بخش دوم

فصل سوم

تابع

هدف کلی

مفهوم تابع و ویژگی‌های مربوط به آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ تابع را تعریف کند ؛

۲ــ تابع با ضابطه را تعریف کند ؛

۳ــ تابع را به‌صورت جدول نمایش دهد ؛

۴ــ تابع را با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهد و دامنه و برد آن را مشخص کند ؛

۵ــ تابع را از روی نمودار تشخیص دهد و دامنه و برد آن را مشخص کند.

پیش آزمون (۳)

۱ــ از رابطه‌های زیر کدام تابع است؟ چرا؟

الف) $۳x+۵y^۲=۷$

ب) $|x|+|y|=۹$

۲ــ اگــر $f(x)=-۲x^۲+۳$ و $D_f=\{۰,-۱,۲,۳,۵\}$ باشد، تابع f را به‌صورت جدول و زوج مرتب بنویسید.

۳ــ تابع f به‌صورت زیر مفروض است. نمایش نموداری آن را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & ۱\le x<۳\\ ۱ & ۳\le x<۵\\ ۲/۵ & ۵\le x<۹\end{cases}$$

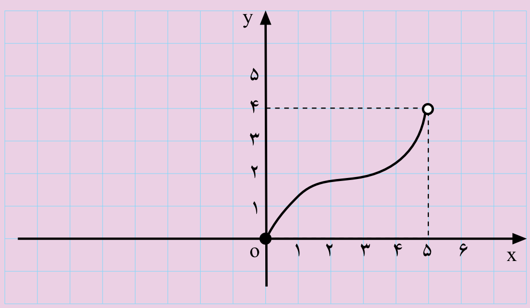
۴ــ دامنه و برد تابع f از نمودار ۶۲ــ۲ را بیابید.

$D_f=$..............

$R_f=$..............

۵ــ هرگاه $f(x)=ax^۲+۳x+۷$ و $f(۲)=۱۱$ باشد $f(-۲)$ را بیابید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۳)



نمودار ۶۲ــ۲

$f(-۲)=?$

۳ــ۲ــ تابع

مقدمه: بیش‌تر مطالب علمی از آغاز پیدایش تاکنون دچار تغییر و تکامل بوده است، مفهوم تابع نیز از این امر مستثنی نبوده است.

شکل ۶۳ــ۲ ــ لایب نیتز

کلمه‌ی تابع را در ریاضیات اولین بار **لایب نیتز**، در سال ۱۶۹۴ مطرح و سپس **لئونارد اویلر** (۱۷۸۳ــ۱۷۰۷) آن را به‌طور دقیق تعریف کرد. اما مفهوم کلی تابع که در آن مجموعه‌های دلخواهی به‌عنوان دامنه و برد در نظر گرفته می‌شود از طرف **ریچارد دِدِکیند** (۱۹۱۶ــ۱۸۳۱) بیان شد. به هر حال، یکی از مفاهیم اساسی ریاضی که در سایر علوم نیز نقش چشم‌گیری ایفا می‌کند تابع است. در این بخش ضمن معرفی چند تابع، مشخص‌نمودن تابع‌ها با ضابطه، جدول، نمودار و زوج مرتب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

شکل ۶۴ــ۲ ــ اویلر

۱ــ۳ــ۲ــ تابع با ضابطه (فرمول): مقادیر یک متغیر غالباً به مقادیر متغیر دیگری بستگی دارد، مثلاً :

ــ مساحت دایره (S) به شعاع (r) آن بستگی دارد.

$$S(r) = \pi r^{۲}$$

ــ حجم (V) مکعب با ابعاد (x) آن متناظر است.

$$V(x) = x^{۳}$$

ــ افزایش طول (L) فنر با وزنه‌ای (w) که به آن آویزان

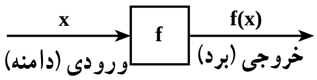
می‌شود متناظر است.

$$L = L_0 + KW$$

(L_0 طول اولیه‌ی فنر و K ضریب افزایش طول فنر)

ــ میزان هزینه‌ی خانوار به درآمد خانوار بستگی دارد.

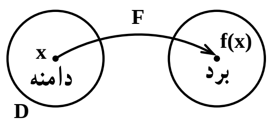
با توجه به مثال‌های بالا می‌بینیم که تابع به هر عضو از مجموعه اول، عضوی از مجموعه‌ی دوم را نسبت می‌دهد. بنابراین، تابع (f) ماشینی است که به هر ورودی مجاز، یک خروجی نسبت دهد (شکل ۶۵ــ۲).



شکل۶۵ــ۲ــ نمودار عمل یک تابع f

ورودی‌ها دامنه‌ی تابع (D_f) را تشکیل می‌دهند و خروجی‌ها برد آن را (R_f).

تعریف: تابع f از مجموعه‌ی D به مجموعه‌ی R قاعده‌ای است که به هر عنصر x از مجموعه‌ی D به نام دامنه، عنصر منحصربه‌فرد f(x) از مجموعه‌ی R به نام برد را نظیر می‌کند.



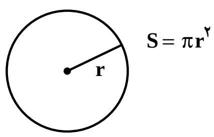
شکل ۶۶ــ۲

مقدار متناظر x را با f(x) نشان می‌دهند و این وابستگی به‌صورت مقابل نوشته می‌شود (بخوانید : y مساوی اِف ایکس).

$$y = f(x)$$

نکته: در مسائل مختلف ممکن است برحسب نیاز متغیر x یا تابع y با نمادهای دیگری بیان شود.

مثال: شعاع دایره (r) متغیر و مساحت دایره (S) تابع است (شکل ۶۷ــ۲) و همواره داریم :



شکل ۶۷ــ۲

قرارداد: وقتی f یک تابع با دامنه‌یD و برد R باشد، می‌نویسیم :

$$f: D \to R$$

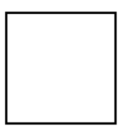
همچنین هرگاه، x عضو دلخواهی از دامنه باشد (ورودی) و f(x) (خروجی) مقدار تابع، به‌ازای x داریم :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \quad \text{یا} \quad y = f(x)$$

به‌طورکلی می‌توان نوشت :

$$f: D \underset{y=f(x)}{\to} R \quad \text{یا} \quad f: D \underset{x \to f(x)}{\to} R$$

مثال: تابعی بنویسید که مساحت هر مربع را به طول ضلع آن وابسته کند.



شکل ۶۸ــ۲

حل: مساحت مربع با طول ضلع x برابر است با :

$$S = x^2$$

ــ طول ضلع x می‌تواند هر عدد حقیقی مثبت را اختیار کند.

$$S: (0, +\infty) \underset{x \to x^2}{\to} \mathbb{R}^+$$

پس :

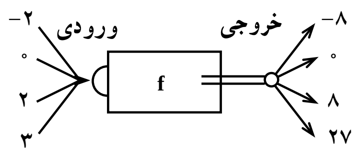
$$S:(0,+\infty)\to \mathbb{R}^+$$
$$S(x)=x^2$$

مثال: اگر $D=\{-2,0,2,3\}$ باشد، ماشین f را چنان طراحی کنید که عضو دامنه (D) را به مکعب تبدیل کند، سپس ضابطه‌ی f و عضوهای برد آن را بنویسید.

حل: تابع f هر عضو (x) را به مکعب‌اش (x^3) تبدیل می‌کند، یعنی :

$$-2 \xrightarrow{f} (-2)^3=-8$$
$$0 \to 0$$
$$2 \to 8$$
$$3 \to 27$$

ــ در شکل **۶۹ــ۲** طراحی ماشین f را مشاهده می‌کنید.



شکل ۶۹ــ۲

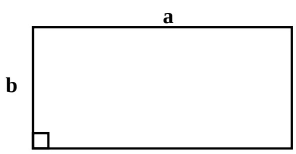
با توجه به اعداد ورودی و خروجی خواهیم داشت :

$$f:D\to \mathbb{R}$$
$$f(x)=x^3$$

با توجه به خروجی، برد آن برابر است با :

$R_f=\{-8,0,8,27\}$ (برد)

تذکر: اگر طول مستطیلی برابر a و عرض آن برابر b باشد :



شکل ۷۰ــ۲

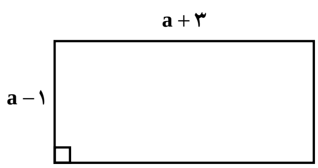
ــ **مساحت** (S) مستطیل برابر است با :

$$S=a\times b$$

ــ **محیط** (P) مستطیل برابر است با :

$$P=2(a+b)$$

مثال : هرگاه ابعاد مستطیلی برابر $a-1$ و $a+3$ باشد، محیط و مساحت آن را به‌صورت ضابطه بنویسید، سپس محیط و مساحت مستطیل را به ازای $a=4$ متر حساب کنید (شکل **۷۱ــ۲**).



شکل ۷۱ــ۲

حل: با توجه به فرمول محیط مستطیل داریم : $P(a)=۲(a-۱+a+۳)$

ــ ضابطه‌ی محیط برحسب a : $\Rightarrow P(a)=۲(۲a+۲)=۲(۲)(a+۱)$

$\Rightarrow P(a)=۴(a+۱)$

ــ به‌ازای متر۴ $a=$ داریم : $P(۴)=۴(۴+۱)=۲۰$ متر

ــ با توجه به فرمول مساحت (S) داریم : $S(a)=(a-۱)(a+۳)$

ــ حاصل‌ضرب دو عامل : $\Rightarrow S(a)=a^۲+۳a-a-۳$

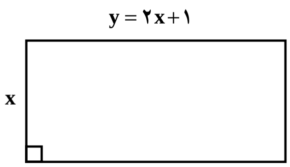
ــ ضابطه‌ی مساحت برحسب a : $\Rightarrow S(a)=a^۲+۲a-۳$

ــ به ازای متر ۴ $a=$ داریم : $S(۴)=۴^۲+۲(۴)-۳=۱۶+۸-۳$

$\Rightarrow S(۴)=۲۱$ متر مربع

فعالیت ۵ــ۲

با توجه به شکل ۷۲ــ۲ اگر مساحت را با $S(x)$ و محیط را با $P(x)$ نشان دهیم محیط و مساحت را به‌صورت ضابطه بنویسید.

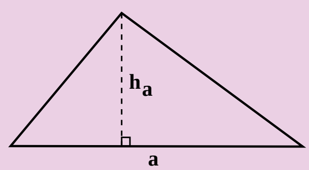


شکل۷۲ــ۲

الف) $P(x)=$

ب) $S(x)=$

نکته: مساحت مثلث با ارتفاع h و قاعده‌ی a برابر است با حاصل‌ضرب نصف ارتفاع در قاعده‌ی آن، یعنی :

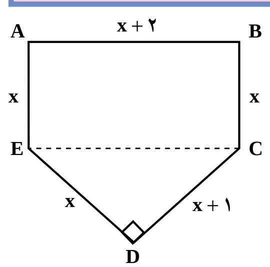


شکل۷۳ــ۲

$$S=\frac{۱}{۲}a.h_a$$

مثال:

الف) با توجه به شکل ۷۴ــ۲ ضابطه‌ای برای $p(x)$ و $S(x)$ بنویسید.



شکل۷۴ــ۲

ب) به‌ازای $x = ۳$ مقادیر $P(۳)$ و $S(۳)$ را محاسبه کنید.

حل الف: محیط برابر است با مجموع اضلاع :

$$P(x) = x + x + ۲ + x + x + ۱ + x$$

ضابطه‌ی محیط برحسب متغیر x :

$$\Rightarrow P(x) = ۵x + ۳$$

مساحت مستطیل ABCE + مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی CDE = مساحت کل

$$S(x) = x(x + ۲) + \frac{۱}{۲}(x)(x + ۱)$$

ــ پس از عملیات ضرب داریم :

$$\Rightarrow S(x) = x^۲ + ۲x + \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}x$$

ــ با ساده کردن عبارت ضابطه‌ی مساحت برحسب متغیر x را به‌دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow S(x) = \frac{۳}{۲}x^۲ + \frac{۵}{۲}x$$

حل ب: به‌ازای $x = ۳$ محیط برابر است با :

$$P(۳) = (۵ \times ۳) + ۳ = ۱۸$$

ــ به‌ازای $x = ۳$ مساحت برابر است با :

$$S(۳) = \frac{۳}{۲}(۳)^۲ + \frac{۵}{۲}(۳) = \frac{۲۷}{۲} + \frac{۱۵}{۲}$$

$$\Rightarrow S(۳) = \frac{۲۷ + ۱۵}{۲} = \frac{۴۲}{۲} = ۲۱$$

مثال: نرخ کرایه‌ی اتومبیلی برای هر کیلومتر طی مسافت ۲۵۰ تومان به‌اضافه‌ی ورودی ثابت ۵۰۰۰ تومان است. بنابراین کرایه‌ی اتومبیل تابعی از مسافت (x) طی شده برحسب کیلومتر می باشد. ضابطه‌ی تابع را بنویسید. سپس کرایه اتومبیل را به‌ازای طی مسافت ۶۰ کیلومتر حساب کنید.

حل: ضابطه‌ی تابع = $f(x)$

مسافت طی‌شده × قیمت + ورودی ثابت = $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = ۵۰۰۰ + ۲۵۰x$$

ــ به‌ازای $x = ۶۰$ داریم :

$$f(۶۰) = ۵۰۰۰ + ۲۵۰ \times ۶۰ = ۵۰۰۰ + ۱۵۰۰۰$$

$\Rightarrow f(۶۰) = ۲۰۰۰۰$ تومان

مثال: ارتفاع استوانه‌ای ۳۰ سانتی‌متر است و می‌دانیم که حجم یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده R از رابطه‌ی $V = \pi R^۲ h$ حساب می‌شود. اگر $۱۰ \le R \le ۲۰$ سانتی‌متر تغییر کند حجم استوانه بین چه مقادیری تغییر می‌کند؟

حل: $V(R)=\pi R^{۲}h \ ، \ h=۳۰cm$

$$\left.\begin{array}{l} V(۱۰)=\pi(۱۰)^{۲}(۳۰)=۳۰۰۰\pi \\ V(۲۰)=\pi(۲۰)^{۲}(۳۰)=۱۲۰۰۰\pi \end{array}\right\}\Rightarrow$$

سانتی‌متر مکعب $۳۰۰۰\pi \le V \le ۱۲۰۰۰\pi$ سانتی‌متر مکعب

تمرین

طول مستطیلی برابر $۲x+۱$ و عرض آن برابر $x+۵$ است.
محیط و مساحت آن را برحسب x بنویسید.

$P(x)=$

$S(x)=$

فعالیت ۶ـ۲

اگر $x^{۲}+y^{۲}=۱۰$ باشد :

الف) به ازای $x=۱$ مقادیر y را بیابید.

ب) با توجه به مقادیر y، آیا رابطه‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۱۰$ ضابطه یک تابع است؟

بله ☐ خیر ☐

مثال: آیا رابطه‌ی $|y|=۵x+۲$ یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) به‌ازای $x=۱$ مقادیر y را بیابید.

$$x=۱\Rightarrow|y|=۵\times۱+۲=۷\Rightarrow y=\pm۷$$

ب) آیا ضابطه‌ی $|y|=۵x+۲$ ، ضابطه‌ی یک تابع است؟

حل: ب) خیر، زیرا طبق قسمت (الف) به ازای $x=۱$ دو مقدار برای y داریم.

تمرین

کدام‌یک از ضابطه‌های زیر، مربوط به یک تابع است؟

۱) $x^{۲}+۲y^{۳}=۵۴$

۲) $۳x^{۲}-۵y=۸$

سؤال: چه موقع یک معادله با دو متغیر ضابطه‌ی یک تابع

را مشخص می‌کند؟

جواب: برای این‌که یک رابطه‌ی بین x و y ضابطه‌ی یک تابع را مشخص کند باید برای هر داده x (ورودی) فقط یک مقدار برای y به‌دست آید.

مثال ۱: تعیین کنید معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی یک تابع است.

$$y^{۲} = x + ۱$$

حل: به‌ازای $x = ۰$ مقدار y را حساب می‌کنیم :

$$y^{۲} = ۰ + ۱ = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱$$

ــ بنابراین تابع نیست زیرا به‌ازای $x = ۰$ دو مقدار برای y به‌دست آوردیم.

مثال ۲: تعیین کنید معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی یک تابع است.

$$-۳x + ۵y = ۲$$

حل: y را برحسب x مرتب می‌کنیم، یعنی :

$$۵y = ۲ + ۳x$$

$$\Rightarrow y = \frac{۲ + ۳x}{۵}$$

ــ چون به‌ازای هر x دقیقاً یک y به‌دست می‌آید معادله ضابطه‌ی تابع است.

مثال ۳: آیا معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی تابع است؟ چرا؟

$$|y| + x^{۲} = ۲۰$$

حل: به‌ازای $x = ۲$ داریم :

$$|y| + ۲^{۲} = ۲۰ \Rightarrow |y| = ۲۰ - ۴ \Rightarrow |y| = ۱۶$$

ــ بنابراین ضابطه‌ی تابع نیست، زیرا به‌ازای $x = ۲$ دو مقدار برای y داریم :

$$\Rightarrow y = \pm ۱۶$$

۲ــ۳ــ۲ــ تابع با جدول

مثال ۱: نمره‌ی ۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس در امتحان ریاضی طبق جدول ۴ــ۲ داده شده است.

به‌ازای هر شماره‌ی دانش‌آموزی یک نمره از آن درس داریم

جدول ۴ــ۲

شماره‌ی دانش‌آموز	۱	۲	۳	۴	۵
نمره‌ی دانش‌آموز	۱۸/۵	۱۵	۱۷	۱۲/۵	۱۹

مثال۲: در جدول ۵ــ۲، x تعداد کارگرهای یک شرکت و f(x) هزینه‌ی این شرکت است :

جدول ۵ــ۲

x	۰	۱	۲	۳	۴
f(x)	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰

الف) هزینه‌ی شرکت به‌ازای ۲ کارگر را محاسبه کنید.

$f(۲)=۲۰$

ب) f(۰) را بیابید (f(۰) هزینه‌ی شرکت بدون استخدام کردن کارگر است)

$f(۰)=۱۰$ مقدار ثابت هزینه

ج) آیا می‌توانید ضابطه‌ای برای هزینه‌ی این شرکت بنویسید؟

$f(۰)=۱۰$

حل: هزینه به ازای یک نفر

$f(۱)=۱۵=۱۰+۵=۱۰+۵\times۱$

ــ هزینه به‌ازای دو نفر

$f(۲)=۲۰=۱۰+۱۰=۱۰+۵\times۲$

ــ هزینه به‌ازای ۳ نفر

$f(۳)=۲۵=۱۰+۱۵=۱۰+۵\times۳$

ــ هزینه به‌ازای n نفر

$f(n)=۱۰+۵n$

درنتیجه ضابطه‌ی هزینه‌ی شرکت به‌ازای x کارگر برابر است با :

$f(x)=۱۰+۵x$

فعالیت ۷ــ۲

با توجه به جدول ۶ــ۲ هرگاه x مسافت طی‌شده‌ی یک تاکسی تلفنی و L(x) هزینه‌ی آن باشد :

جدول ۶ــ۲

x	۰	۱	۲	۳
L(x)	۷	۱۱	۱۵	۱۹

الف) احمد برای رفتن مسافت ۳ کیلومتری چه هزینه‌ای را می‌پردازد؟

$L(۳)=$

ب) مقدار ثابت هزینه‌ی تاکسی تلفنی چقدر است؟

$L(۰)=$

ج) میزان هزینه‌ی احمد به‌ازای ۷ کیلومتر چقدر است؟

$L(۷)=$

د) به‌ازای چه مسافتی احمد بایستی ۴۷ تومان بپردازد؟

$L(x)=۴۷$

هـ) هرگاه ضابطه‌ی مقابل مفروض باشد، مراحل آن را بنویسید.

$L(x)=۷+۴x$

۳ــ۳ــ۲ــ تابع با زوج مرتب

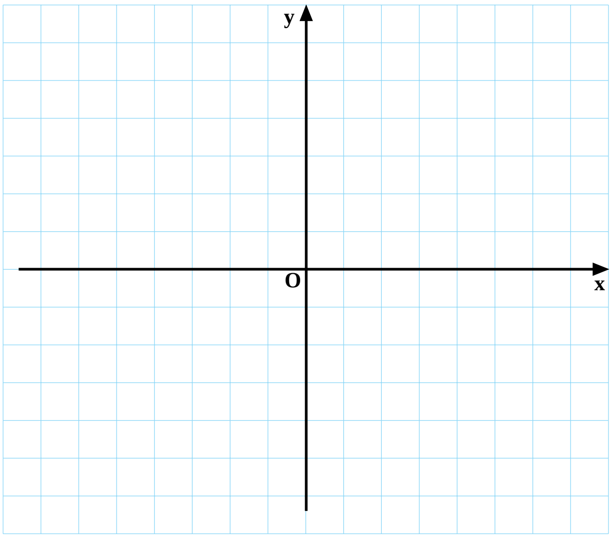
فعالیت ۸ ــ ۲

معادله‌ی $y=x-۳$ مفروض است.

الف) وقتی x از مجموعه‌ی $A=\{۰,۳,۵\}$ باشد، جدول ۷ــ۲ را کامل کنید و سپس نمودار $y=x-۳$ را رسم کنید.

جدول ۷ــ۲

x	۰	۳	۵
y			



نمودار ۷۵ــ۲

ب) آیا می‌توان معادله‌ی $y=x-۳$ را به‌صورت $f=\{(x,x-۳)|x\in\mathbb{R}\}$ (مجموعه‌ی زوج‌های مرتب) نوشت؟

بلی ☐ خیر ☐

ج) تابع f را به‌ازای $x\in A$ به‌صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

مثال ۱: نمره‌ی ۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس با جدول ۸ــ۲ مشخص شده است.

جدول ۸ــ۲

x	۱	۲	۳	۴	۵
f(x)	۱۸/۵	۱۵	۱۷	۱۲/۵	۱۹

الف) تابع f را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

$f=\{(۱,۱۸/۵),(۲,۱۵),(۳,۱۷),(۴,۱۲/۵),(۵,۱۹)\}$

ب) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

$D_f=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

ج) برد تابع f را بنویسید.

$R_f=\{۱۸/۵,۱۵,۱۷,۱۲/۵,۱۹\}$

نتیجه: مجموعه‌ی مختص‌های اول یک تابع را دامنه و مجموعه‌ی مختص‌های دوم آن را برد می‌نامیم.

مثال ۲: دامنه و ضابطه‌ی تابع f مفروض است :

$$f(x)=۴x-۳\ ,\ D_f=\left\{-۲,-\frac{۱}{۲},۰,۱,۳\right\}$$

الف) f را با جدول ۹ـ۲ مشخص کنید.

جدول ۹ـ۲

x	-۲	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۳
f(x)	-۱۱	-۵	-۳	۱	۹

ب) R_f را به‌دست آورید.

$$R_f=\{-۱۱,-۵,-۳,۱,۹\}$$

تعریف: مجموعه‌ی زوج‌های مرتب را تابع گوییم هرگاه مؤلفه‌های اول (مختص اول) برابر نداشته باشد، اگر دو زوج مرتب، مؤلفه‌های اول برابر داشته باشند، مؤلفه‌های دوم (مختص دوم) نیز برابر باشند.

مثال ۳: از رابطه‌های t، s، f، g، h و k کدام‌یک تابع‌اند؟

حل: t تابع است زیرا مؤلفه‌ی اول برابر ندارد. $t=\{(-۱,۳)\}$

ـ s تابع است زیرا مؤلفه‌ی اول تکراری ندارد. $S=\{(۰,۱),(-۱,۱),(۳,۱),(-۷,۱)\}$

ـ f تابع است زیرا مختص اول برابر ندارد. $f=\{(۳,۲),(۴,۵),(۸,۵)\}$

ـ g تابع است زیرا مختص اول برابر ندارد. $g=\{(-۳,۵),(۱,۵),(۳,۵)\}$

ـ h تابع نیست زیرا مختص اول برابر دارد. $h=\{(۲,۳),(-۵,۴),(۳,۱۰),(-۵,۹)\}$

ـ k تابع نیست زیرا مختص اول برابر دارد. $k=\{(۵,۷),(۵,۴),(۵,۱۰),(۵,۸)\}$

مثال ۴: مقدار m را در رابطه‌ی مقابل چنان بیابید که f یک تابع شود.

$$f=\{(۳,۳m-۵),(۳,۷)\}$$

حل: چون f یک تابع است و نیز مختص اول برابر دارد،

پس مختص دوم آن‌ها نیز برابر است، یعنی :

$$۳m-۵=۷ \Rightarrow ۳m=۵+۷=۱۲$$
$$\Rightarrow m=\frac{۱۲}{۳} \Rightarrow \boxed{m=۴}$$

مثال ۵: هرگاه مقادیر مقابل داده شده باشد،

$$f(۲)=۵ \quad f(۳)=۴ \quad f(۵)=-۲$$

الف) تابع f را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.
ب) دامنه و برد f را بیابید.

حل:

$$f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۵,-۲)\}$$
$$D_f=\{۲,۳,۵\} \ , \ R_f=\{۵,۴,-۲\}$$

مثال ۶: تابع f در مقابل مفروض است.

$$f:D \rightarrow . \ \mathbb{R}$$
$$f(x)=۲x+۱$$

این تابع را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

حل:

$$f=\{(x,۲x+۱)|x\in D,۲x+۱\in \mathbb{R}\}$$

مثال ۷: تابع X ودامنه‌ی آن در مقابل داده شده است
$(g\ 9\ ۱۰ m/s^۲)$.

$$X(t)=\frac{۱}{۲}gt^۲+۱۰۰ \quad , \quad D_X=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$$

ــ $X(t)$ را به‌صورت جدول مرتب کنید.

حل:

جدول ۱۰ــ۲

t	۰	۱	۲	۳	۴
X(t)	۱۰۰	۱۰۵	۱۲۰	۱۴۵	۱۸۰

ــ $X(t)$ را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

$$X=\{(۰,۱۰۰),(۱,۱۰۵),(۲,۱۲۰),(۳,۱۴۵),(۴,۱۸۰)\}$$

ــ برد تابع X را به‌دست آورید.

$$R_x=\{۱۰۰,۱۰۵,۱۲۰,۱۴۵,۱۸۰\}$$

ــ $\frac{.X}{.t}$ را به‌ازای $t_۱=۲$ و $t_۲=۳$ محاسبه کنید.

$$\frac{.X}{.t}=\frac{X(t_۲)-X(t_۱)}{t_۲-t_۱}=\frac{۱۴۵-۱۲۰}{۳-۲}=\frac{۲۵}{۱}$$
$$\Rightarrow \frac{.X}{.t}=۲۵$$

مثال ۸: با توجه به مقادیر روبه‌رو کارهای زیر را انجام دهید.

$$f(۳)=۵\ ,\ f(۴)=-۶\ ,\ f(۵)=۹\ ,\ f(-۴)=۹$$

الف) تابع f را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) دامنه را به‌دست آورید.

ج) برد f را به‌دست آورید.

حل:

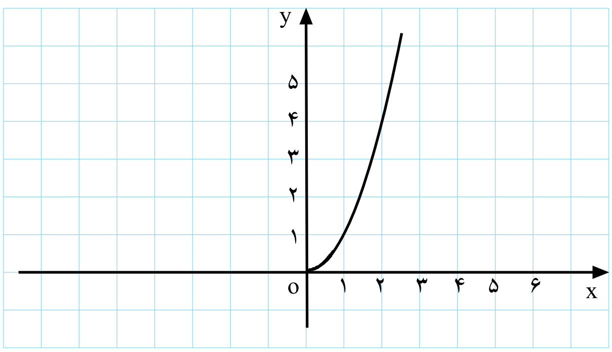
$$f=\{(۳,+۵),(۴,-۶),(۵,۹),(-۴,۹)\}$$

$$D_f=\{۳,۴,۵,-۴\}$$

$$R_f=\{+۵,-۶,۹\}$$

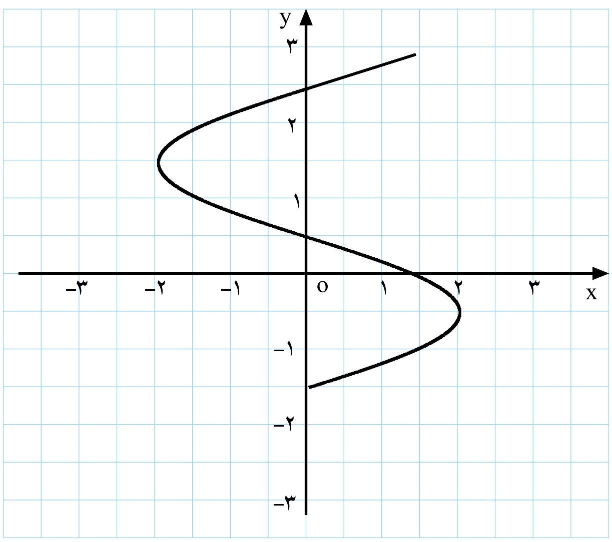
۴ــ۳ــ۲ــ نمایش نموداری تابع: تابع‌ها را می‌توان به‌صورت نمودار نیز نمایش داد.

مثلاً نمودار ۷۶ــ۲ نمودار یک تابع است. زیرا برای هر x فقط یک y وجود دارد.



نمودار ۷۶ــ۲

نمودار ۷۷ــ۲ نمودار تابع نیست چون به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ بیش از یک مقدار برای y وجود دارد.



نمودار ۷۷ــ۲

تعریف: یک نمودار، نمودار یک تابع رامشخص می‌کند هرگاه هر خطی به موازات محور yها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تمرین

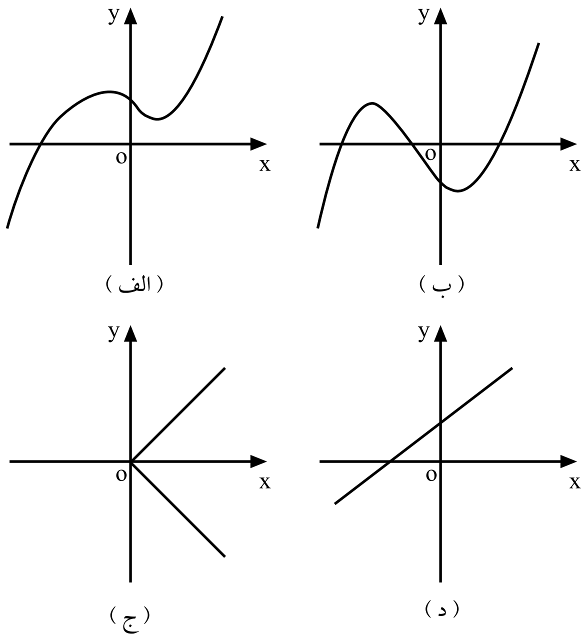
از نمودارهای **۷۸ـ۲** کدام یک نمودار یک تابع رامشخص می‌کند؟

الف) ☐

ب) ☐

ج) ☐

د) ☐

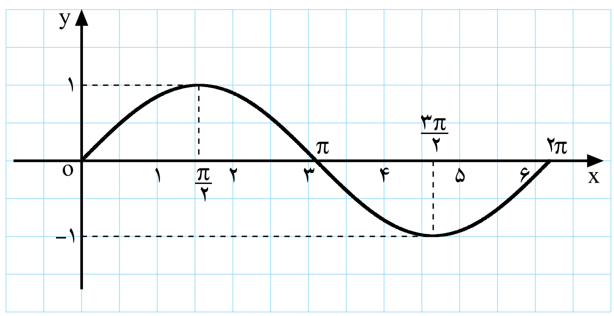


نمودارهای ۷۸ـ۲

مثال۱: با توجه به نمودار **۷۹ـ۲ـ الف** به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) دامنه‌ی نمودار را بیابید.

ب) برد نمودار را به‌دست آورید.



نمودار ۷۹ـ۲ ـ الف

حل:

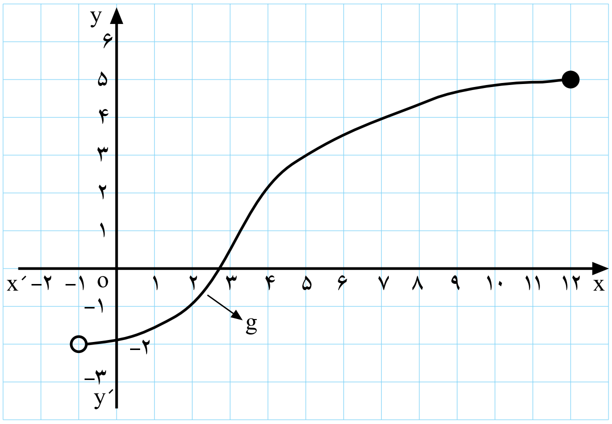
الف) برای تعیین دامنه از روی نمودار مقادیر xها را به‌صورت بازه می‌نویسیم، بنابراین :

$$D_f = [\circ, ۲\pi]$$

ب) برای تعیین برد از روی نمودار مقادیر yها را به‌صورت بازه بیان می‌کنیم :

$$R_f = [-۱, ۱]$$

مثال ۲: با توجه به نمودار ۷۹ـ۲ـ ب به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.



نمودار ۷۹ـ۲ ـ ب

الف) دامنه‌ی نمودار را بیابید.

$D_g = (-۱,۱۲]$

ب) برد نمودار را به‌دست آورید.

$R_g = (-۲,۵]$

نتیجه: با توجه به فعالیت‌ها و مثال‌های حل‌شده، تابع‌ها را به چهار صورت می‌توان نمایش داد.

۱ـ با ضابطه ؛ مانند :

$y = -۳x + ۴$

۲ـ با جدول ؛ مانند جدول ۱۱ـ۲

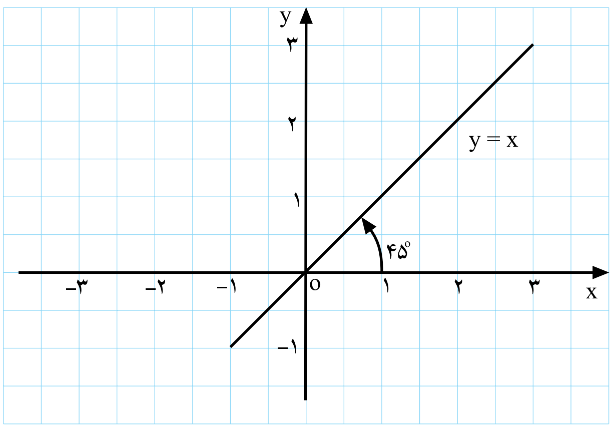
جدول ۱۱ـ۲

شماره‌ی دانش‌آموز	۱	۲	۳	۴	۵
قد دانش‌آموز	۱۶۲cm	۱۵۷cm	۱۷۰cm	۱۶۲cm	۱۷۲cm

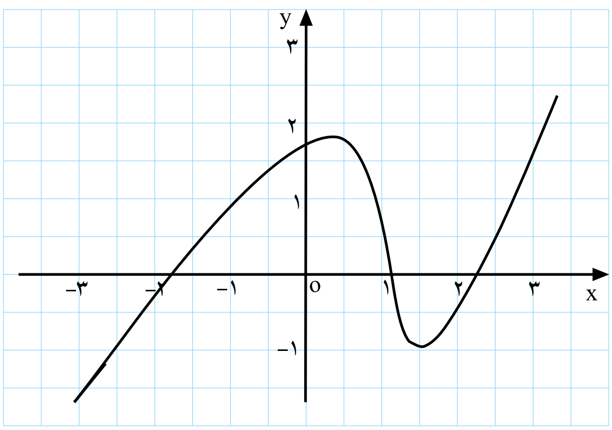
۳ـ با زوج مرتب ؛ مانند :

$f = \{(x,y) | y = x, \ \ x,y \in \mathbb{R}\}$

۴ـ با نمودار ؛ مانند شکل‌های ۸۰ـ۲ و ۸۱ـ۲

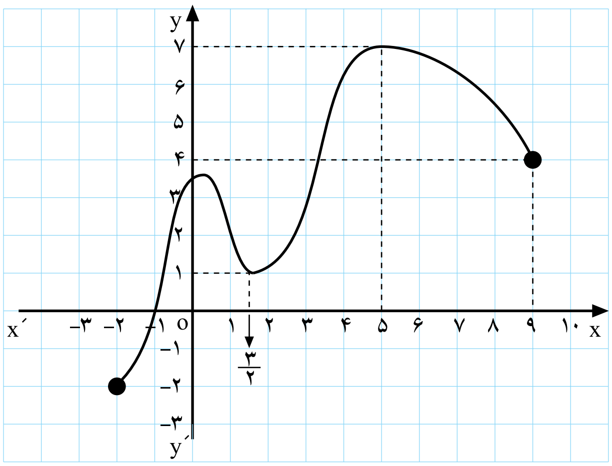


شکل ۸۰ـ۲



شکل ۸۱ـ۲

مثال ۳: تابع f با نمودار **۸۲ـ۲** مشخص شده است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.



شکل ۸۲ـ۲

الف) D_f و R_f را به‌دست آورید:

$D_f=[-۲ و ۹]$ و $R_f=[-۲ و ۷]$

ب) با استفاده از نمودار ۸۲ـ۲، $f(\frac{۳}{۲})$ و $f(-۱)$ را بیابید.

$f(\frac{۳}{۲})=۱$ ، $f(-۱)=۰$

ج) اگر $f(x)=۷$ مقدار x چیست؟

$f(x)=۷ \Rightarrow . \quad x=۵$

د) کم‌ترین مقدار تابع در بازهٔ $[-۲,۷]$ چه مقدار است؟

$f(-۲)=-۲$

هـ) بیش‌ترین مقدار تابع در بازهٔ $[-۲,۷]$ چه مقدار است؟

$f(۵)=۷$

مثال ۴: $f(x)$ و $f(-۳)$ در مقابل مفروض‌اند. مقدار b را به‌دست آورید.

$f(x)=۴x^۲+۳b-۷$ و $f(-۳)=۹$

حل: در $f(x)$ به جای x مقدار ۳− را قرار می‌دهیم و آن‌را برابر با ۹ قرار می‌دهیم.

$$f(-۳)=۹ \rightarrow ۴(-۳)^۲+۳b-۷=۹$$
$$\Rightarrow ۳۶+۳b-۷=۹$$

ـ با حل معادله مقدار b را به‌دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow ۳b+۲۹=۹ \Rightarrow ۳b=۹-۲۹=-۲۰$$
$$\Rightarrow b=\frac{-۲۰}{۳}$$

آزمون پایانی (۳)

تمرین

۱ــ ابعاد مکعب مستطیلی برابر x، $x-۲$ و $x+۲$ است به‌طوری که $x>۲$ ؛

الف) ضابطه‌ی حجم مکعب را بنویسید.

ب) به‌ازای $x=۴$ حجم مکعب را محاسبه کنید.

راهنمایی: حجم مکعب‌مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب ابعاد آن.

۲ــ آیا ضابطه‌ی مقابل مربوط به تابع است؟ چرا؟

۳ــ تابع مقابل مفروض است.

اگر $A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۶}\\ ۲b+۱\end{matrix}\right.$ یک نقطه از تابع باشد مقدار b را محاسبه کنید.

۴ــ تابع f و دامنه‌ی آن (D_f) مفروض است.

الف) تابع f را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) جدول تابع را رسم کنید.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۳)

$V_{(x)} =$

$V_{(۴)} =$

$x^۲+۲y^۳=۵۴$

$y=۲\sqrt{۳}\cos x+۱$

$D_f=\{۰\,,\,-۱\,,\,۱\,,\,۲\}$ و $f(x)=-۲x^۲+۱$