

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x^2 - 6x = -2$$

$$x^2 - 6x + 9 = -2 + 9 \Rightarrow (x - 3)^2 = 7$$

$$\Rightarrow x - 3 = \sqrt{7}, \quad x - 3 = -\sqrt{7}$$

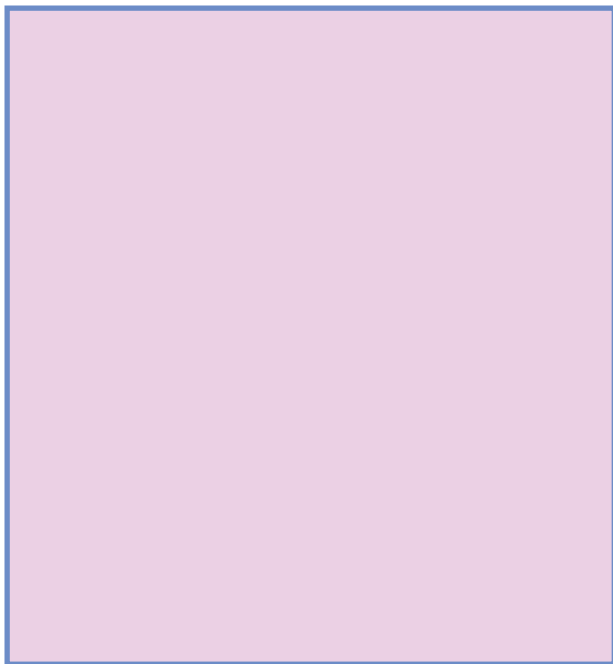
یا

$$x_1 = \sqrt{7} + 3, \quad x_2 = -\sqrt{7} + 3$$

$$x^2 + 10x = 11$$

$$x^2 + 10x + 25 = 11 + 25 \Rightarrow (x + 5)^2 = 36$$

$$\begin{aligned} x + 5 &= 6 & x + 5 &= -6 \\ \frac{x}{2} & & \frac{x}{2} & \\ x_1 &= 1 & x_2 &= -11 \end{aligned}$$



الف) $x^2 - 16x + 3 = 0$ ب) $t^2 = -8t + 1$

مثال ۱: معادله‌ی روبه‌رو را به روش مربع کامل حل کنید.
حل: جملات شامل مجهول (x) را در یک طرف معادله

قرار می‌دهیم.

– مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{-6}{2})^2 = 9$ را به دو طرف

معادله اضافه می‌کنیم، یعنی:

چون سمت راست معادله مثبت است می‌توان از دو طرف

جذر گرفت و نوشت:

مثال ۲: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

حل: به دو طرف معادله مربع نصف ضریب x یعنی

$$= 25 = (\frac{10}{2})^2 \text{ را اضافه می‌کنیم:}$$

چون سمت راست معادله مثبت است می‌توان از دو طرف

معادله جذر گرفت و نوشت:

تمرین

۱- ریشه‌های معادله‌ی زیر را با تکمیل جاهای خالی حل

کنید.

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x = \square$$

$$x^2 + x + \bigcirc = 1 + \bigcirc \Rightarrow (x + \square)^2 = \triangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \square = \sqrt{\triangle} & \textcircled{1} \\ x + \square = -\sqrt{\triangle} & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x = \sqrt{\triangle} - \square$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow x = -\sqrt{\triangle} - \square$$

بنابراین ریشه‌های معادله عبارتند از: $x_1 =$ و $x_2 =$

۲- ریشه‌های معادله‌های روبه‌رو را بیابید (به روش مربع کامل).

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

دستور کلی حل معادله‌ی درجه دوم (روش .)

در این قسمت به چگونگی حل معادله‌ی درجه دوم به روش مربع کامل می‌پردازیم.

$$ax^2 + bx = -c$$

– ابتدا عدد ثابت (c) را به طرف دیگر می‌بریم :

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

– چون $a \neq 0$ دو طرف تساوی را بر a تقسیم می‌کنیم :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

– سپس مربع نصف ضریب x یعنی $\frac{b^2}{4a^2}$ را

به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم ؛ داریم :

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

– طرف اول را به صورت مربع کامل می‌نویسیم و در طرف

دوم مخرج مشترک می‌گیریم، پس :

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

– با فرض این که $b^2 - 4ac > 0$ از طرفین جذر می‌گیریم،

خواهیم داشت :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

– مقادیر x_1 و x_2 برابر خواهند بود با :

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

– عبارت $b^2 - 4ac$ را مبین معادله‌ی درجه دوم می‌گویند

و با علامت یونانی دلتا (Δ) نشان می‌دهند، بنابراین در حالت کلی

داریم :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

داریم :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

نکته: اگر $\Delta = 0$ باشد معادله ریشه‌ی مضاعف دارد که برابر است با :

و اگر $\Delta < 0$ باشد معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال: ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم روبه‌رو را با استفاده

از فرمول به دست آورید.

$$6x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$a = 6, b = 5, c = -1$$

حل: مقدار a و b و c را تعیین می‌کنیم :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(6)(-1) = 25 + 24 = 49$$

– را محاسبه می‌کنیم :

– مقدار x_1 و x_2 را با استفاده از رابطه‌ی روبه‌رو پیدا می‌کنیم:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{-5 + 7}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{-5 - 7}{12} \Rightarrow x_2 = -1$$

– ریشه‌های معادله‌ی x_1 و x_2 ، به‌دست می‌آید.

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{\lambda}x + 1 = 0$ را با استفاده از . به‌دست آورید.

حل: مقادیر a ، b و c را تعیین می‌کنیم.

$$a = 2, b = \sqrt{\lambda}, c = +1$$

– مبین معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{\lambda})^2 - 4(2)(+1) = \lambda - 8 = 0$$

چون $\Delta = 0$. است معادله، ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-\sqrt{\lambda}}{2 \times 2} = \frac{-\sqrt{4 \times 2}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ریشه مضاعف}$$

مثال: ریشه‌های معادله‌ی روبه‌رو را با استفاده از . به‌دست آورید.

حل: مقادیر a ، b و c را تعیین می‌کنیم:

$$a = -5, b = 3, c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-5)(-4) = 9 - 80 = -71$$

– مقدار . را حساب می‌کنیم.

چون $\Delta < 0$. است پس معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

نتیجه: در معادله‌ی درجه دوم همواره برای . سه حالت زیر را داریم:

حالت ۱: $\Delta > 0$. در این حالت معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد که آن‌ها را از رابطه‌ی مقابل پیدا می‌کنیم:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حالت ۲: $\Delta = 0$. معادله ریشه‌ی مضاعف دارد که آن را از فرمول مقابل به‌دست می‌آوریم:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

حالت ۳: $\Delta < 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.
 مثال: مقدار m را در معادله‌ی روبه‌رو چنان بیابید که
 معادله ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$mx^2 + 5x + 4 = 0$$

حل: مبین معادله را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \text{شرط ریشه‌ی مضاعف}$$

با حل معادله‌ی درجه اول m را به دست می‌آوریم.

$$25 - 4(m)(4) = 0 \Rightarrow 25 - 16m = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{25}{16}$$

تمرین

۱- معادله‌های زیر را به روش (۰) حل کنید.

۱) $x^2 - 3x = -1$

۲) $-x^2 + 3x + 2 = 0$

۳) $8x^2 + 4\sqrt{2}x + 1 = 0$

۴) $-6x^2 + 5x - 4 = 0$

۲- حدود m را در معادله‌ی زیر چنان بیابید که:

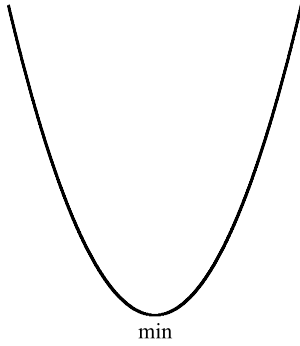
$$7x^2 + 5x + m = 0$$

الف: دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

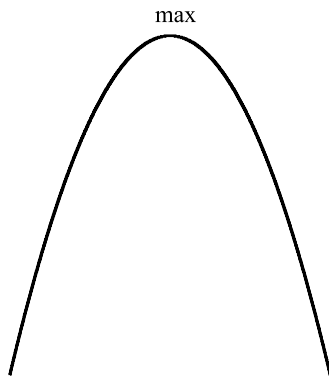
ب: ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

تعبیر هندسی حل معادله‌ی درجه دوم

از سال اول به یاد داریم که منحنی هر معادله که پس از ساده کردن به صورت $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) تبدیل شود، سهمی یا منحنی درجه دوم نامیده می‌شود. حال باید دانست که: هرگاه $a > 0$ باشد، نمودار سهمی به صورت شکل ۱-۹ و هرگاه $a < 0$ باشد نمودار سهمی به صورت شکل ۱-۱۰ می‌باشد. خط $x = \frac{-b}{2a}$ را محور تقارن سهمی و نقطه‌ی x را طول نقطه‌ی ماکسیم یا مینیمم می‌نامند.



شکل ۱-۹



شکل ۱-۱۰

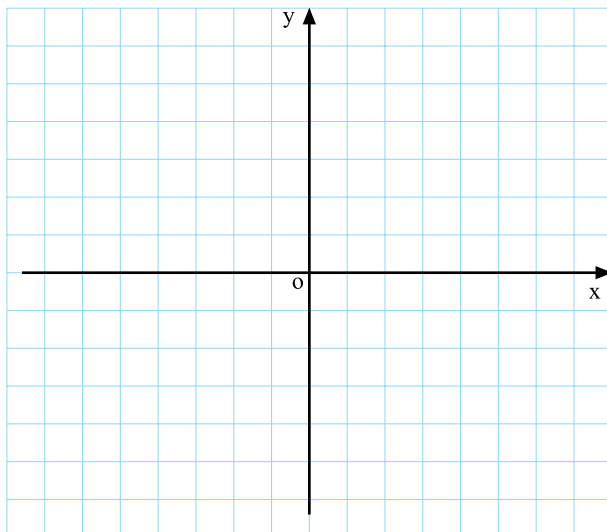
فعالیت ۱-۴

سهمی به معادله‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$y = -x^2 + 3x + 4$$

جدول ۱-۴

x	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۲	<input type="text"/>	۴
y	<input type="text"/>	۶	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۴	<input type="text"/>



الف: آیا سهمی ماکسیمم دارد یا مینیمم؟ چرا؟

ب: طول نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم را به دست آورید.

ج: سهمی را با تکمیل جدول ۱-۴ رسم کنید.

د: با توجه به نمودار سهمی، ریشه‌های معادله‌ی

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

را به دست آورید.

نمودار ۱-۱۱

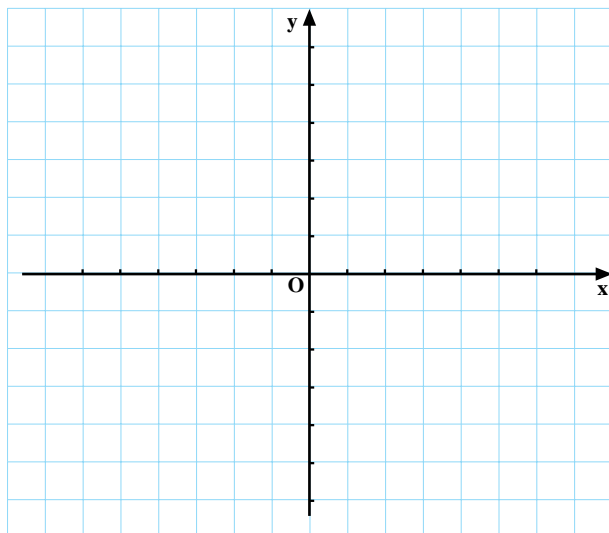
فعالیت ۱-۵

یک سهمی به معادله‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$y = x^2 - 6x + 5$$

جدول ۱-۵

x	۰	۲	۳	۴	۵
y					



شکل ۱-۱۲

- الف: آیا سهمی ماکسیمم دارد یا مینیمم؟ چرا؟
 ب: طول نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم سهمی را پیدا کنید.
 ج: با تکمیل جدول ۱-۵ سهمی را رسم کنید.
 د: محل برخورد سهمی با محور xها را بیابید. چه نتیجه‌ای

می‌گیرید؟

کاربرد معادله‌ی درجه دوم در حل مسائل

مثال ۱: عدد صحیحی بیابید که مربع آن پنج برابر خودش باشد.

حل ۱:

– عدد را x فرض می‌کنیم، داریم:

$$x^2 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = x(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

– از x فاکتور می‌گیریم:

– هر یک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

مثال ۲: عددی طبیعی بیابید که حاصل جمع آن با مربعش

برابر ۶ باشد.

حل: عدد را x فرض می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$x + x^2 = 6$$

– با توجه به اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0$$

– هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{یا} \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

– با توجه به این که $-3 \leq N$ ، این جواب قابل قبول نیست و تنها جواب ۲ قابل قبول است.

مثال ۳: عددی بیابید که مجموع مجذور و مکعب آن مساوی ۴ برابر عدد بعد از خودش باشد.

حل: عدد را x ، مربع آن را x^2 و مکعبش را x^3 می‌نامیم.

– بنابر صورت مسئله چنین خواهد بود :

$$x^2 + x^3 = 4(x+1) \Rightarrow x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$$

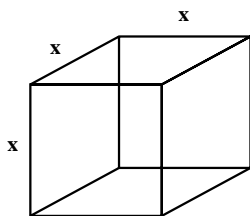
$$\Rightarrow (x+1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x+2) = 0$$

– از $x+1$ فاکتور می‌گیریم :

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

– هر عامل را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های معادله

را مشخص می‌کنیم.



شکل ۱۳-۱

مثال ۴: طول ضلع مکعبی را بیابید که عدد مربوط به

حجم آن ۹ برابر عدد مربوط به محیط یک وجه آن باشد.

مراحل حل: طول یک ضلع را x می‌نامیم. محیط یک

وجه آن برابر $4x$ و حجم مکعب x^3 می‌باشد.

$$x^3 = 9(4x) \Rightarrow x^3 = 36x$$

طبق صورت مسئله داریم :

$$x^3 - 36x = 0$$

– کلیه‌ی جملات را به یک طرف انتقال می‌دهیم :

– از x فاکتور گرفته و همه‌ی عوامل را برابر صفر قرار

می‌دهیم :

$$x(x^2 - 36) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6 \end{cases}$$

با فرض مثبت بودن طول ضلع ابعاد مکعب، جواب منفی

قابل قبول نیست؛ بنابراین داریم :

$$x = 6, \quad x = \cancel{0}, \quad x = \cancel{-6}$$

تنها جواب ۶ قابل قبول است.

تمرین

۱- مجموع ۵ عدد صحیح متوالی برابر ۸۵ است، این اعداد را مشخص کنید.

۲- مجموع مربع یک عدد با خودش برابر ۱۲ است، این عدد را بیابید.

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)

$$kx^2 + 5x - 4 = 0$$

۱- نمودارهای زیر را رسم کنید :

۱) $3x + 5y = -15$

۲) $y = 2x^2 - 5x + 4$

۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{3x+1}{2} - \frac{5x-3}{4} = 1$

۲) $2x^2 + 7x + 4 = 0$

۳) $(-3x+1)^2 - 4(-3x+1) = 0$

۳- مجموع پنج عدد صحیح متوالی برابر ۴۵ است آن اعداد را بیابید.

۴- حدود k را در معادله‌ی روبه‌رو چنان بیابید که همواره دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

بخش اول

فصل دوم

تعیین علامت، حل نامعادله و قدرمطلق

هدف کلی

یادآوری مطالب مربوط به تعیین علامت، حل نامعادله و قدرمطلق و خواص آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- عبارت‌های درجه اول و درجه دوم را تعیین علامت کند؛
- ۲- نامعادله‌های مختلف را حل کند و حدود جواب هر یک را مشخص سازد؛
- ۳- قدرمطلق را تعریف کند و از خواص قدرمطلق برای حل نامعادلات قدرمطلق استفاده کند.

پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۲)

۱- عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید :

۱) $P = -2x + 3$

۲) $P = \frac{2x-1}{5-3x}$

۳) $P = -2x^2 + 5x$

۲- نامعادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $x^2 > x$

۲) $\frac{1}{x} + 3 > 0$

۳) $|\frac{1}{5}x + 3| < 7$

۴) $|-2x + 3| > 4$

۱-۲-۱ تعیین علامت

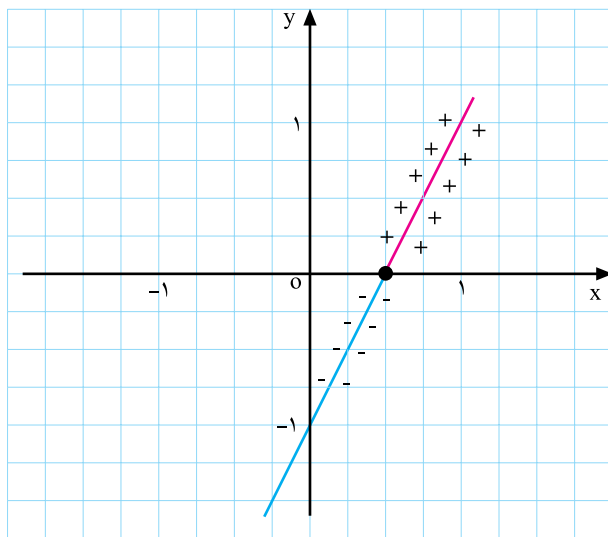
منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که تعیین کنیم آن عبارت به ازای چه اعدادی منفی، مثبت و یا صفر می‌باشد.

$$P = ax + b, a \neq 0$$

$$y = 2x + 1$$

جدول ۱-۶

x	°	$\frac{1}{2}$
y	-1	°



نمودار ۱-۱۴

جدول ۱-۷

x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$2x - 1$	مخالف علامت ضرب x	°	موافق با علامت ضرب x

۱-۲-۱-۱ تعیین علامت دو جمله‌ای درجه اول
مثال ۱: معادله‌ی خط روبه‌رو مفروض است:

با توجه به جدول ۱-۶ نمودار ۱-۱۴ رسم شده است. خط محور xها را در نقطه‌ای با $x = \frac{1}{2}$ قطع نموده است. بنابراین به ازای $x = \frac{1}{2}$ عبارت $2x - 1$ صفر می‌باشد، یعنی $x = \frac{1}{2}$ جواب معادله‌ی $2x - 1 = 0$ است. با توجه به نمودار ۱-۱۴ می‌بینیم که به ازای اعداد بزرگ‌تر از $\frac{1}{2}$ ($x > \frac{1}{2}$) نمودار خط بالای محور xها است بنابراین علامت دو جمله‌ای مثبت می‌باشد؛ و به ازای اعداد کمتر از $\frac{1}{2}$ ($x < \frac{1}{2}$) نمودار خط، زیر محور xها واقع است، بنابراین دو جمله‌ای منفی می‌شود. نتایج به دست آمده را می‌توان در جدول ۱-۷ خلاصه کرد.

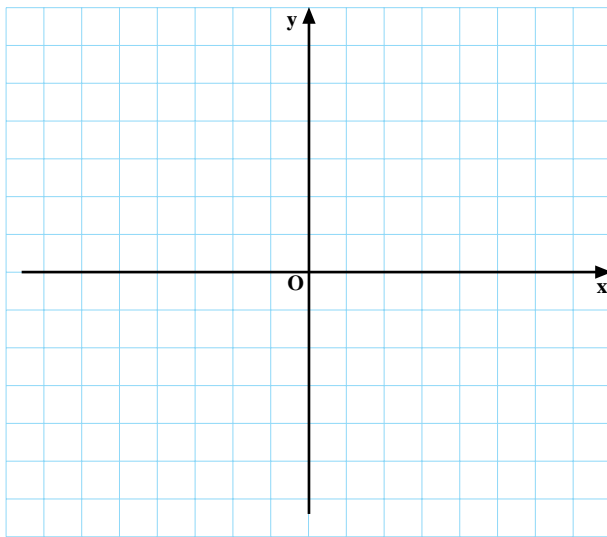
فعالیت ۱-۶

$$y = -\frac{1}{3}x + 3$$

جدول ۱-۸

x	°	<input type="checkbox"/>
y	<input type="checkbox"/>	°

نمودار خطی به معادله‌ی روبه‌رو را با تکمیل جدول ۱-۸ رسم کنید، سپس به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:
الف: در چه نقطه‌ای دو جمله‌ای صفر است؟ ج:
ب: به ازای اعداد بیش‌تر از ۶ نمودار خط زیر محور xها



واقع شده است علامت دو جمله‌ای در این بازه چگونه می‌باشد؟ ج:

ج: به ازای اعداد کمتر از ۶ نمودار خط بالای محور xها قرار گرفته است، در این بازه علامت دو جمله‌ای را تعیین کنید. ج:

نمودار ۱-۱۵

جدول ۱-۹

x	$x < 6$	6	$x > 6$
y	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

د: با توجه به قسمت‌های بالا جدول ۱-۹ را تکمیل کنید.

$$\begin{cases} ax + b = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

جدول ۱-۱۰

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$P = ax + b$	مخالف علامت a	<input type="checkbox"/>	موافق علامت a

نتیجه: هر عبارت که پس از ساده کردن به صورت $a \neq 0$ ، $P = ax + b$ باشد یک دو جمله‌ای درجه اول نامیده می‌شود. برای تعیین علامت دو جمله‌ای درجه اول، ریشه‌ی آن $(x = -\frac{b}{a})$ را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از جدول ۱-۱۰ تعیین علامت می‌کنیم.

$$P = 7 - 3x$$

$$P = 0 \Rightarrow 7 - 3x = 0 \Rightarrow -3x = -7$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

مثال ۱: عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم:

– ریشه‌ی معادله برابر است با:

با توجه به جدول ۱-۱۱ به ازای $x > \frac{7}{3}$ علامت

دو جمله‌ای منفی و به ازای $x < \frac{7}{3}$ علامت آن مثبت و به ازای $x = \frac{7}{3}$ مقدار دو جمله‌ای صفر می‌باشد.

جدول ۱-۱۱

x	$x < \frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$	$x > \frac{7}{3}$
$P = 7 - 3x$	+	<input type="checkbox"/>	-

$$P = \frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$$

$$x-a=0 \Rightarrow x=a$$

$$x-b=0 \Rightarrow x=b$$

$$x-c=0 \Rightarrow x=c$$

(با فرض $a < b < c$)

جدول ۱۲-۱

x	a	b	c
x-a	-	+	+
x-b	-	-	+
x-c	-	-	-
P	-	+	+

تعریف نشده

نکته: هرگاه عبارت جبری به صورت حاصل ضرب یا تقسیم چند دوجمله‌ای درجه اول باشد (مثال: عبارت P) برای تعیین علامت مراحل زیر را انجام می‌دهیم.
۱- هر یک از عامل‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشه‌ی آن را پیدا می‌کنیم:

و

۲- جدولی رسم می‌کنیم و در سطر اول آن ریشه‌های به‌دست آمده را به ترتیب صعودی از چپ به راست می‌نویسیم و در سطرهای دیگر به ترتیب عبارت مربوط به هر ریشه را که به ازای ریشه صفر می‌شود می‌نویسیم و تعیین علامت می‌کنیم.
۳- علامت‌های واقع در هر ستون عمودی را در هم ضرب می‌کنیم و نتیجه را در سطر آخر به دست می‌آوریم. علامت‌های به‌دست آمده در سطر آخر علامت عبارت (P) را مشخص می‌کند.

نکته: باید توجه داشت که عبارات جبری به‌ازای هر یک از جواب‌های صورت، صفر و به‌ازای هر یک از ریشه‌های مخرج تعریف نشده (نامعین) است.

$$P = \frac{x(2x-1)}{3-2x}$$

$$P=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$3-2x=0 \Rightarrow -2x=-3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

مثال ۲: عبارت روبه‌رو را تعیین علامت کنید.

مراحل حل: ریشه‌های صورت و مخرج را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{3}{2} \text{ ریشه‌ی مخرج است، لذا به‌ازای آن عبارت (P)}$$

تعریف نشده است.

جدول ۱۳-۱

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x	-	+	+
2x-1	-	-	+
3-2x	+	+	-
P	+	-	-

تعریف نشده

ریشه‌ها را به ترتیب صعودی در سطر اول جدول ۱۳-۱

می‌نویسیم.

هر یک از عبارات را به ترتیب ریشه‌های مربوط در سطر

بعدی می‌نویسیم.

عبارات را تعیین علامت می‌کنیم.

از ضرب علامت‌های ستون عمودی علامت عبارت P

را در فواصل ریشه‌ها به دست می‌آوریم.

۲-۲-۱- تعیین علامت سه جمله ای درجه دوم

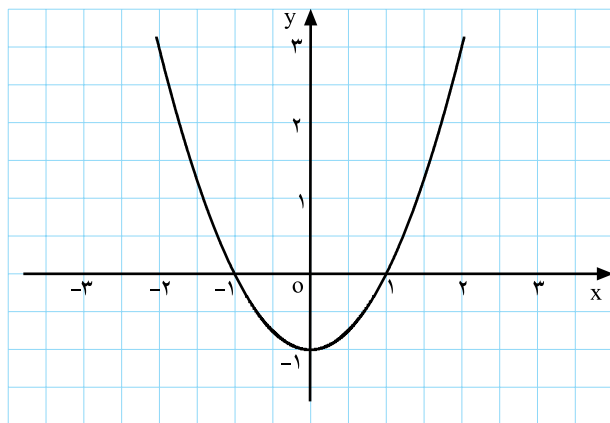
$$P = ax^2 + bx + c \text{ و } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

مثال ۱: یک سهمی با ضابطه مقابل رسم کنید.

$$y = x^2 - 1$$

جدول ۱-۱۴

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۳	۰	-۱	۰	۳



نمودار ۱-۱۶

مراحل حل: طول نقطه ی رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است.

با توجه به نمودار ۱-۱۶ مشاهده می کنیم که اگر $x > 1$ یا $x < -1$ باشد نمودار سهمی بالای محور xها واقع می باشد. بنابراین سه جمله ای درجه دوم مثبت (موافق با علامت ضریب x^2) و اگر $-1 < x < 1$ باشد نمودار زیر محور xها قرار دارد؛ بنابراین سه جمله ای درجه دوم منفی است.

جدول ۱-۱۵

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$x^2 - 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

تمرین

با توجه به مثال ۱ و نمودار $y = x^2 - 1$ جدول ۱-۱۵ را

کامل کنید.

فعالیت ۱-۷

نمودار سهمی روبه رو را با تکمیل جدول ۱-۱۶ رسم

کنید.

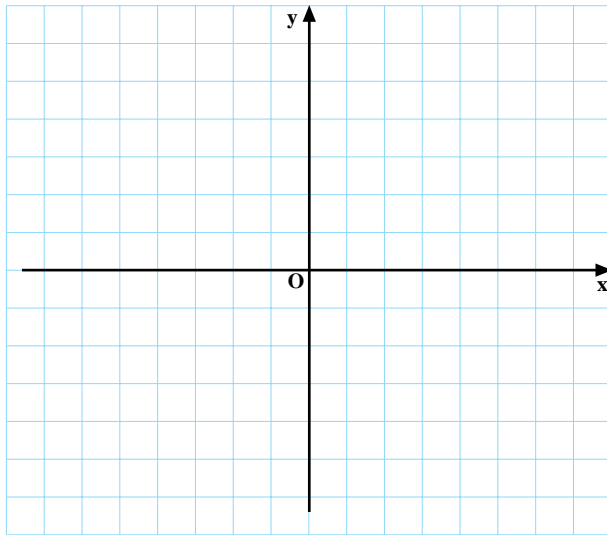
$$y = -(x+1)^2 + 1$$

جدول ۱-۱۶

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱
y	-۳	<input type="checkbox"/>	۱	۰	<input type="checkbox"/>

۱- به ازای $x > 0$ یا $x < -2$ سهمی زیر محور xها قرار

گرفته است، علامت سه جمله ای چیست؟ ج:



نمودار ۱-۱۷

جدول ۱-۱۷

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	0	$x > 0$
y	□	○	○	○	□

جدول ۱-۱۸

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	○	مخالف علامت a	○	موافق با علامت a

۲- در بازه‌ی $-2 < x < 0$ علامت سه جمله‌ای چگونه است؟ ج: □
 ۳- با توجه به نمودار ۱-۱۷، جدول ۱-۱۷ را کامل کنید.

نکته: با نتیجه‌گیری از مثال و فعالیت ۱-۷ می‌توان گفت هرگاه سه جمله‌ای درجه دوم دارای دو ریشه‌ی x_1 و x_2 ($x_1 < x_2$) باشد، مطابق جدول ۱-۱۸ تعیین علامت می‌شود.

$$P = 7x^2 - 5x - 2$$

مثال ۲: سه جمله‌ای مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P = 0 \Rightarrow 7x^2 - 5x - 2 = 0$$

حل:

- عبارت P را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{7}$$

- جمع ضرایب صفر است ($a + b + c = 0$)، پس:

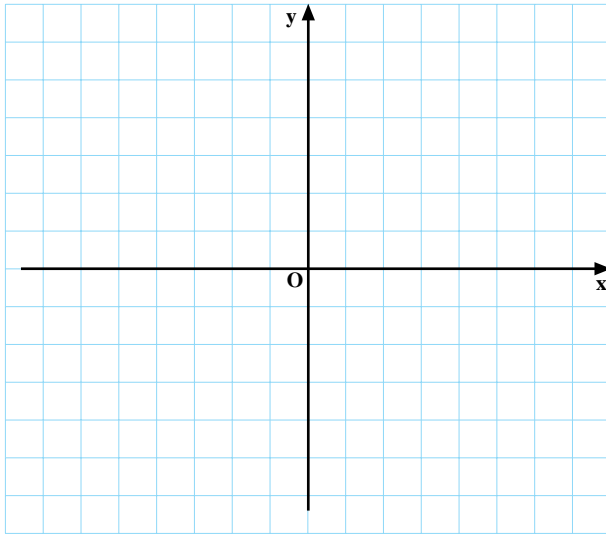
جدول ۱-۱۹

x	$x < -\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7} < x < 1$	1	$x > 1$
P	+	○	-	○	+

چون ضریب x^2 ($a = 7$) مثبت است دو طرف ریشه‌ها مثبت و مابین دو ریشه منفی است.

جدول ۲۰-۱

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	<input type="checkbox"/>	۱	۰	<input type="checkbox"/>	۴



نمودار ۱۸-۱

جدول ۲۱-۱

x	$x < 1$	۱	$x > 1$
P	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

جدول ۲۲-۱

x	$-\infty$	$x < x_1$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$x > x_2$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a		موافق علامت a	موافق علامت a

$$P = -4 + 4x - x^2$$

$$P = 0 \Rightarrow -4 + 4x - x^2 = 0$$

$$= . \quad b^2 - 4ac = 4^2 - 4(-1)(-4) = 16 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow . = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

الف) با تکمیل جدول ۲۰-۱ نمودار سهمی $y = x^2 - 2x + 1$ را رسم کنید.

ب) x نقطه‌ی رأس، $\frac{-b}{2a}$ ، برابر چه عددی است؟
ج) علامت نمودار در تمام دامنه به جز $x = 1$ چیست؟
چرا؟

د) با توجه به شکل ۱۸-۱ علامت جدول ۲۱-۱ را مشخص کنید.

نتیجه: هرگاه سه جمله‌ای درجه دوم دارای ریشه‌ی مضاعف (دو ریشه‌ی یکسان) باشد. همواره علامت سه جمله‌ای موافق ضریب x^2 یعنی علامت a می‌باشد.

مثال ۳: عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت P را برابر صفر قرار می‌دهیم:

- . را پیدا می‌کنیم:

- معادله ریشه‌ی مضاعف دارد (زیرا $= 0$).

- ریشه‌ی معادله برابر است با:

جدول ۱-۲۳

x	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
	-	○	-
	$-4 + 4x - x^2$		

چون ضریب x^2 منفی است علامت سه جمله‌ای همواره منفی می‌شود، مگر در $x = 2$ که برابر صفر است.

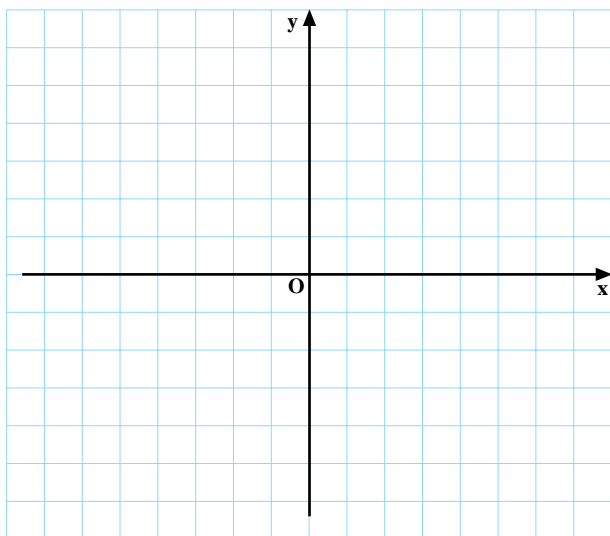
فعالیت ۱-۹

الف: نمودار سهمی $y = x^2 + 2$ را با تکمیل جدول ۱-۲۴ رسم کنید.

ب: از این که نمودار سهمی بالای محور x ها قرار می‌گیرد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

جدول ۱-۲۴

x	-2	-1	0	1	2
y	6	□	2	3	□



نمودار ۱-۱۹

جدول ۱-۲۵

x	به‌ازای هر مقدار x
$x^2 + 2$	

ج: با توجه به نمودار ۱-۱۹ علامت جدول ۱-۲۵ را تعیین کنید.

نتیجه: هرگاه در سه جمله‌ای درجه دوم < 0 ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد و علامت معادله همواره موافق علامت a خواهد بود.

جدول ۱-۲۶

x	به‌ازای هر مقدار x
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت ضریب x^2

$$P = -7x^2 + x - 1$$

مثال ۴: معادله‌ی مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P = 0 \Rightarrow -7x^2 + x - 1 = 0$$

حل: عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

– مقادیر a ، b و c را مشخص می‌کنیم: $a = -7$ ، $b = 1$ و $c = -1$

– . یا مبین معادله را به دست می‌آوریم: $= b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-7)(-1) = 1 - 28 = -27$

چون $\Delta < 0$. است پس علامت چندجمله‌ای موافق a است.

جدول ۱-۲۷

x	به‌ازای هر مقدار x
$-7x^2 + x - 1$	- - -

خلاصه‌ی بحث

$$ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

در تعیین علامت عبارت درجه‌ی دوم

الف: اگر معادله دارای دو ریشه باشد طبق جدول ۱-۲۸ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۱-۲۸

$$>> \begin{array}{c|ccc} x & & x_1 & x_2 \\ \hline P & \text{موافق علامت } a & \circ & \text{مخالف علامت } a & \circ & \text{موافق علامت } a \end{array}$$

ب: اگر معادله دو جواب یکسان (ریشه مضاعف) داشته باشد مطابق جدول ۱-۲۹ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۱-۲۹

$$== \begin{array}{c|c} x & x_1 = x_2 \\ \hline P & \text{موافق علامت } a & \circ & \text{موافق علامت } a \end{array}$$

پ: اگر معادله ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد طبق جدول ۱-۳۰ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۱-۳۰

$$<< \begin{array}{c|c} x & \text{به‌ازای هر مقدار } x \\ \hline P & \text{موافق علامت } a \end{array}$$

تمرین

عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) P = -۶x^۲ - x + ۱$$

$$۲) P = \frac{۴ - x^۲}{x - ۱}$$

$$۳) P = -(x + ۲)^۲ + ۱$$

$$۴) P = \frac{x^۲ - ۵x + ۶}{x - x^۲}$$

$$۵) P = (-۳x + ۴)^۲(-۴x^۲ + ۷x)$$