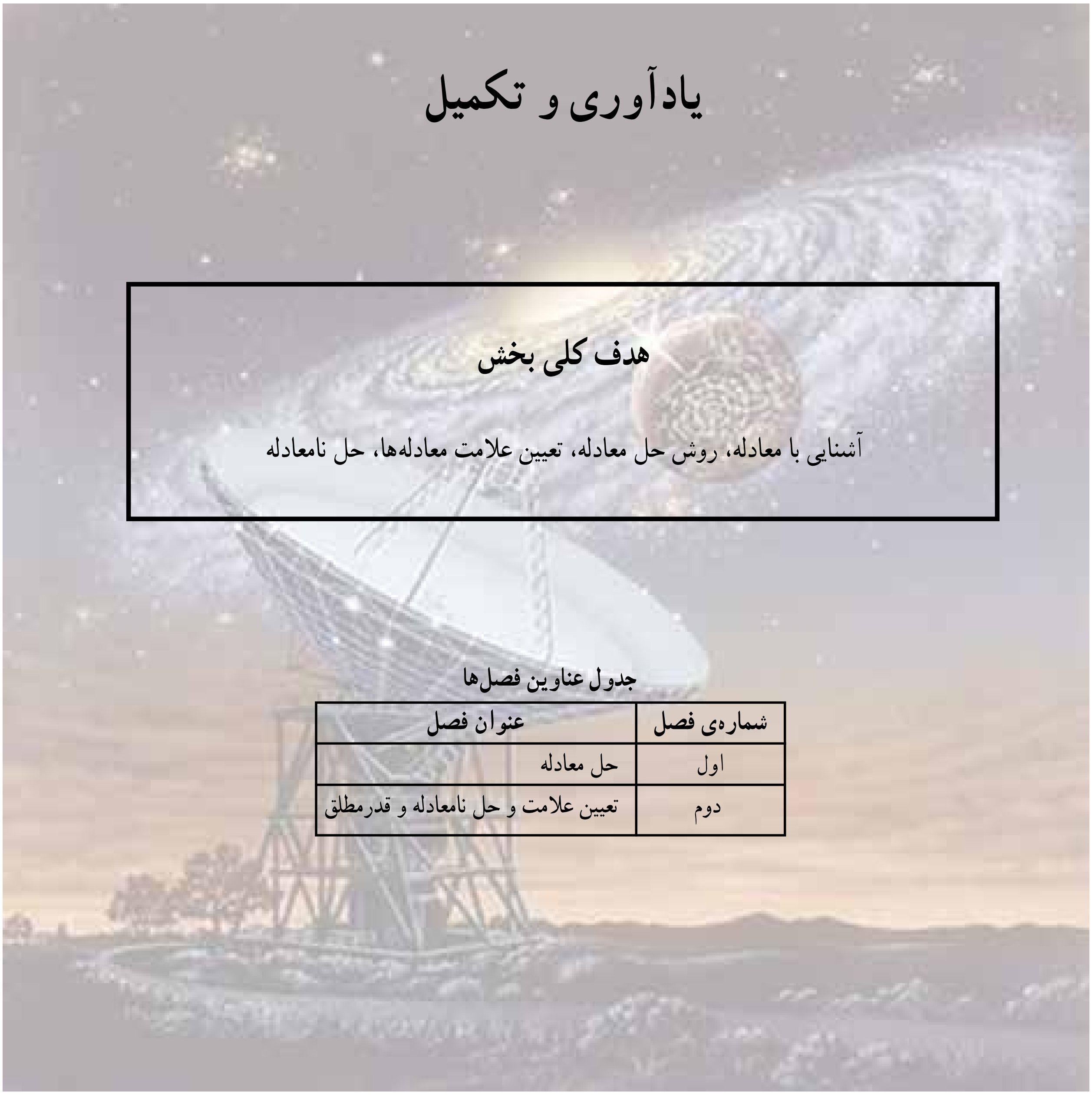
هدف کلی کتاب

تشریح مفاهیم تابع، حد، پیوستگی، مشتق و کاربردهای آن به‌منظور
۱ـ توانایی‌بخشیدن به هنرجویان در مدل‌سازی پدیده‌های ساده به زبان ریاضی ؛
۲ـ بررسی روش‌های پاسخ‌گویی به سؤال‌ها و مسائل مربوط.

جدول عناوین بخش‌ها

شماره‌ی بخش	عنوان بخش
بخش اول	یادآوری و تکمیل
بخش دوم	تابع و مفاهیم آن
بخش سوم	حدّ و پیوستگی
بخش چهارم	مشتق و کاربردهای آن

بخش اول



یادآوری و تکمیل

هدف کلی بخش

آشنایی با معادله، روش حل معادله، تعیین علامت معادله‌ها، حل نامعادله

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	حل معادله
دوم	تعیین علامت و حل نامعادله و قدرمطلق

بخش اول

فصل اول

حل معادله

هدف کلی

بیان مفاهیم مربوط به معادله و روش‌های حل آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ معادله و متغیر آن را تعریف کند ؛

۲ــ درجه‌ی معادله را تشخیص دهد ؛

۳ــ معادله‌های هم‌ارز را تعریف کند ؛

۴ــ معادلات درجه اول و دوم را حل کند.

پیش آزمون (۱)

۱ــ اگر $A - . . ۱,۲,۵$ دامنه‌ی متغیر x باشد مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x^{۲} - ۵x . ۰$ را بیابید.

۲ــ در خط D به معادله‌ی $y . ۳x . ۵$ ،

الف) کدام یک از دو نقطه‌ی (۰,۵) و (۱,۲−) روی خط D قرار دارد؟

ب) خط D را رسم کنید.

۳ــ درجه‌ی معادله‌های زیر را تعیین کنید :

الف) $۷x . x^{۳} - ۲x^{۲} . ۲x^{۲} . ۵$

ب) $x^{۵} . ۴x . ۰$

۴ــ معادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $-۵x . ۴ . ۰$

ب) $x^{۲} - ۵x . ۴ . ۰$

۵ــ نمودار تابع روبه‌رو را رسم کنید.

$f(x) . ۳x^{۲} - ۴x . ۱$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)

۱ــ۱ــ حل معادله

بسیاری از مسایل روزمره را می‌توان به کمک زبان ریاضی به‌صورت ساده بیان کرد. یکی از ابزارهای این زبان معادله است. در این بخش به بیان بعضی مفاهیم اوّلیه پیرامون معادله و روش‌های حل برخی مسایل به کمک معادله می‌پردازیم.

۱ــ۱ــ۱ــ متغیر: هر نماد یا حرف که جانشین اعضای مجموعه‌ی مشخصی می‌گردد متغیر نامیده می‌شود.

دامنه‌ی متغیر: اعضای مجموعه‌ی مشخص فوق را دامنه‌ی متغیر می‌نامند.

هرگاه در یک عبارت چند جمله‌ای دامنه‌ی متغیر بیان نشده باشد، مجموعه‌ی اعداد حقیقی دامنه‌ی آن خواهد بود (جدول ۱ــ۱).

جدول ۱ــ۱

عبارت	متغیر	دامنه‌ی متغیر
$۵x$	x	$\mathbb{R}$
$۲n-۱$	n	$\mathbb{R}$
$۳x^{۲} . ۶y$	x و y	$\mathbb{R}$
$۲k$	k	$\mathbb{R}$

۲ــ۱ــ۱ــ معادله: اگر هر تساوی، شامل یک یا چند متغیر، به‌ازای بعضی از مقادیر که جانشین متغیر شوند، درست و به‌ازای بقیه‌ی مقادیر نادرست باشد آن تساوی را معادله می‌گویند. مجموعه‌ی مقادیری از دامنه‌ی متغیر که معادله را به یک تساوی تبدیل می‌کند مجموعه‌ی جواب‌های معادله است.

مثال ۱: الف) $۳x . ۳ . ۰$ ب) $۵z . ۲- . ۳z . ۷$

ج) $y . \frac{x}{۳} . ۷x$ د) $z^{۲} . ۵z . ۶ . ۰$

هـ) $\frac{x . ۱}{۶}-\frac{۳x . ۷}{۵} . ۱ . \frac{x}{۲}$

و) $t^{۳}-۹t . ۰$ ز) $\frac{۵k . ۱}{۴} . \frac{-۷k . ۳}{۵}$

ح) $۲x^{۲} . ۵x . ۸ . ۰$

ط) $۲\sin x-۱ . ۰$

مثال ۲: اگر $A – . . ۱,۰,۱$ ، دامنه‌ی متغیر x از معادله‌ی $x^{۲}-۲x . ۰$ باشد، مجموعه‌ی جواب های آن را بیابید.

مراحل حل:

اگر $x – . ۱$ باشد، داریم :

$$(-۱)^{۲}-۲(-۱) . ۱ . ۲ . ۳$$
$$. \quad ۳ . ۰$$

پس $x – . ۱$ جواب معادله نیست.

اگر $x . ۰$ باشد، داریم :

$$(۰)^{۲}-۲(۰) . ۰$$
$$. \quad ۰ . ۰$$

پس $x . ۰$ جواب معادله است.

اگر $x . ۱$ باشد، داریم :

$$۱^{۲}-۲(۱) . ۱-۲$$
$$- . \quad ۱ . ۰$$

پس $x . ۱$ جواب معادله نیست.

بنابراین $x . ۰$ جواب معادله است، پس مجموعه جواب $۰ .$ است.

تمرین

۱ـ اگر A . ۱,۲,۴ ، دامنه‌ی متغیرهای x، z از معادله‌های زیرباشند، مجموعه‌ی جواب آن‌ها را بیابید.

۱ـ $x^{۲} . ۵x-۶ . ۰$

۲ـ $z^{۲} . ۵z-۴$

۳ـ۱ـ۱ـ درجه‌ی معادله: پس از ساده‌کردن معادله بزرگ‌ترین توان مجهول معادله درجه‌ی آن معادله، نامیده می‌شود.

مثال ۱:

الف) $۳x . ۱ . ۰$

ب) $x . x^{۷}-۹ . ۰$

ج) $(x . ۳)^{۲}-(x-۳)^{۲} . ۰$

$\cancel{x^{۲}} . ۶x . \cancel{۹}-\cancel{x^{۲}} . ۶x-\cancel{۹} . \quad ۱۲x . ۰$

مثال الف یک معادله‌ی درجه اول است.

مثال ب یک معادله‌ی درجه هفت است.

مثال ج یک معادله‌ی درجه اول است. زیرا پس از ساده‌کردن بزرگ‌ترین توان مجهول معادله، یک است.

۴ـ۱ـ۱ـ دو معادله‌ی هم‌ارز: دو معادله‌ی چند جمله‌ای هم‌درجه را هم‌ارز گوییم در صورتی که دامنه‌ی متغیر و مجموعه جواب آن‌ها یکی باشد.

مثال ۲: دو معادله‌ی الف و ب هم‌ارزند، زیرا دامنه‌ی متغیر هردوی آن‌ها اعداد حقیقی و مجموعه‌ی جواب آن‌ها ۱- . است.

الف) $۲x - . ۲$ ب) $۵x . ۷ . ۳x . ۵$

۵ـ۱ـ۱ـ حل معادله‌ی درجه اول: منظور از حل معادله پیدا کردن مجموعه‌ی جواب‌های معادله است.

$ax . b . ۰ ، a . ۰$

مجموعه جواب $- \, . \, . \, \frac{b}{a}$

برای این کار معادله‌ای هم‌ارز با معادله‌ی اول پیدا می‌کنیم که مجموعه‌ی جواب‌های آن خیلی ساده تعیین شود. برای این کار از راه‌های زیر می‌توانیم استفاده کنیم.

الف) به دو طرف معادله یک عبارت جبری اضافه یا کم کنیم.

ب) دو طرف معادله را در عددی غیرصفر ضرب یا بر آن تقسیم کنیم.

$ax . b . ۰ ، a . ۰$

$ax . b . (-b) . ۰ . (-b)$

$. \quad ax - . b$

$. \quad \frac{ax}{a} . \frac{-b}{a}$

$. \quad x . \frac{-b}{a}$

نکته: با توجه به الف می‌توان نتیجه گرفت که :

$ax . b . ۰$

$. \quad ax - . b$

۱ـ با انتقال هر جمله از یک طرف معادله به طرف دیگر علامت آن تغییر می‌کند.

مانند $x . \cancel{۵} . \cancel{۵} . \quad x . ۰$

۲ـ از دو طرف یک معادله جملات مساوی را می‌توان حذف کرد.

مثال ۳: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$۵x . ۷ . ۳x . ۵$

مراحل حل: جملات مجهول را به یک طرف و جملات معلوم را به‌طرف دیگر معادله می‌بریم.

$$۵x - ۳x \;.\; ۵ - ۷ \;.\; (۵ - ۳)x - \;.\; ۲$$

با تقسیم دو طرف معادله بر ۲ داریم :

$$.\quad ۲x - \;.\; ۲$$

$$.\quad ۲x - \;.\; ۲ \;.\quad x - \;.\; ۱$$

مثال ۴: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{۲x \;.\; ۱}{۳} \;.\; \frac{x}{۲} \;.\; \frac{x-۱}{۵}$$

مراحل حل: مجهول‌ها را به یک طرف و معلوم‌ها را به طرف دیگر انتقال می‌دهیم.

$$\frac{۲x}{۳} \;.\; \frac{x}{۲} - \frac{x}{۵} \;.\; \frac{-۱}{۵} - \frac{۱}{۳}$$

$$(\frac{۲}{۳} \;.\; \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۵})x \;.\; \frac{-۱}{۵} - \frac{۱}{۳}$$

از دو طرف مخرج مشترک می‌گیریم

$$(\frac{۲۰}{۳۰} \;.\; \frac{۱۵}{۳۰} - \frac{۶}{۳۰})x \;.\; \frac{-۳}{۱۵} - \frac{۵}{۱۵}$$

$$.\quad \frac{۲۹}{۳۰}x \;.\; \frac{-۸}{۱۵} \;.\quad x \;.\; \frac{-\frac{۸}{۱۵}}{\frac{۲۹}{۳۰}} \;.\; \frac{-۸ \;.\; ۳۰}{۱۵ \;.\; ۲۹}$$

با تقسیم دو طرف تساوی بر $\frac{۲۹}{۳۰}$ داریم :

$$.\quad x \;.\; \frac{-۱۶}{۲۹}$$

مثال ۵: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$(x \;.\; ۳)^۲ - (x - ۵)^۲ \;.\; ۰$$

مراحل حل: به کمک اتحاد مربع، معادله را ساده می‌کنیم.

$$x^۲ \;.\; ۲(x)(۳) \;.\; ۳^۲ - (x^۲ - ۲(x)(۵) \;.\; ۵^۲) \;.\; ۰$$

$$.\quad x^۲ \;.\; ۶x \;.\; ۹ - x^۲ \;.\; ۱۰x - ۲۵ \;.\; ۰$$

$$.\quad ۱۶x - ۱۶ \;.\; ۰ .\quad ۱۶x \;.\; ۱۶ .\quad x \;.\; ۱$$

یادآوری

اتحاد مربع

$$(a \;.\; b)^۲ \;.\; a^۲ \;.\; ۲ab \;.\; b^۲$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$x^۳ \;.\; ۷x \;.\; ۴ \;.\; x^۳ \;.\; ۴x$$

مراحل حل: از دو طرف معادله جمله‌های مساوی را حذف می‌کنیم :

$$.\quad ۷x \;.\; ۴ \;.\; ۴x$$

معلوم‌ها را به یک طرف و مجهول‌ها را به طرف دیگر انتقال می‌دهیم :

$$۷x - ۴x - \;.\; ۴ .\quad ۳x - \;.\; ۴ .\quad x \;.\; \frac{-۴}{۳}$$

فعالیت ۱ــ۱

الف) معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$۱)\quad \left[\frac{-\frac{۸}{۳}}{\frac{۵}{۷}-\frac{۱}{۳}}+\frac{\frac{۴}{۹}-۲}{\frac{۷}{۶}}\right]x=\left[\frac{-\frac{۷}{۵}+\frac{۱}{۶}}{\frac{۱۱}{۵}}-\frac{\frac{۴}{۳}+۱}{\frac{۱}{۶}-\frac{۵}{۲}}\right]$$

ب) مربع‌های خالی روبه‌رو را تکمیل کنید.

$$\left[\frac{-\frac{۸}{۳}}{\frac{\square}{۲۱}}+\frac{\frac{\square}{۹}}{\frac{۷}{۶}}\right]x=\left[\frac{\frac{\square}{۳۰}}{\frac{۱۱}{۵}}+\frac{\frac{\square}{۳}}{\frac{\square}{۶}}\right]$$

ج) با جایگذاری عدد مناسب، معادله روبه‌رو را کامل کنید.

$$\Longrightarrow\left[\frac{\bigcirc}{\bigcirc}+\frac{\bigcirc}{\bigcirc}\right]x=\left[\frac{\bigcirc}{\bigcirc}+\frac{\bigcirc}{\bigcirc}\right]$$

د) با جایگذاری عدد مناسب به جای مثلث و مستطیل‌ها جواب نهایی را بیابید.

$$\Longrightarrow \triangle x=\square \Longrightarrow x=\square$$

$$۲)\quad \frac{\frac{۸}{۳}-۲+\frac{۱}{۳}}{-۴+\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۲}}x=\frac{\frac{۳}{۷}-\frac{۲}{۵}+۱}{\frac{۳}{۲}-\frac{۴}{۷}-۱}$$

مستطیل‌ها، دایره و مثلث خالی را تکمیل کنید.

$$\frac{\frac{\square}{۶}}{\frac{\square}{۴}}x=\frac{\frac{\square}{۳۵}}{\frac{\square}{۱۴}}\Longrightarrow \bigcirc x=\triangle$$

به جای مستطیل عدد مناسب بگذارید.

$$\Longrightarrow x=\square$$

نکته: برای حل معادلات کسری نخست بهتر است با ضرب‌کردن تمامی جملات در کوچک‌ترین مضرب مشترک‌تمامی مخرج‌ها، مخرج کسرها را از بین ببریم و سپس معادله را حل کنیم.

مثال ۶: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{۲x-۱}{۵}-\frac{x-۲}{۳}=\frac{x+۱}{۲}$$

حل: ابتدا دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد ۲، ۳ و ۵، یعنی عدد ۳۰ ضرب می‌کنیم.

حل

$$۳۰\left(\frac{۲x-۱}{۵}-\frac{x-۲}{۳}=\frac{x+۱}{۲}\right)$$

$$=۶(۲x-۱)-۱۰(x-۲)=۱۵(x+۱)$$

$$=(۱۲x-۶)-۱۰x+۲۰=۱۵x+۱۵$$

$$=۲x+۱۴=۱۵x+۱۵\Rightarrow ۲x-۱۵x=۱۵-۱۴$$

دو طرف تساوی را بر عدد ۱۳− تقسیم می‌کنیم، پس :

$$-.\ ۱۳x\ .\ ۱.\ \ x\ .\ \frac{-۱}{۱۳}$$

مثال ۷: معادله‌ی روبه رو را حل کنید.

$$\frac{x}{۲}-\frac{x-۱}{۳}\ .\ \frac{x\ .\ ۳}{۶}$$

با ضرب‌کردن دو طرف تساوی در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک،م،م) اعداد ۳،۲ و ۶ یعنی ۶ داریم :

$$۶(\frac{x}{۲}-\frac{x-۱}{۳})\ .\ ۶(\frac{x\ .\ ۳}{۶})\ .$$

$$۳x-۲(x-۱)\ .\ \ x\ .\ ۳.\ \ \ ۳x-۲x\ .\ ۲\ .\ \ x\ .\ ۳$$

چون تساوی روبه‌رو غیرممکن است، پس معادله‌ی اولیه نیز غیرممکن یا ممتنع می‌باشد.

$$.\ \ \ x\ .\ ۲.\ \ x\ .\ ۳.\ \ \ ۲\ .\ ۳$$

تمرین

۱ـ با تکمیل جاهای خالی معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

(راهنمایی : همواره داریم R $.\ ۰$ ، a $.\ ۱$ a°)

$$.۴^{۲}-۴(-۲)(-۳),x\ .\ \frac{۲^{\circ}\ .\ ۱^{۲}\ .\ ۰^{۲}}{۱-۲(-۳)}$$

$$\Rightarrow \square\ x\ .\ \frac{\square}{\square} \Rightarrow \bigcirc\ x\ .\ \triangle$$

$$\Rightarrow x\ .\ \square$$

۲ـ معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۲-x}{۱۱}\ .\ \frac{x\ .\ ۳}{۱۱}\ .\ ۷x\ .\ ۱$

۲) $\frac{x\ .\ ۷}{۵}\ .\ ۲-\frac{۱-x}{۳}$

۳) $\frac{۵z-۲}{۴}\ .\ \frac{-۷z\ .\ ۳}{۳}$

۴) $(۲t-۳)^{۲}-۴t^{۲}\ .\ ۸\ .\ ۱۲$

تعبیر هندسی حل معادله‌ی درجه اول

فعالیت ۲ــ۱

با تکمیل جدول ۲ــ۱ نمودار خط ۱ . ۲x . y را رسم کنید.

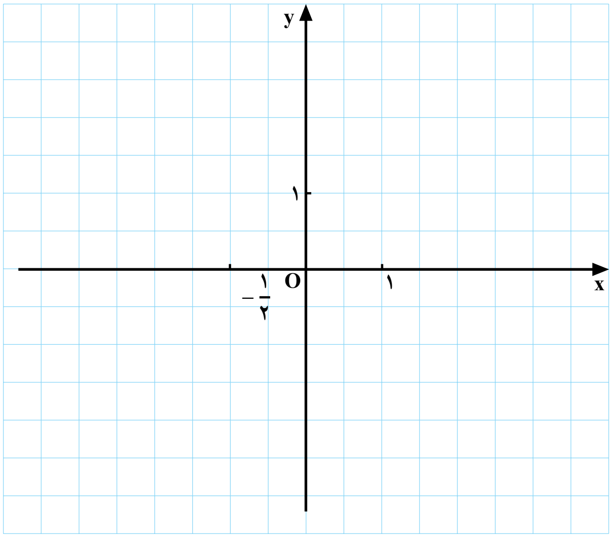
الف) برای رسم خط، حداقل چند نقطه نیاز داریم؟

ب) طول نقطه‌ی برخورد خط با محور xها چند می‌باشد؟

ج) آیا نقطه‌ی برخورد خط با محور xها، جواب معادله‌ی ۰ . ۱ . ۲x می‌باشد؟

جدول ۲ــ۱

x	۰	□
y	□	۰



نمودار ۱ــ۱

فعالیت ۳ــ۱

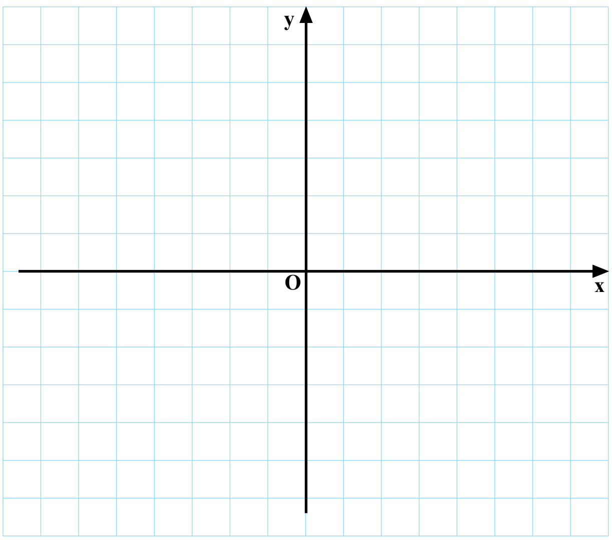
با تکمیل جدول ۳ــ۱ نمودار خط ۲ . ۳x . – y را رسم کنید.

الف) با توجه به شکل، جواب معادله‌ی ۱ . – ۲ . ۳x– را بیابید.

ب) آیا نقطه‌ی (۱,۵–) بر روی خط ۲ . ۳x . – y قرار دارد؟ چرا؟

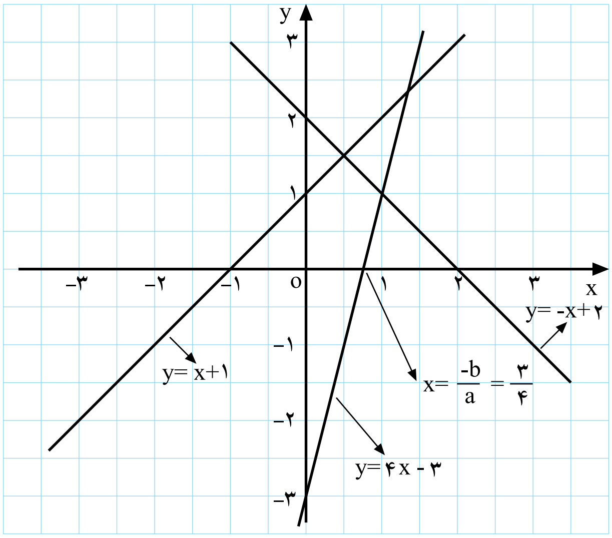
جدول ۳ــ۱

x	۰	□
y	□	۰

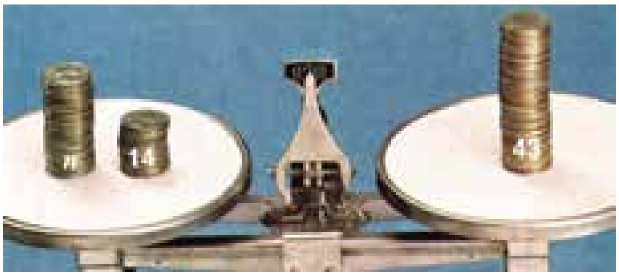


نمودار ۲ــ۱

نتیجه: هر معادله که پس از ساده‌کردن به‌صورت $a \neq 0$ ، $ax + b = 0$ تبدیل شود، معادله‌ی درجه اول نامیده می‌شود. ریشه‌ی این معادله طول محل تلاقی خط $y = ax + b$ با محور xها می باشد $(x = -\frac{b}{a})$ (شکل ۳ــ۱).



نمودار۳ــ۱



شکل ۴ــ۱

کاربرد معادله‌ی درجه اول در حل مسائل: معمولاً برای حل مسائل ابتدا یک حرف به عنوان متغیر برای مجهول مسئله در نظر می‌گیریم و سپس صورت مسئله را به شکل معادله می‌نویسیم، به نحوی که ریشه‌ی آن معادله جواب مسئله است.

مثال ۱: عددی به‌دست آورید که مربع آن از مربع عدد بعدی ۲۱ واحد کم‌تر باشد.

مراحل حل: اگر عدد مورد نظر را x بگیریم عدد بعدی $x + ۱$ خواهد بود ؛ پس مربع آن‌ها برابر است با :

$x^۲$ و $(x + ۱)^۲$

بنابراین :

$x^۲ = (x + ۱)^۲ - ۲۱ \Rightarrow \cancel{x^۲} = \cancel{x^۲} + ۲x + ۱ - ۲۱$

$\Rightarrow ۲x - ۲۰ = ۰ \Rightarrow x = ۱۰$

مثال ۲: ۴۷۰۰۰ ریال را بین سه نفر چنان تقسیم کنید که اولی ۱۰۰۰۰ ریال بیش‌تر از دومی و دومی ۸۰۰۰ ریال بیش‌تر از سومی داشته باشد.

مراحل حل: اگر پول سومی را x ریال بگیریم پول دومی $x + ۸۰۰۰$ ریال و پول اولی برابر با :

$x + ۸۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ = x + ۱۸۰۰۰$

نخست مسئله را به‌صورت معادله می‌نویسیم :

$x + ۱۸۰۰۰ + (x + ۸۰۰۰) + x = ۴۷۰۰۰$

با حل این معادله‌ی درجه‌ی اول داریم :

$۳x + ۲۶۰۰۰ = ۴۷۰۰۰ \Rightarrow$

ــ سهم نفر سوم ؛

$۳x = ۴۷۰۰۰ - ۲۶۰۰۰ = ۲۱۰۰۰ \Rightarrow x = ۷۰۰۰$

ــ سهم نفر دوم ؛ ۷۰۰۰. ۸۰۰۰. ۱۵۰۰۰

ــ سهم نفر اول ؛ ۱۵۰۰۰. ۱۰۰۰۰. ۲۵۰۰۰

مثال ۳: سن پدری **۲۴** سال است. سن او شش برابر سن فرزندش می‌باشد. چند سال دیگر سن پدر سه برابر سن فرزندش می‌شود؟

مراحل حل: سال مورد نظر را x می‌گیریم. سن پدر بعد از x سال : ۲۴. x

سن پدر **۲۴** سال

سن فرزند ۴ . $\frac{۲۴}{۶}$ سال

ــ سن فرزند بعد از x سال ۴. x

بنابر صورت مسئله داریم :

۲۴. x . ۳(۴. x). ۲۴. x . ۱۲. ۳x

. x − ۳x . ۱۲−۲۴−. ۲x − . ۱۲

. x . ۶

پس از **۶** سال سن پدر **۳** برابر سن فرزندش می‌شود (سن پدر **۳۰** سال و سن فرزند **۱۰** سال است).

مثال ۴: پدری با فرزندش قرار گذاشت که اگر در هر نوبت بیش از ۱۰۰ بار بدون توقف طناب بزند ۸۰۰۰ امتیاز پاداش بگیرد، و در غیر این صورت **۵۰۰۰** امتیاز از وی کسر شود. پس از گذراندن **۸** مرحله فرزند **۳۸۰۰۰** امتیاز دریافت کرد، مشخص کنید که در چند نوبت موفق بوده است.

ــ بیان مسئله به‌صورت معادله :

حل:

تعداد موفقیت : x

کل امتیاز به‌دست آمده : ۸۰۰۰x

امتیاز از دست‌داده : ۵۰۰۰(۸ − x)

با توجه به صورت مسئله داریم :

۳۸۰۰۰ . مجموع امتیاز از دست‌داده . مجموع امتیاز به‌دست‌آمده

۸۰۰۰x . ۵۰۰۰(۸ − x). ۳۸۰۰۰

با حل معادله،معلوم می‌شود که

. ۸۰۰۰x . ۴۰۰۰۰−۵۰۰۰x . ۳۸۰۰۰

۸۰۰۰x . ۵۰۰۰x . ۷۸۰۰۰

. ۱۳۰۰۰x . ۷۸۰۰۰. x . ۶

او **۶** بار موفق بوده و **۲** بار ناموفق.

مثال ۵: مجموع سه عدد طبیعی متوالی برابر ۲۴۳ می‌باشد آن اعداد را بیابید.

حل: اولین عدد را x، دومین عدد را ۱ . x و سومین عدد را ۲ . x فرض می‌کنیم. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با :

x . (x . ۱) . (x . ۲) . ۲۴۳ . ۳x . ۳ . ۲۴۳

ــ با حل معادله اولین عدد برابر با :

. ۳x . ۲۴۳ – ۳ . ۲۴۰ . x . ۸۰

ــ درنتیجه سه عدد برابر با :

۸۰، ۸۱، ۸۲

تمرین

۱ــ فردی برای پرداخت ۴۹ ریال، روی هم ۱۴ قطعه سکه ۵ ریالی و ۲ ریالی داده است. از هرکدام چند سکه داده است؟

۲ــ مجموع سه عدد زوج متوالی برابر ۶۰۶ است. آن اعداد را بیابید.

۳ــ طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. اگر محیط مستطیل ۴۴ متر باشد مساحت آن را حساب کنید.

راهنمایی: (طول . عرض)۲ . محیط

عرض . طول . مساحت

شکل ۵ــ۱

شکل۶ــ۱

۶ــ۱ــ۱ــ معادله‌ی درجه دوم: هرگاه پس از ساده‌کردن یک معادله، بزرگ‌ترین توان متغیر آن، عدد ۲ باشد، آن یک معادله درجه دوم است. فرم کلی معادله‌ی درجه دوم به‌صورت روبه‌رو است.

$$ax^2 + bx + c = 0 ، (a, b, c \in \mathbb{R} ,\ a \neq 0)$$

مثال ۱: کدام‌یک از عبارات زیر، معادله‌ی درجه دوم است؟

الف) $3x^2 + 7x = 0$

ب) $t^3 + 5t + 1 = 0$

ج) $(x + 2)^3 - (x - 2)^3 = 0$

حل:

الف) درجه دوم است، زیرا بزرگ‌ترین توان x، برابر دو است.

ب) درجه دوم نیست زیرا بزرگ‌ترین توان متغیر t، سه است.

ـ حاصل عبــارات $(x . ۲)^۳$ و $(x-۲)^۳$ را بـه‌دست می‌آوریم :

ـ عبارت را ساده می‌کنیم.

پس معادله‌ی ج درجه دوم است.

ج) $x^۳ . ۳(x^۲)(۲) . ۳(x)(۲)^۲ . ۲^۳$

$-(x^۳ - ۳(x)^۲(۲) . ۳(x)(۲)^۲ - ۲^۳) .$

$\cancel{x^۳} . ۶x^۲ . \cancel{۱۲x} . ۸ - \cancel{x^۳} . ۶x^۲ - \cancel{۱۲x} . ۸ . ۰$

$. \ ۱۲x^۲ . ۱۶ . ۰$

د) $(۴x . ۳)^۲ - ۴(۲x-۱)^۲ . ۰$

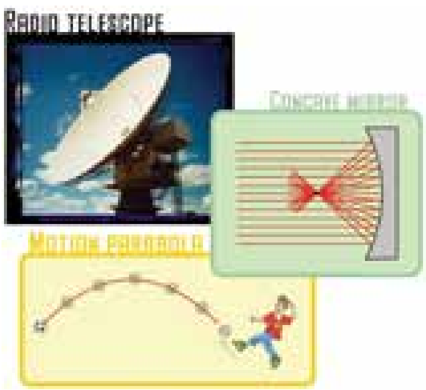
ـ عبارت را ساده می‌کنیم. پس معادله درجه‌ی اول است زیرا :

$\cancel{۱۶x^۴} . ۲۴x . ۹ - \cancel{۱۶x^۲} . ۱۶x - ۴ . ۰$

$۴۰x . ۵ . ۰$

$۴۰x - . ۵ . \quad x - . \frac{۵}{۴۰} - . \frac{۱}{۸}$

حل معادله‌ی درجه دوم: منظور از حل معادله‌ی درجه دوم پیدا کردن مجموعه جواب‌های معادله است. برای این منظور در سال‌های گذشته با روش‌هایی آشنا شده‌اید که در این جا به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.



شکل ۷ــ۱

حل معادله‌ی درجه دوم به روش تجزیه: از این روش زمانی استفاده می‌کنیم که بتوانیم معادله‌ی درجه دوم را به عامل‌های اول تجزیه کنیم و آن را به‌صورت حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای درجه اول بنویسیم،

$x^۲ . (a . b)x . ab . ۰$

$(x . a)(x . b) . ۰$

سپس با استفاده از ویژگی اعداد که :

«اگر حاصل‌ضرب دو عدد برابر صفر شود، حداقل یکی از آن‌ها مساوی صفر است»

$x . y . ۰ . \quad x . ۰$ یا $y . ۰$

هریک از دوجمله‌ای‌ها را مساوی صفر قرارداده و مانند معادله‌ی درجه اول آن را حل و ریشه‌های معادله درجه دوم را می‌یابیم.

$x . a . ۰$ یا $x . b . ۰$

$x -. a$ یا $x -. b$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$x^{۲} \,.\, ۳x \,.\, ۰$

حل: در هر دو جمله x مشترک است، بنابراین از x فاکتور می‌گیریم :

$x^{۲} \,.\, ۳x \,.\, x(x \,.\, ۳) \,.\, ۰.$

$x \,.\, ۰$

یا

$x \,.\, ۳ \,.\, ۰. \quad x - . ۳$

$-۳, ۰ . .$ مجموعه‌ی جواب

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$۴x^{۲} - (x \,.\, ۲)^{۲} \,.\, ۰$

حل: با استفاده از اتحاد مزدوج $a^{۲} - b^{۲} \,.\, (a-b)(a \,.\, b)$ داریم :

$۴x^{۲} - (x \,.\, ۲)^{۲} \,.\, \underbrace{(۲x)}_{a}{}^{۲} - \underbrace{(x \,.\, ۲)}_{b}{}^{۲}$

$. \quad (۲x - (x \,.\, ۲))(۲x \,.\, x \,.\, ۲) \,.\, ۰$

$. \quad (۲x - x - ۲)(۳x \,.\, ۲) \,.\, (x - ۲)(۳x \,.\, ۲) \,.\, ۰$

با استفاده از $x \,.\, y \,.\, ۰$ داریم $x \,.\, ۰$ یا $y \,.\, ۰$ بنابراین خواهیم داشت :

$x - ۲ \,.\, ۰. \quad x \,.\, ۲$

یا

$۳x \,.\, ۲ \,.\, ۰. \quad ۳x - . ۲. \quad x - . \frac{۲}{۳}$

مجموعه‌ی جواب برابر با :

$۲, -\frac{۲}{۳}$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$x^{۲} \,.\, ۵x \,.\, ۶ \,.\, ۰$

حل: اتحاد جمله‌ی مشترک به‌صورت روبه‌رو است :

$x^{۲} \,.\, (a \,.\, b)x \,.\, ab \,.\, (x \,.\, a)(x \,.\, b)$

پس با توجه به اتحاد جمله‌ی مشترک داریم :

$(x \,.\, ۲)(x \,.\, ۳) \,.\, ۰.$

$x \,.\, ۲ \,.\, ۰. \quad x - . ۲$

یا

$x \,.\, ۳ \,.\, ۰. \quad x - . ۳$

ــ مجموعه‌ی جواب معادله برابر است با :

$. -۲, -۳$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$y^2 - y - 30 = 0$$

حل: دو عدد ۵ و ۶– که حاصل ضربشان ۳۰– و حاصل‌جمع آن‌ها ۱– است، پس :

$$y^2 - y - 30 = (y + 5)(y - 6) = 0$$

ــ هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم :

$$\begin{cases} y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5 \\ \text{یا} \\ y - 6 = 0 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$$

مجموعه‌ی جواب‌های معادله برابر است با :

$$\{-5, 6\}$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

حل: در این قسمت جمله مشترک مربع کامل نیست، بنابراین لازم است که به‌صورت مربع کامل نوشته شود.

$$3x^2 + 5x + 2 = \frac{1}{3}(3^2x^2 + 5(3x) + 6)$$

$$= \frac{1}{3}\left((3x)^2 + 5(3x) + 6\right) = 0$$

حاصل‌ضرب دو عدد ۲ و ۳ برابر ۶ و حاصل جمع آن‌ها ۵ است ؛ پس داریم :

$$= \frac{1}{3}(3x + 2)(3x + 3) = 0$$

اکنون هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} 3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ \text{یا} \\ 3x + 3 = 0 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

ــ مجموعه‌ی جواب‌های معادله برابر است با :

$$\left\{-\frac{2}{3}, -1\right\}$$

مثال: معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$5x^2 + 3x - 2 = 0$$

حل: جمله‌ی مشترک مربع کامل نیست، لازم است که به‌صورت مربع کامل نوشته شود.

$$5x^2 + 3x - 2 = \frac{1}{5}(5^2x^2 + 3(5x) - 10)$$

$$= \frac{1}{5}\left((5x)^2 + 3(5x) - 10\right) = 0$$

حاصل‌ضرب دو عدد ۲– و ۵ برابر ۱۰– و حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۳ است، پس :

$. \quad \frac{۱}{۵}(۵x\ .\ ۵)(۵x-۲)\ .\ ۰$

حال هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$. \quad \begin{cases} ۵x\ .\ ۵\ .\ ۰.\quad ۵x-.\ ۵.\quad x-.\ ۱ \\ ۵x-۲\ .\ ۰.\quad ۵x\ .\ ۲.\quad x\ .\ \frac{۲}{۵} \end{cases}$

ـ مجموعه‌ی جواب برابر است با :

$.$ مجموعه جواب $- \left\{ . \ . \ ۱, \frac{۲}{۵} \right\}$

تمرین

۱ــ ریشه‌های معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $۵x^{۲}\ .\ ۷x\ .\ ۰$

۲) $t^{۳}-۲۵t\ .\ ۰$

۳) $۴z^{۲}-۹\ .\ ۰$

۴) $y^{۳}-۱۵y^{۲}\ .\ ۵۶y\ .\ ۰$

۲ــ با تکمیل جاهای خالی ریشه‌های معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $x^{۲}-۷x.\ ۱۲.\ ۰$

$(x-\square)(x-\bigcirc)\ .\ ۰$

$\Longrightarrow x\ .\ \square$ یا $x\ .\ \bigcirc$

۲) $y^{۲}-۱۴y\ .\ ۱۳.\ ۰$

$(y-\square)\ (y-\bigcirc)$

$\Longrightarrow y\ .\ \square$ یا $y\ .\ \bigcirc$

۳) $(۲x.\ ۱)^{۲}-(۵-x)^{۲}.\ ۰$

$(\square-\square)(\square.\ \square)\ .\ ۰$

$\Longrightarrow (۳x-\square)(x\ .\ \square)\ .\ ۰$

$\Longrightarrow x\ .\ \square$ یا $x\ .\ \triangle$

۴) $۷x^{۲}-۸x\ .\ ۱.\ ۰$

$\frac{۱}{۷}(۷^{۲}x^{۲}-۸(۷x).\ ۷).\ ۰$

$\frac{۱}{۷}(\square-\square)(\square-\square)\ .\ ۰$

$\Longrightarrow \begin{cases} \square\ .\ ۰ \Longrightarrow x\ .\ \square \\ \text{یا} \\ \square\ .\ ۰ \Longrightarrow x\ .\ \triangle \end{cases}$

۵) $۵-x^{۲}\ .\ ۰$

$(\sqrt{۵}-\square)(\bigcirc.\ \ x)\ .\ ۰$

$\Longrightarrow \begin{cases} x\ .\ \square \\ x\ .\ \bigcirc \end{cases}$

ــ با توجه به معادله‌ی درجه دوم روبه رو نکات زیر را می‌توان برای حل معادله‌های درجه دوم به‌کار گرفت : $ax^2+bx+c=0\ ,\ a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$

نکته‌ی ۱: هرگاه مجموع ضرایب معادله‌ی درجه دوم برابر صفر باشد، یعنی : $a+b+c=0$

آن‌گاه ریشه‌های معادله عبارتند از : $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}$

مثال ۱: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید. $5x^2+7x-12=0$

حل: مجموع ضرایب برابر صفر است، زیرا : $a=5$ و $b=7$ و $c=-12$ و $a+b+c=0$

ــ پس ریشه‌های معادله برابر با : $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}=\frac{-12}{5}$

نکته‌ی ۲: هرگاه در معادله‌ی درجه دوم داشته باشیم : $a+c=b$

آن‌گاه ریشه‌های معادله برابر خواهد بود با : $x_1=-1$ و $x_2=\frac{-c}{a}$

مثال ۲: ریشه‌های معادله‌ی روبه‌رو را به‌دست آورید. $5x^2+7x+2=0$

حل: با توجه به رابطه‌ی $a+c=b$، ریشه‌ها برابر است با : $a=5$ و $b=7$ و $c=2$ و $x_1=-1$ و $x_2=\frac{-2}{5}$

نکته‌ی ۳: هرگاه معادله‌ی درجه دوم به‌صورت $ax^2+bx=0$ باشد، داریم : $x_1=0$ و $x_2=\frac{-b}{a}$

مثال ۳: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید. $7x^2+5x=0$

حل: در این معادله ضریب c برابر صفر است، پس : $x_1=0$ و $x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{7}$

نکته‌ی ۴: هرگاه معادله‌ی درجه‌ی دوم به‌صورت روبه‌رو باشد : $ax^{۲} . c . ۰$
در صورتی معادله دارای جواب حقیقی خواهد بود که a و c دارای علامت‌های مختلف باشند (یعنی $ac \quad ۰$)
که در آن صورت جواب‌های معادله عبارتند از :

$$x_{۱}, x_{۲} . . \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

مثال ۴: معادله‌های الف و ب را حل کنید.

الف) $۷x^{۲} - ۲ . ۰$

حل: (الف) چون $ac \quad ۰$ ، پس ریشه‌های معادله برابر است با :

$$x_{۱} \text{ و } x_{۲} . . \sqrt{\frac{۲}{۷}}$$

ب) $۵x^{۲} . ۴ . ۰$

(ب) چون $ac ! ۰$ پس معادله جواب حقیقی ندارد. $a . ۵$ و $c . ۴$ و $۵ . ۴ ! ۰$

تمرین

۱ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $۵x^{۲} - ۸x . ۳ . ۰$

۲) $۴x^{۲} . ۵x . ۱ . ۰$

۳) $-۷x^{۲} . ۴x . ۳ . ۰$

۴) $x^{۲} - ۹ . ۰$

۵) $۴x^{۲} - ۳۶ . ۰$

۶) $x^{۲} - ۵x . ۴ . ۰$

۷) $11x^2 + 9x - 2 = 0$

۸) $7x^2 + 10x + 3 = 0$

۹) $x^3 - 16x = 0$

۱۰) $(x-1)^2 - 5(x-1) = 0$

۱۱) $(3t+5)^2 = -6(3t+5)$

حل معادله‌ی درجه دوم به روش مربع کامل: گاهی اوقات جواب‌های معادله‌ی درجه دوم اعداد صحیح نیستند بنابراین از روش تجزیه نمی‌توانیم به‌راحتی آن‌ها را حدس بزنیم. برای حل این نوع معادله‌ها هرگاه ضریب درجه دوم، یک نباشد آن را با تقسیم معادله بر عدد a به یک تبدیل می‌کنیم. سپس با افزودن مربع نصف ضریب جمله‌ی درجه اول به دو طرف، سمت چپ را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم، و با جذرگیری ریشه‌های معادله را می‌یابیم.

$$ax^2 + bx + c = 0 \;,\; a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2},$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

شکل ۸ــ۱