\pi)=?$ و $k\in\mathbb{Z}$

$\sin((\pi-\alpha)+۲k\pi)=?$

نتیجه: جواب کلی معادله‌ی مقابل عبارت است از :

$\sin x=a=\sin\alpha$ ، $-۱\le a\le ۱$

$x=۲k\pi+\alpha$ یا $x=۲k\pi+(\pi-\alpha)$ ، $k\in\mathbb{Z}$

مثال: جواب‌های معادله‌ی مقابل را بیابید.

$$۲\sin^۲ x-\sin x=\circ$$

حل: از sinx فاکتور می‌گیریم، بنابراین خواهیم داشت :

$$\sin x(۲\sin x-۱)=\circ$$

ــ تک‌تک عوامل حاصل‌ضرب را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\underset{x=\circ}{\searrow}\circ \Rightarrow x=k\pi+\circ \Rightarrow \boxed{x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}}\\ ۲\sin x-۱=\circ\Rightarrow ۲\sin x=۱\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\end{cases}$$

جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم.

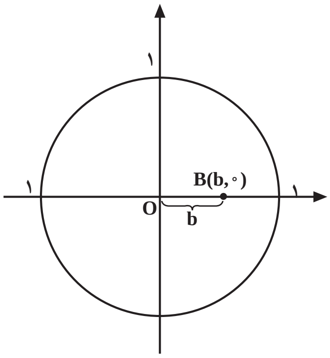
$$x=\frac{\pi}{۶}\ ,\ x=\pi-\frac{\pi}{۶}=۵\frac{\pi}{۶}$$

ــ جواب کلی معادله عبارت است از :

$$\Rightarrow \boxed{x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}} \text{ و } \boxed{x=۲k\pi+۵\frac{\pi}{۶}}$$

فعالیت ۲۱ــ۲

شکل ۱۲۱ــ۲ دایره‌ی مثلثاتی را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن جواب‌های کلی معادله‌ی مقابل :



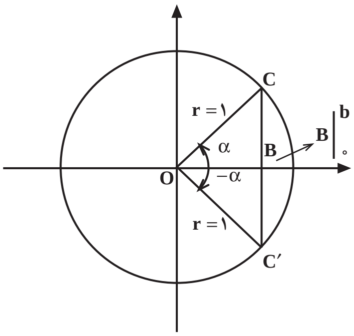
شکل ۱۲۱ــ۲

$\cos x = b \ ,\ -۱ \le b \le ۱$

مراحل زیر را انجام دهید.

ــ خط گذرا از نقطه‌ی $B(b,۰)$ و موازی با محور سینوس‌ها را رسم کنید. این خط دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی C و C' قطع می‌کند (شکل ۱۲۲ــ۲).

ــ نقاط C و C' را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم (شکل ۱۲۲ــ۲).



شکل ۱۲۲ــ۲

ــ دو زاویه‌ی ایجاد شده‌ی α و $-\alpha$ با هم چه رابطه‌ای دارند؟

$\cos(-\alpha) = \dfrac{OB}{r}\ \square \quad \cos\alpha = \dfrac{OB}{r}$

ــ آیا می‌توانیم رابطه‌ی مقابل را قبول کنیم؟

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ بلی ☐   خیر ☐

۳ــ اگر α و $-\alpha$ یک جواب معادله باشند و چندین بار زاویه دور دایره گردش کند $(۲k\pi)$ و بر روی α و $-\alpha$ قرار گیرد کسینوس برابر چه مقداری می‌باشد؟

$\cos(۲k\pi + \alpha) = \cos\alpha = \square$

$\cos(۲k\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \square$

نتیجه: جواب کلی معادله‌ی مقابل عبارت است از :

$\cos x = b = \cos\alpha \ ,\ -۱ \le b \le ۱$

$x = ۲k\pi \pm \alpha \ ,\ k \in \mathbb{Z}$

مثال: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی مقابل را پیدا کنید.

$\cos^۲ x - ۲\cos x + \dfrac{۳}{۴} = ۰$

حل:

ــ حاصل جمع دو عدد $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ برابر ۲ و ضربشان برابر $\frac{۳}{۴}$ است، پس :

$$(\cos x-\frac{۳}{۲})(\cos x-\frac{۱}{۲})=۰$$

با توجه به تغییرات cosx بین ۱− و ۱، جواب $\frac{۳}{۲}$ قابل قبول نیست.

ــ به ازای $\frac{۱}{۲}$ جواب قابل قبول، و زاویه‌ی x برابر است با :

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow \cancel{\cos x=\frac{۳}{۲}}\\ \cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{۳}}\end{cases}$$

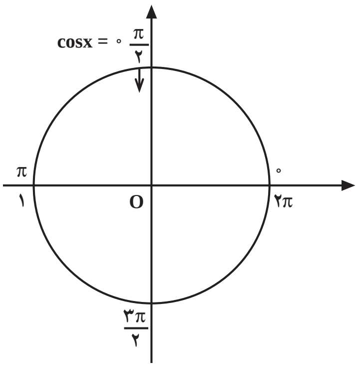
ــ با قرار دادن $\frac{\pi}{۳}$ در رابطه‌ی کلی جواب‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

$$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \text{ و } k\in\mathbb{Z}$$

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\cos x=۰$$

حل: با توجه به شکل ۱۲۳ــ۲ به ازای $\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ معادله‌ی cosx برابر صفر است.



شکل ۱۲۳ــ۲

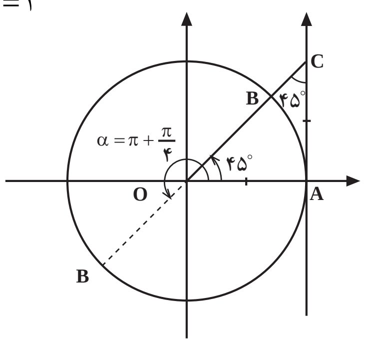
نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\cos x=۰$ عبارت است از : $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

مثال: معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$\tan x=۱$$

ــ برای پیدا کردن تمامی زوایایی که مقدار تانژانت آن‌ها برابر با عدد ۱ می‌باشد مراحل زیر را انجام دهید.

۱ــ در شکل ۱۲۴ــ۲ بر روی محور تانژانت پاره‌خط AC



شکل ۱۲۴ــ۲

را به اندازه‌ی واحد جدا کنید. از C به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم مقدار تانژانت زاویه‌ی حاصل (۴۵) برابر با چیست؟

$$\tan\frac{\pi}{4}=\boxed{}$$

۲ــ هرگاه نقطه‌ی B را به اندازه‌ی π واحد در جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت دهیم به نقطه‌ای مانند B' می‌رسیم. مقدار تانژانت زاویه‌ی $\pi+\frac{\pi}{4}$ برابر چیست؟

$$\tan(\pi+\frac{\pi}{4})=?$$

ــ هرگاه از B' به اندازه‌ی π واحد در جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت کنیم به نقطه‌ی B می‌رسیم. آیا مقدار تانژانت تغییر می‌کند؟

$$\tan(2\pi+\frac{\pi}{4})=?$$

ــ آیا رابطه‌ی مقابل صحیح است؟ چرا؟

$$\tan(k\pi+\frac{\pi}{4})=1 \text{ و } k\in\mathbb{Z}$$

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\tan x = m= \tan\alpha$ که $m\in\mathbb{R}$ برابر است با : $x=k\pi+\alpha\,,\ k\in\mathbb{Z}$

مثال‌های اضافی

مثال ۱: تابع روبه‌رو مفروض است.

$$f(x)=\frac{x}{2\sin x-1}$$

الف) این تابع به ازای چه مقدار از x تعریف نمی‌شود؟

حل: به ازای ریشه‌های مخرج، تابع f تعریف نمی‌شود :

$$2\sin x-1=0\Rightarrow 2\sin x=1\Rightarrow$$

$$\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow$$

جواب‌های کلی عبارت است از :

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{6})=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

ب) دامنه‌ی تابع f را به‌دست آورید.

$$D_f=?$$

حل: دامنه‌ی f عبارت از کلیه‌ی اعداد حقیقی به جز ریشه‌ی مخرج است، پس :

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{x|x\in\mathbb{R}, x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \text{ یا } x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right\}$$

مثال ۲: تابع با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. دامنه‌ی آن را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۳}-۹x}}$$

حل: تابع f به ازای xهایی که $x^{۳}-۹x>۰$ تعریف شده است. نامعادله اخیر به روش تعیین علامت حل می‌شود.

$$x^{۳}-۹x=x(x^{۲}-۹)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^{۲}-۹=۰\Rightarrow x^{۲}=۹\Rightarrow x=\pm ۳\end{cases}$$

ــ ریشه‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ در جدول **۲۸ــ۲** قرار داده و تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲۸ــ۲

x		-۳		۰		۳	
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$x^{۲}-۹$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$x^{۳}-۹x$	$-$	۰	$+$ جواب	۰	$-$	۰	$+$ جواب

ــ در نتیجه دامنه‌ی f برابر است با :

$$D_f=(-۳,۰)\quad(۳,+\infty)$$

مثال ۳: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

$$f(x)=\sqrt{\frac{۲x+۱}{۳-۵x}}$$

الف) به‌ازای چه مقادیری از x تابع f تعریف شده است؟

حل:

ــ با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال تابع f باید داشته باشیم :

$$\frac{۲x+۱}{۳-۵x}\geq ۰$$

ــ ریشه‌های صورت و مخرج نامعادله را به‌دست می‌آوریم :

$$۲x+۱=۰\Rightarrow ۲x=-۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$۳-۵x=۰\Rightarrow ۳=۵x\Rightarrow x=\frac{۳}{۵}$$

ــ ریشه‌ها را به ترتیب نزولی به صعودی در جدول **۲۹ــ۲** قرار داده تعیین علامت می‌کنیم.

ــ با توجه به نامعادله، تابع در $\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۵}\right)$ تعریف شده است.

جدول ۲۹ــ۲

x		$-\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۵}$	
$۲x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$۳-۵x$	$+$		$+$	۰	$-$
$\frac{۲x+۱}{۳-۵x}$	$-$	۰	$+$ جواب	نامعین	$-$

ب) دامنه‌ی تابع f را پیدا کنید.

$$-\frac{۱}{۲}\leq x<\frac{۳}{۵}$$

حل:

با استفاده از جدول ۲۹ــ۲ دامنه‌ی f برابر است با :

$$D_f=\left\{x|x\in\mathbb{R},-\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۳}{۵}\right\}=\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۵}\right)$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض‌اند. مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$$f(x)=۷x^{۲}-۵x,g(x)=۲\sin x-۳$$

۱) $f(۰)+g(۰)=?$

ــ $f(۰)$ و $g(۰)$ را از ضابطه‌ی مربوط به‌دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم :

$$\left.\begin{array}{l}f(۰)=۷(۰)^{۲}-۵(۰)=۰-۰=۰\\ g(۰)=۲\sin ۰-۳=۰-۳=-۳\end{array}\right\}\Rightarrow f(۰)+g(۰)=-۳$$

۲) $f(۳)-g(\frac{\pi}{۶})=?$

$$f(۳)=۷(۳)^{۲}-۵(۳)=۶۳-۱۵=۴۸$$

ــ $f(۳)$ و $g(\frac{\pi}{۶})$ را از ضابطه‌ی مربوط به‌دست می‌آوریم و از هم کم می‌کنیم.

$$g(\frac{\pi}{۶})=۲\sin\frac{\pi}{۶}-۳=۲\times\frac{۱}{۲}-۳=۱-۳=-۲$$

$$\Rightarrow f(۳)-g(\frac{\pi}{۶})=۴۸-(-۲)=۵۰$$

مثال ۵: دامنه و برد تابع با ضابطه‌ی مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=-۲\sin ۳x+۵$$

حل: دامنه‌ی تابع شامل کلیه‌ی اعداد حقیقی است :

$$D_f=\mathbb{R}$$

ــ تغییرات تابع سینوس بین ۱- و ۱ است، بنابراین :

$$-۱\le\sin ۳x\le ۱$$

ــ نامعادله را در عدد ۲- ضرب می‌کنیم، پس :

$$-۱\times(-۲)\ge-۲\times\sin ۳x\ge ۱\times(-۲)$$

ــ چون نامعادله در عدد منفی ضرب شده است جهت نامعادله تغییر می‌کند.

$$+۲\ge-۲\sin ۳x\ge-۲$$

به همه‌ی طرف‌های نامعادله عدد ۵ اضافه می‌کنیم.

$$۲+۵\ge-۲\sin ۳x+۵\ge-۲+۵$$

ــ پس از ساده کردن برد تابع f برابر است با :

$$\Rightarrow ۷\ge f(x)\ge ۳\Rightarrow R_f=[۳,۷]$$

مثال ۶: معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$\sqrt{۳}\tan^{۲} x - \tan x = ۰$$

حل: از tanx فاکتور می‌گیریم و هر یک از عوامل را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\tan x(\sqrt{۳}\tan x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \tan x = ۰ \\ \sqrt{۳}\tan x - ۱ = ۰ \end{cases}$$

ــ اولین جواب به ازای $\tan x = ۰$ برابر با :

$$\tan x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

ــ دومین جواب به‌ازای $\tan x = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ برابر با :

$$\sqrt{۳}\tan x - ۱ = ۰ \Rightarrow \tan x = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \tan\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶}$$

ــ جواب‌های کلی معادله برابر است با :

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases} ، k \in \mathbb{Z}$$

تمرین

۱ــ زوایـای $\frac{11\pi}{6}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{6}$ را بـرحسب درجـه بنویسید.

۲ــ نسبت‌های مثلثاتی ۳۰ و ۵۰ را برحسب رادیان بنویسید.

۳ــ معادله‌ی مقابل را حل کنید و جواب‌های کلی آن را به‌دست آورید.

$$\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$$

۴ــ معادله‌ی مقابل را حل کنید و جواب‌های کلی را به‌دست آورید.

$$\sin 2x = 0$$

۴ــ۵ــ۲ــ تساوی دو تابع

فعالیت ۲۲ــ۲

دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند. جاهای خالی را در الف و ب تکمیل کنید.

$$f(x)=\sin^{۲}x+۳\ ,\ \ g(x)=-\cos^{۲}x+۴$$

الف) $D_f=\square$ و $D_g=\square$

ب) $R_f=\square$ و $R_g=\square$

ج) آیا می‌توان گفت: $f=g$؟ چرا؟

نتیجه: دو تابع f و g برابرند، هرگاه دو شرط را دارا باشند:

الف ــ دامنه‌های آن‌ها برابر باشند، یعنی $D_f=D_g$

ب ــ به ازای همه‌ی مقادیر x از دامنه، $f(x)=g(x)$ باشد.

مثال ۱: آیا دو تابع مقابل برابرند؟

$$f(x)=x+۲\ ,\ \ g_x=\frac{x^{۲}+۲x}{x}$$

حل: D_f و D_g را به‌دست می‌آوریم، آن‌گاه ثابت می‌شود برابر نیستند.

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ \ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\Rightarrow D_f\neq D_g$$

مثال ۲: آیا دو تابع مقابل برابرند؟

$$f(x)=۲-۲\sin^{۲}x \ \text{و}\ g(x)=۲\cos^{۲}x$$

حل: D_f و D_g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f=\mathbb{R}\ \text{و}\ D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f=D_g$$

ــ برای هر x در دامنه‌ی تابع f ($D_f=D_g$)، $f(x)=g(x)$

زیرا

$$f(x)=۲-۲\sin^{۲}x=۲(۱-\sin^{۲}x)=۲\cos^{۲}x$$

پس، $f=g$.

فعالیت ۲۳ــ۲

دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۳k+۱ & x=۲\end{cases}\ \ \text{و}\ \ g(x)=x+۲$$

جاهای خالی زیر را تکمیل کنید.

الف) $D_g = \boxed{}$ و $D_f = (\mathbb{R} - \{۲\}) \quad \{۲\} = \boxed{}$

ب) $g(۲) = \boxed{}$

ج) هرگاه $f(۲) = g(۲)$ آن‌گاه $k = \boxed{}$

د) باتوجه به مقدار k، آیا می‌توان گفت دو تابع f و g برابرند؟

تمرین

کدام‌یک از زوج تابع‌های زیر برابرند؟

الف) $f(x) = \frac{x^۲ + ۷x + ۱۲}{x + ۳}$ و $g(x) = x + ۴$

ب) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ - ۴x + ۳}{x - ۱} & x \neq ۱ \\ -۲ & x = ۱ \end{cases}$ و $g(x) = x - ۳$

آزمون پایانی (۵)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۵)

۱ــ $C \in \mathbb{R}$ و $y = C$ یک تابع ثابت است. نمودار تابع با توجه به دو مقدار مختلف ($C > ۰$ یا $C < ۰$) در کدام قسمت از محور xها قرار می‌گیرد؟ (بالا یا پایین محور)

۲ــ هرگاه $A = \{۰,۱,۲\}$ تابعی از A بنویسید که مختص اول هر زوج آن برابر مختص دوم باشد.

۳ــ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{\cos x}{۲\sin x - \sqrt{۳}}$$

۴ ــ آیا دو تابع f و g برابرند؟ چرا؟

$$f(x) = x - ۱ \;,\; g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۱}{x - ۱} & , \quad x \neq ۱ \\ ۲ & \quad\;\; x = ۱ \end{cases}$$

۵ ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. مقدار زیر را محاسبه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} ۲\sin x - ۱ & \dfrac{\pi}{۳} \leq x < \dfrac{۵\pi}{۶} \\ \cos x & x < ۰ \end{cases}$$

$$۳f(\frac{\pi}{۲}) + ۲f(\frac{-\pi}{۳})$$

بخش دوم

فصل ششم

عملیات روی تابع‌ها

هدف کلی
تعیین ضابطه‌ی $f \pm g$ و $f \times g$ و f / g با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g و کاربرد آن‌ها

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ چهار عمل اصلی روی دو تابع را تعریف کند ؛

۲ــ با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g، ضابطه‌ی تابع $f \pm g$ و $f \times g$ و f / g را بنویسد ؛

۳ــ دامنه‌ی تابع‌های $f \pm g$ و $f \times g$ و f / g را تعیین کند ؛

۴ــ چهار عمل اصلی تابع‌ها را در موارد کاربردی استفاده کند.

پیش آزمون (۶)

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۶)

۱ــ توابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$$f(x)=\frac{۱}{x-۱} \text{ و } g(x)=\frac{x}{x-۳}$$

الف) دامنه‌ی f و g را بیابید.

ب) ضابطه‌های $f+g$ و $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و

سپس دامنه‌ی هر یک را به دست آورید.

۲ــ توابع f و g با ضابطه‌های روبه رو مفروض‌اند.

$$f(x)=۷x+۱ \text{ و } g(x)=\sqrt{x}$$

مقادیر زیر را به دست آورید.

$(f+g)(۲)$ و $(\frac{g}{f})(۲)$

۳ــ توابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x)=\{(-۱,۰),(۲,۵),(۹,۱۱),(۱۱,۲۰)\}$$

$$g(x)=\{(۹,۱۷),(۷,۹),(-۱,۳)\}$$

حساب کنید :

الف) $f\times g$ و $۲f+۳g$

ب) D_{f+g} و $D_{f\times g}$