

فصل چهارم

سریهای زمانی

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- مفهوم سریهای زمانی و هدف از مطالعه آنها را توضیح دهد.
- ۲- سریهای زمانی را تعریف کرده، کاربرد آنها را در مسائل مالی توضیح دهد.
- ۳- عوامل مهم در سریهای زمانی را برشمرده، برای هر کدام تعریف مناسبی ارائه دهد.
- ۴- نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم کند.
- ۵- خط گرایش را از روشهای چهارگانه: دست آزاد، میانگینهای مضاعف، میانگینهای متحرک و حداقل مربعات رسم کند.
- ۶- وضعیت آینده را با کمک خط روند، پیش‌بینی کند.
- ۷- منحنی سهمی گرایش را محاسبه و رسم کند.

مفهوم کلی سریهای زمانی^۱

واژه «سری» به معنای ردیف و کلمه «زمانی» به معنای نسبت داده شده به زمان می‌باشد و اصطلاح «سریهای زمانی» به معنای داده‌هایی است که با نظم مشخص در طی زمان تغییر می‌کنند. به چند مثال توجه کنید:

— در دایرهٔ حسابداری یک شرکت، همه ماهه در موعد معینی از ماه، باید لیست حقوق ماه آیندهٔ کارکنان به صورت پیش‌نویس تهیه شود؛ در روز معینی از هر ماه، باید تغییرات احتمالی حقوق کارکنان (نظیر ترفیعات، بازنشستگی، اضافه‌کار، مرخصی، وامها، نوسانات مالیاتی و...) در لیست اعمال شود؛ در روزهای مشخصی از هر ماه، این لیست باید پاکنویس شده، برای تأمین اعتبار و تأیید و امضا به مسئولین امر ارائه شود و سرانجام در روزهای معینی حقوق کارکنان به بانک فرستاده شده، در حسابهای آنها ثبت شود.

— در شرکت‌های بازرگانی در برخی از ماههای سال، فروش کم و در بعضی از ماهها، فروش زیاد است. مثلاً شرکت‌های توزیع‌کنندهٔ لوازم التحریر در شهریورماه و مهرماه هر سال به دلیل گشایش مدارس، بیشترین فروش را دارند و در خردادماه به دلیل نزدیک شدن به انتهای سال تحصیلی، کمترین مشتریها را خواهند داشت.

— در کشاورزی در برخی از فصول، فعالیت بیشتر است و در بعضی از فصول فعالیت کمتر است. — فروش نفت در آغاز زمستان و فروش یخ در تابستان افزایش پیدا می‌کند. — در اوایل فصل تابستان، میوه نسبتاً گران است و بتدریج ارزان می‌شود، زیرا در آغاز تابستان، مقدار محصول کم است و در اواسط تابستان عرضه میوه زیاد می‌شود و مجدداً در اواخر تابستان که مقدار میوه‌های تابستانی کاهش پیدا می‌کند، قیمت آن رو به فزونی می‌گذارد. — در کتابخانهٔ یک دبیرستان یا یک دانشکده، در روزهای قبل از امتحانات، تعداد زیادی از دانش‌آموزان یا دانشجویان برای امانت گرفتن کتاب مراجعه می‌کنند.

مثالهای بالا، همه از نوساناتی حکایت می‌کنند که در پدیده‌های مختلف اقتصادی، اجتماعی، فرهنگی و... در طول زمان و در فواصل مشخصی از ماه، فصل، سال و... رخ می‌نمایند. مطالعه و تجزیه و تحلیل این وقایع به صورت کلی ما را در درک اوضاع گذشته، ارزشیابی وضعیت حال و برنامه‌ریزی برای آینده، یاری خواهد کرد.

طبیعی است که هر تغییر که در یک پدیده به وجود می‌آید، می‌تواند تحت تأثیر عوامل مختلفی ایجاد شده باشد. مثلاً، وقتی قیمت یک کالای کشاورزی افزایش می‌یابد، باید عواملی نظیر: شرایط آب و هوا، قیمت کود و بذر، هزینه‌های آبیاری، سیستم توزیع، نحوهٔ انبارداری و... را مورد بررسی قرار داد. شناخت و اندازه‌گیری تأثیرات این عوامل، هدف اصلی تجزیه و تحلیل سریهای زمانی است. در این فصل از کتاب، به روشهایی توجه خواهیم کرد که با کمک آنها خواهیم توانست با استفاده از تجارب گذشته، حوادث آینده را پیش‌بینی کنیم.

این مبحث، می‌تواند کمک مفیدی به سازمانهای مالی، صنعتی، اقتصادی و تجاری باشد. مثلاً یک متخصص امور مالی، با شناخت درآمد شرکت‌های تجاری در سالهای آینده می‌تواند سطح درآمد مالیاتی دولت را در آن سالها پیش‌بینی کند و یا مدیر یک فروشگاه بزرگ با استفاده از سربهای زمانی، متوجه خواهد شد که چه موقع از سال و با چه مقیاسی باید کالا سفارش دهد تا بموقع بتواند تقاضای بازار را پاسخگو باشد.

تعریف سربهای زمانی

با توجه به توضیحات بالا، می‌توان گفت؛ رخدادهای متوالی و منظم یک پدیده را در طول یک دوره معین از زمان «سری زمانی» گویند.

عوامل مهم در سربهای زمانی

آمارشناسان تغییرات ایجاد شده در سربهای زمانی را ناشی از چهار عامل زیر می‌دانند:

گرایشهای دراز مدت (روند)^۱

گرایشهای دراز مدت، به آن دسته از عوامل گویند که در تمام طول دوره فعالیت یک سری زمانی، به صورت منظم و پیوسته وجود دارد و باید مورد بررسی قرار گیرد. مانند تغییرات ایجاد شده در رشد جمعیت و یا مانند پیشرفتهای تکنولوژیکی یک جامعه.

تغییرات فصلی^۲

تغییراتی را که به طور منظم و متوالی در فواصلی از یک سال اتفاق می‌افتند، «تغییرات فصلی» گویند. توجه دارید که اصطلاح «فصلی» همیشه نشانه‌ای از یک فصل شامل سه ماه نیست و گاهی برای هر نوع تغییر در دوره کوتاه یا بلندی از یک سال، به کار برده می‌شود. مثل: فصل آغاز مدارس،

فصل امتحانات، فصل تنظیم ترازنامه شرکتها، فصل سرما. (که می‌تواند در برخی از مناطق بیش از سه ماه و در بعضی از جاها کمتر از سه ماه باشد.)

تغییرات ادواری^۱ (دوره‌ای)

تغییراتی را که نشاندهندهٔ افزایش و کاهش متناوب یک فعالیت تجاری - اقتصادی به‌طور مداوم، مرتب و منظم باشند، «تغییرات ادواری» گویند. این تغییرات را در فعالیتهای بازرگانی «سیکلهای تجاری» نیز می‌نامند. بررسی دوره‌هایی نظیر دورهٔ بهبود، دورهٔ رونق، دورهٔ بحران و دورهٔ کساد و رکود در اقتصاد از این گونه هستند.

تغییرات ناگهانی^۲ (بی‌قاعده - تصادفی - نامنظم)

تغییرات ناگهانی، تغییراتی هستند که به صورتی کاملاً تصادفی و غیر منتظره اتفاق می‌افتند. به همین دلیل، این عامل از عوامل سریهای زمانی غالباً به‌طور دقیق قابل پیش‌بینی نیست. تغییرات ناگهانی، می‌توانند ناشی از رفتار انسان باشند، مانند جنگ، اعتصاب و... و یا منشأ طبیعی (غیر انسانی) داشته باشند. نظیر سیل، زلزله، توفان و مواردی از این قبیل. غالباً در بررسی عوامل سریهای زمانی، آن دسته را که نمی‌توان در گرایشهای دراز مدت، تغییرات فصلی و تغییرات ادواری طبقه‌بندی کرد، جزء تغییرات ناگهانی به حساب می‌آورند و به همین دلیل، گروهی از آمارشناسان به این دسته از عوامل «تغییرات پس‌ماند» نام داده‌اند.

به این ترتیب، هر سری زمانی می‌تواند حاصل جمع جبری چهار عامل فوق‌الذکر باشد، که اگر جزء گرایشهای دراز مدت را با علامت «T»، جزء تغییرات فصلی را با علامت «S»، جزء تغییرات ادواری را با علامت «C» و جزء تغییرات ناگهانی را با علامت «I» نشان دهیم، می‌توان هر مشاهده از سری زمانی مانند y را، به صورت زیر بیان کرد:

$$y = T + S + C + I$$

(فرمول ۱)

این مدل را «مدل حاصل جمع» می‌نامند. مدل دیگری نیز به نام «مدل حاصل ضرب» وجود دارد که دقیق‌تر است و به شکل $y = T.S.C.I$ نوشته می‌شود.

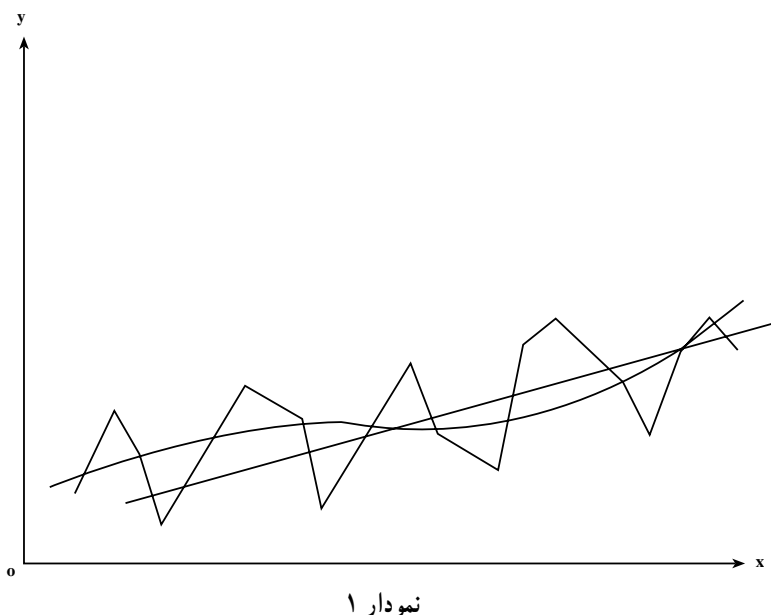
در این کتاب، از مدل حاصل جمع استفاده می‌کنیم. هدف از بررسی سریهای زمانی، جدا کردن هر یک از چهار عامل بالا در یک سری زمانی و اندازه‌گیری میزان تأثیر آن عامل در کل مقدار سری

زمانی (y) است. مثلاً وقتی در دراز مدّت، قیمت یک کالا افزایش پیدا می‌کند، باید بررسی کرد که این افزایش (تغییر) به چه نسبت‌هایی مربوط به S ، T ، C و I بوده است. چون در بین چهار عامل بالا، گرایشهای دراز مدّت یک عامل اصلی و سرنوشت‌ساز است، در این کتاب به منظور کوتاه کردن مطلب، این عامل را بیشتر مورد بحث و بررسی قرار داده‌ایم.

نمودار حرکات سریهای زمانی

برای رسم حرکات زمانی، می‌توانید از اصولی استفاده کنید که در رسم نمودارهای آماری با آنها آشنا می‌باشید. برای این منظور، کافی است عامل زمان را روی محور افقی و اندازه‌های متغیر مورد بررسی را روی محور عمودی محورهای مختصات قرار داده، پس از نقطه‌یابی، از اتصال نقاط، نمودار حرکات سریهای زمانی را بسازید.

در نمودار ۱، یک مدل کلی از سه نوع عامل گرایشهای دراز مدّت، تغییرات ادواری و تغییرات فصلی را مشاهده می‌کنید. گرایشهای دراز مدّت به وسیله خطی مستقیم، تغییرات ادواری با خطی انحنایی و تغییرات فصلی با پاره‌خط‌هایی که نقاط را به هم وصل کرده‌اند، مشخص شده‌اند.



تذکر: در نمودار ۱، عامل تغییرات ناگهانی منظور نشده است. زیرا این حرکات، قابل پیش‌بینی نیست و یا پیش‌بینی آنها، بسیار مشکل است و به همین دلیل، غالباً مورد اندازه‌گیری قرار نمی‌گیرند.

روشهای رسم خط روند (خط گرایش دراز مدت)

برای رسم خطی مستقیم روی نمودار حرکات سربهای زمانی، چهار روش معمول است :

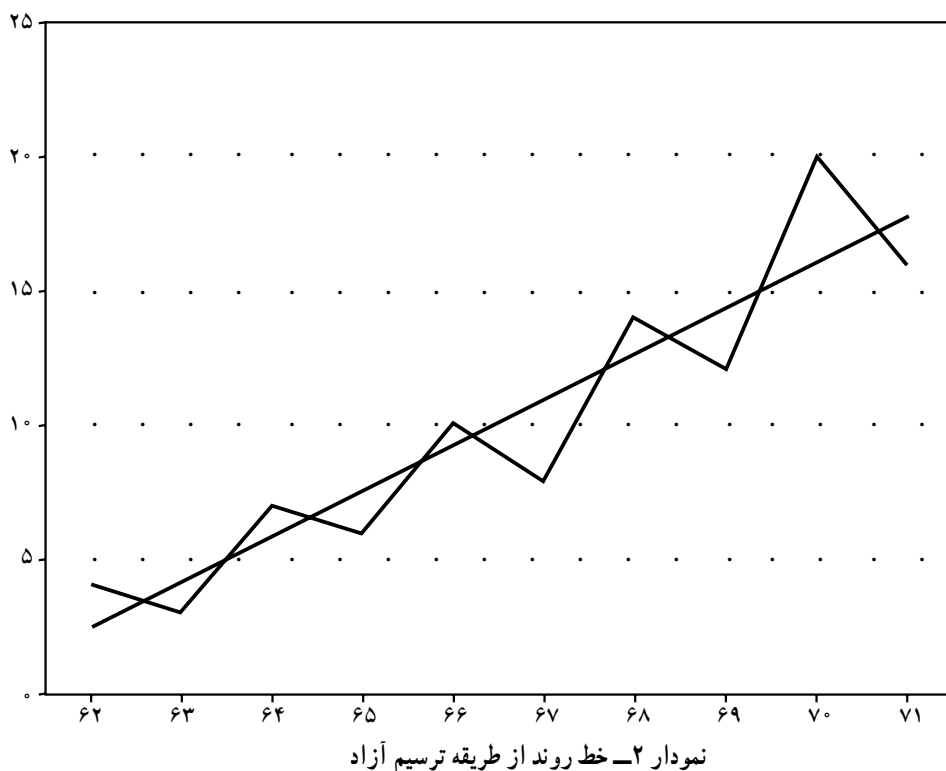
روش ترسیم آزاد (دست آزاد)^۱

در این روش، ابتدا نمودار حرکات سربهای زمانی را رسم می‌کنند. سپس به طور تقریبی، یک خط مستقیم روی نمودار به گونه‌ای رسم می‌نمایند که خط مذکور شیب کلی حرکات نمودار را از جهت صعودی بودن، نزولی بودن، افقی بودن یا عمودی بودن نشان دهد. این روش از دقت چندانی برخوردار نیست و تحت تأثیر رسم‌کننده قرار می‌گیرد، اما روش بسیار ساده‌ایست.

مثال ۱- در جدول زیر، فروش یک فروشگاه را در ده سال متوالی مشاهده می‌کنید. ابتدا نمودار حرکات فروش را رسم کنید. سپس خط گرایش را از طریق دست‌آزاد، روی آن برازنده کنید.

جدول ۱

سالها	۱۳۷۲	۱۳۷۳	۱۳۷۴	۱۳۷۵	۱۳۷۶	۱۳۷۷	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۱۳۸۱
فروش	۴	۳	۷	۶	۱۰	۸	۱۴	۱۲	۲۰	۱۶



روش میانگینهای مضاعف

در این روش، پس از رسم نمودار حرکات سریهای زمانی، مقادیر سری زمانی (y_i) را به دو بخش مساوی تقسیم کرده، میانگین هر بخش را روی زمان متناظرش نقطه‌یابی می‌کنیم، سپس نقاط حاصل را به هم وصل کرده، خط گرایش را به وجود می‌آوریم.

اگر تعداد داده‌ها (y_i) فرد باشد، عدد وسطی (مربوط به زمان وسطی) را یک‌بار با گروه قبلی و یک‌بار با گروه بعدی در نظر می‌گیریم.

مثال ۲- اگر تولید یک کارخانه در ۶ سال متوالی، طبق جدول ۲ باشد، پس از رسم نمودار حرکات تولید، خط گرایش را روی نمودار از طریق میانگینهای مضاعف برازنده نمایید.

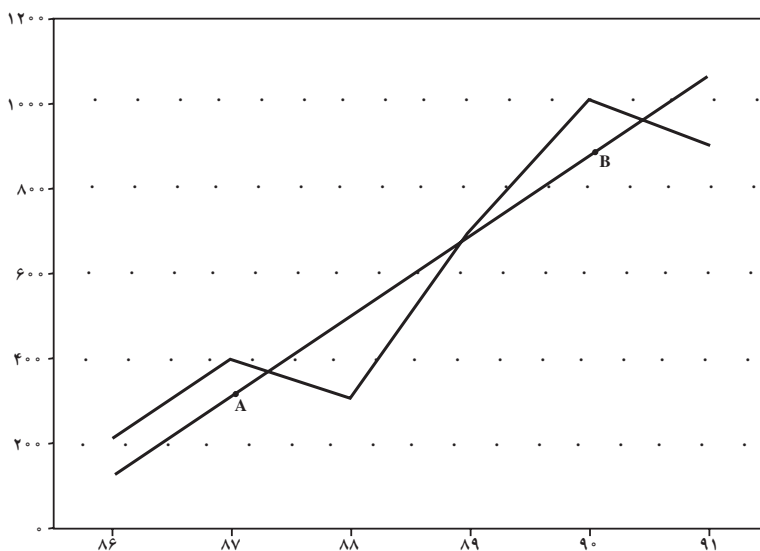
جدول ۲

سالها	۱۹۸۶	۱۹۸۷	۱۹۸۸	۱۹۸۹	۱۹۹۰	۱۹۹۱
مقدار تولید	۲۰۰	۴۰۰	۳۰۰	۷۰۰	۱۰۰۰	۹۰۰

ابتدا میانگینهای مضاعف را طبق جدول ۳ مشخص می‌کنیم. آنگاه، نمودار تولید را رسم کرده، خط گرایش را با داشتن دو نقطه میانگینهای مضاعف روی نمودار، برازنده خواهیم کرد.

جدول ۳

سالها	تولید y_i	مجموع هربخش	میانگینهای مضاعف	نقطه میانگین
۱۹۸۶	۲۰۰	۹۰۰	$۹۰۰ \div ۳ = ۳۰۰$	A
۱۹۸۷	۴۰۰			
۱۹۸۸	۳۰۰			
۱۹۸۹	۷۰۰	۲۶۰۰	$۲۶۰۰ \div ۳ \approx ۸۶۷$	B
۱۹۹۰	۱۰۰۰			
۱۹۹۱	۹۰۰			



نمودار ۳ — خط روند از طریق میانگینهای مضاعف

روش میانگینهای متحرک

در این روش، میانگینهای متحرک K دوره‌ای (مثلاً سه ساله) را به این شکل محاسبه می‌کنند: ابتدا از اولین K داده سری زمانی میانگین می‌گیرند، سپس اولین داده را حذف کرده، داده بعدی را طوری به داده‌ها اضافه می‌کنند که K ثابت بماند و مجدداً میانگین را محاسبه می‌کنند. (مثلاً اگر $K = ۳$ باشد،

یعنی میانگینهای متحرک را سه ساله محاسبه کنند، ابتدا میانگین مقادیر مربوط به سالهای اول، دوم و سوم را محاسبه می‌نمایند و سپس میانگین مقادیر مربوط به سالهای دوم، سوم و چهارم را. بعد از آن میانگین مقادیر مربوط به سالهای سوم، چهارم و پنجم را محاسبه خواهند کرد و... این کار را آنقدر ادامه می‌دهند تا آخرین داده، در آخرین گروه K دوره‌ای قرار گیرد، میانگینهای حاصل را میانگینهای متحرک گویند که تعداد آنها را می‌توان از رابطه $(n - K + 1)$ به دست آورد. n (تعداد مقادیر سری زمانی است). پس از محاسبه میانگینهای متحرک آنها را در مقابل وسط دوره زمانی که برای آن دوره محاسبه شده‌اند، قرار می‌دهیم. مشاهده خواهیم کرد که این میانگینها نسبت به مقادیر اصلی سری زمانی، از نوسانات کمتری برخوردار هستند و تمایل دارند که سری زمانی را هموار کنند. غالباً برای بررسی اثرات روند بلند مدت، از میانگینهای سه ساله یا پنج ساله یا هفت ساله یا... استفاده می‌کنند و اگر سری زمانی مربوط به فصول مختلف چند سال متوالی باشد، بهتر است از میانگینهای متحرک چهار فصلی استفاده شود و چنانچه داده‌های سری زمانی در ارتباط با ماههای مختلف چند سال متوالی باشد، مفیدتر خواهد بود که از میانگینهای متحرک دوازده ماهه استفاده کنیم.

مثال ۳- در جدول ۴ تولید یک کارخانه را در هشت سال متوالی مشاهده می‌کنید. ابتدا نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم کنید. سپس خط روند را از روش میانگینهای متحرک سه ساله، روی نمودار حرکات بگنجانید.

جدول ۴

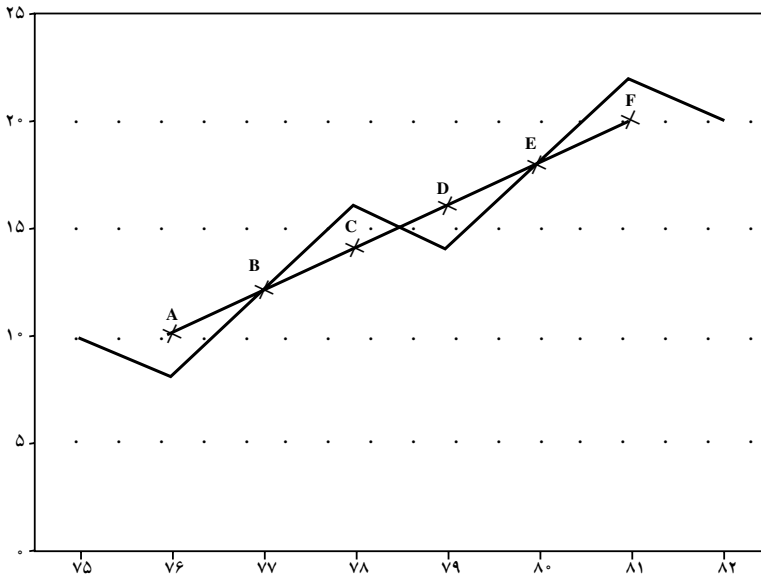
سالها	۱۳۷۵	۱۳۷۶	۱۳۷۷	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۱۳۸۱	۱۳۸۲
y_i = مقدار تولید	۱۰	۸	۱۲	۱۶	۱۴	۱۸	۲۲	۲۰

ابتدا میانگینهای متحرک سه ساله را در جدول ۵ محاسبه می‌کنیم.

جدول ۵

سالها	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲
y_i	۱۰	۸	۱۲	۱۶	۱۴	۱۸	۲۲	۲۰
مجموع سه ساله متحرک	—	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴	۶۰	—
میانگینهای متحرک	—	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	—
نقاط	—	A	B	C	D	E	F	—

و آنگاه به رسم نمودار و خط روند می پردازیم :



نمودار ۴ - خط روند از طریق میانگینهای متحرک

مثال ۴- فروش یک فروشگاه را در فصول مختلف سه سال متوالی، در جدول ۶ در اختیار

دارید، مطلوب است :

الف) محاسبه میانگینهای متحرک چهار فصلی

ب) تعدیل مقدار فروش از نظر نوسانات فصلی

ج) رسم نمودار حرکات سری زمانی (فروش) و نمودار مقادیر تعدیل شده فروش بر روی یک

دستگاه محورهای مختصات

جدول ۶

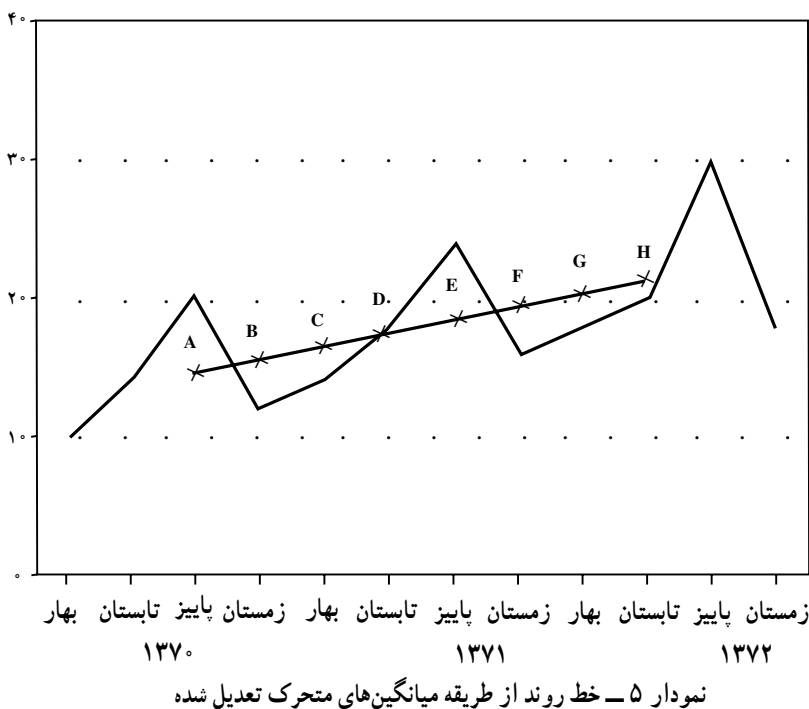
فصول سالها	بهار	تابستان	پاییز	زمستان
۱۳۷۰	۱۰	۱۴	۲۰	۱۲
۱۳۷۱	۱۴	۱۸	۲۴	۱۶
۱۳۷۲	۱۸	۲۰	۳۰	۱۸

ابتدا، مقادیر فروش مربوط به اولین چهار فصل ۷۰ را جمع کرده، میانگین آنها را محاسبه می‌کنیم. آنگاه مقادیر مربوط به تابستان، پاییز و زمستان ۷۰ و بهار ۷۱ را جمع کرده، میانگین آنها را معلوم می‌کنیم. در مرحله بعد، مقادیر مربوط به پاییز و زمستان سال ۷۰ و بهار و تابستان سال ۷۱ را جمع کرده و میانگین آنها را معلوم می‌کنیم. این عمل را تا آنجا ادامه می‌دهیم که مقادیر فروش (y_i) چهار فصل مربوط به سال ۷۲ را جمع کرده، میانگین آنها را محاسبه کنیم. (به جدول ۷ نگاه کنید.) در این مثال چون مجموعهای متحرک چهار فصلی دقیقاً مقابل زمانهای مشخص قرار نمی‌گیرند، یک بار دیگر مجموعهای متحرک ۲ دوره‌ای را محاسبه می‌کنیم، تا میانگینها درست متناظر با زمانهای جدول فروش باشند. به همین دلیل، برای محاسبه میانگینها، مقسوم علیه ۸ منظور شده است. (مثلاً عدد ۱۱۶ مجموع ۸ عدد است.)

جدول ۷

نقاط میانگین	میانگینهای متحرک (T_i)	دومین مجموعهای متحرک	مجموعهای متحرک چهار فصل	فروش $y_i =$	فصول	سالها
			۵۶ ۶۰ ۶۴ ۶۸ ۷۲ ۷۶ ۷۸ ۸۴ ۸۶	۱۰	بهار	۱۳۷۰
				۱۴	تابستان	۱۳۷۰
A	$۱۱۶ \div ۸ = ۱۴/۵$	۱۱۶		۲۰	پاییز	۱۳۷۰
B	$۱۲۴ \div ۸ = ۱۵/۵$	۱۲۴		۱۲	زمستان	۱۳۷۰
C	$۱۳۲ \div ۸ = ۱۶/۵$	۱۳۲		۱۴	بهار	۱۳۷۱
D	$۱۴۰ \div ۸ = ۱۷/۵$	۱۴۰		۱۸	تابستان	۱۳۷۱
E	$۱۴۸ \div ۸ = ۱۸/۵$	۱۴۸		۲۴	پاییز	۱۳۷۱
F	$۱۵۴ \div ۸ = ۱۹/۲۵$	۱۵۴		۱۶	زمستان	۱۳۷۱
G	$۱۶۲ \div ۸ = ۲۰/۲۵$	۱۶۲		۱۸	بهار	۱۳۷۲
H	$۱۷۰ \div ۸ = ۲۱/۲۵$	۱۷۰		۲۰	تابستان	۱۳۷۲
				۳۰	پاییز	۱۳۷۲
				۱۸	زمستان	۱۳۷۲

اکنون ابتدا نمودار حرکات سری زمانی را رسم می‌کنیم، آنگاه نقاط میانگینهای متحرک را روی محورهای مختصات مشخص کرده، به هم وصل می‌کنیم. در نمودار ۵ مشاهده می‌کنید که نوسانات میانگینهای متحرک به مراتب آرامتر از نوسانات اندازه‌های اصلی (y_i) است.



روش کمترین مربعات

دقیق‌ترین روش به دست آوردن خط روند بلند مدت، استفاده از روش رگرسیونی است که در فصل قبل با معادله آن آشنا شده‌اید. شکل کلی معادله به صورت $y' = ax + b$ بود. در این روش، خط گرایش را با استفاده از تابع خطی رسم می‌کنیم.

همانگونه که در خط رگرسیون در فصل قبل دیدید :

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{SP_{xy}}{SS_x} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

اگر تمام عوامل صورت و مخرج کسر بالا را در n ضرب کنیم، خواهیم داشت :

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (\text{فرمول ۲})$$

در روابط بالا :

n = تعداد عوامل سری زمانی (سالها، ماهها و...) می باشد.

y_i = مقادیر تعدیل شده سری زمانی است.

a = ضریب تغییر سری زمانی است که تندی شیب خط را نشان می دهد. (ضریب زاویه خط).

b = میانگین مقدار سری زمانی است که ارتفاع خط روند را در سال وسطی (یا به طور کلی در

زمان وسطی) مشخص می کند.

x_i = بیانگر زمان است که نقش متغیر مستقل را به عهده دارد. برای تعیین اعداد x در سالهای

مختلف به ترتیب اعداد، ۰، ۱، ۲ و ... را در نظر می گیریم (مثال ۷).

اما چنانچه بتوانیم مقادیر x_i را با تغییر مبدأ از زمان آغاز بررسی سری زمانی به زمان وسط،

به گونه ای تنظیم کنیم که $\sum x_i = 0$ بشود (که این مطلب را در چند سطر بعد بیشتر توضیح خواهیم

داد.) در آن صورت فرمولهای بالا به شکل زیر خلاصه خواهند شد :

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \quad b = \bar{y} \quad (\text{فرمول ۳})$$

و برای اینکه مجموع اندازه های x (یعنی $\sum x_i$) مساوی صفر بشود، کافی است، هرگاه تعداد سالها

فرد باشد، مقابل سال وسطی صفر منظور کرده، سالهای قبل از آن را به ترتیب، -۱، -۲، -۳ و ...

و سالهای بعد از آن به ترتیب +۱، +۲، +۳ و ... قرار دهیم و هرگاه تعداد سالها زوج باشد، دو سال

وسطی را در نظر گرفته، مقابل سال بالاتری -۱ و مقابل سال پایین تری +۱ را برای x اختصاص داده،

اعداد -۳، -۵، -۷ و ... را قبل از -۱ و اعداد +۳، +۵، +۷ و ... را بعد از +۱ در نظر می گیریم

و به این ترتیب، هرگاه تعداد سالها زوج باشد، x تعداد دوره های تناوب شش ماهه را قبل و بعد از زمان

وسطی نشان می دهد.

مثال ۵— مقدار تولید یک کارخانه را در هفت سال متوالی در جدول ۸ مشاهده می کنید.

نمودار حرکات سری زمانی را رسم کرده، خط روند را روی نمودار حرکات از طریق کمترین مربعات

بگنجانید.

جدول ۸

سالها	۱۳۷۶	۱۳۷۷	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۱۳۸۱	۱۳۸۲
مقدار تولید y_i	۱۲۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۷۰	۱۶۰	۲۰۰	۱۱۰

ابتدا در جدول ۹، محاسبات لازم را برای تعیین a و b انجام می‌دهیم.

جدول ۹

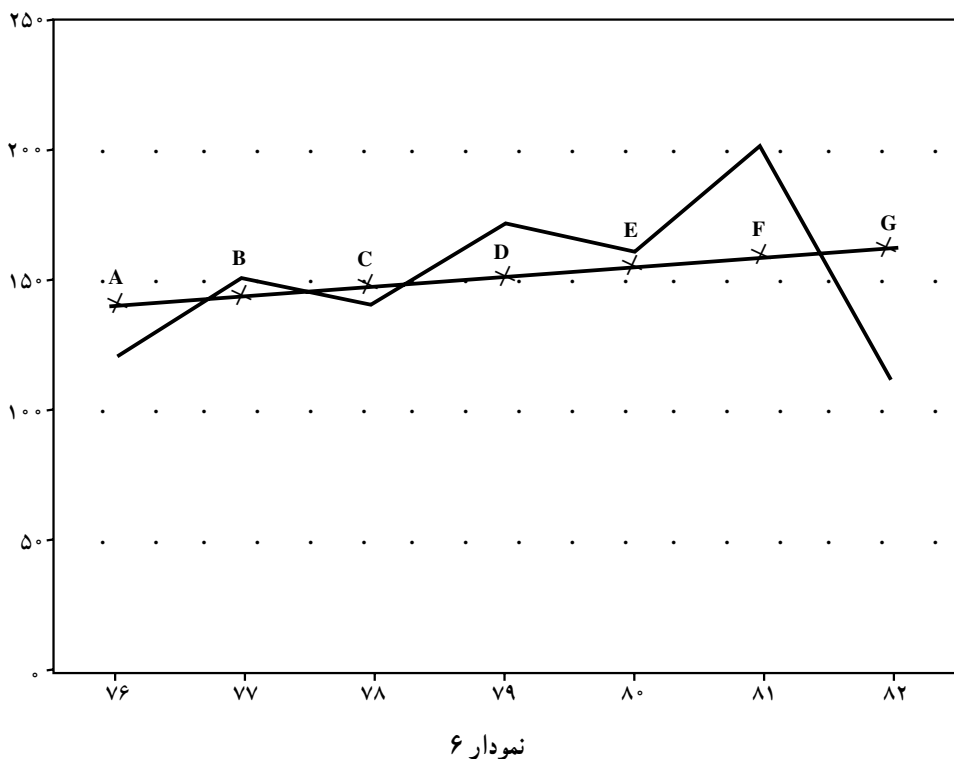
سالها	y_i	x_i	$x_i y_i$	x_i^2	مقادیر تعدیل شده سری زمانی $y' =$	نقاط
۷۶	۱۲۰	-۳	-۳۶۰	۹	$y'_{(۶۶)} = ۳/۲(-۳) + ۱۵۰ = ۱۴۰/۴$	A
۷۷	۱۵۰	-۲	-۳۰۰	۴	$y'_{(۶۷)} = ۳/۲(-۲) + ۱۵۰ = ۱۴۳/۶$	B
۷۸	۱۴۰	-۱	-۱۴۰	۱	$y'_{(۶۸)} = ۳/۲(-۱) + ۱۵۰ = ۱۴۶/۸$	C
۷۹	۱۷۰	۰	۰	۰	$y'_{(۶۹)} = ۳/۲(۰) + ۱۵۰ = ۱۵۰$	D
۸۰	۱۶۰	+۱	۱۶۰	۱	$y'_{(۷۰)} = ۳/۲(+۱) + ۱۵۰ = ۱۵۳/۲$	E
۸۱	۲۰۰	+۲	۴۰۰	۴	$y'_{(۷۱)} = ۳/۲(+۲) + ۱۵۰ = ۱۵۶/۴$	F
۸۲	۱۱۰	+۳	۳۳۰	۹	$y'_{(۷۲)} = ۳/۲(+۳) + ۱۵۰ = ۱۵۹/۶$	G
	۱۰۵۰		$\Sigma ۹۰$	$\Sigma ۲۸$		

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{۹۰}{۲۸} = ۳/۲۱ \approx ۳/۲$$

$$b = \bar{y} = \frac{۱۰۵۰}{۷} = ۱۵۰$$

$$y' = ۳/۲x + ۱۵۰$$

اکنون با کمک معادلهٔ اخیر، مقادیر فروش (y_i) را تعدیل می‌کنیم. برای این مقصود، کافی است برای هر سال در معادله به جای x مقدار x آن سال را قرار دهیم. برای سهولت کار می‌توانید فقط مقادیر تعدیل شدهٔ اولین سال و آخرین سال را به دست آورده، خط را رسم کنید.



مثال ۶- فرض کنید مقدار ضایعات تولید یک کارخانه را در ده سال متوالی، طبق جدول ۱۰ در اختیار دارید. خط روند را روی منحنی نوسانات، از طریق کمترین مجذورات برازنده کنید :

جدول ۱۰

سال	۱۳۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲
ضایعات	۲۰	۲۲	۱۶	۱۴	۱۸	۱۲	۱۰	۶	۸	۴

ابتدا در جدول ۱۱، عملیات لازم را برای تعدیل کردن مقادیر انجام می دهیم. سپس منحنی حرکات و خط روند را رسم می کنیم.

جدول ۱۱

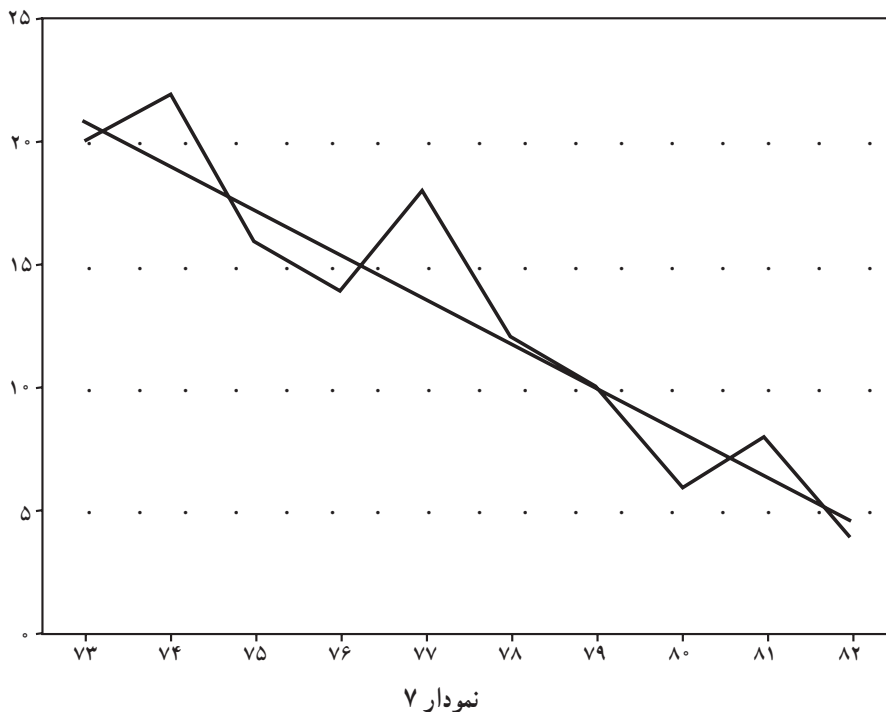
نقاط	مقادیر تعدیل شده ضایعات $y' =$	$x_i y_i$	x_i^2	x_i	y_i	سالها
A	$y'_{(۷۳)} = -۰/۹۳(-۹) + ۱۳ = ۲۱/۳۷$	-۱۸۰	۸۱	-۹	۲۰	۷۳
		-۱۵۴	۴۹	-۷	۲۲	۷۴
		-۸۰	۲۵	-۵	۱۶	۷۵
		-۴۲	۹	-۳	۱۴	۷۶
		-۱۸	۱	-۱	۱۸	۷۷
		+۱۲	۱	+۱	۱۲	۷۸
		+۳۰	۹	+۳	۱۰	۷۹
		+۳۰	۲۵	+۵	۶	۸۰
		+۵۶	۴۹	+۷	۸	۸۱
B	$y'_{(۸۲)} = -۰/۹۳(+۹) + ۱۳ = ۴/۶۳$	+۳۶	۸۱	+۹	۴	۸۲
		-۳۱۰	۳۳۰		۱۳۰	

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{-۳۱۰}{۳۳۰} = -۰/۹۳$$

$$b = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{۱۳۰}{۱۰} = ۱۳$$

$$y' = -۰/۹۳x + ۱۳$$

تذکر: توجه دارید که در این مثال، که تعداد سالها زوج است، در ستون x_i عدد صفر متناظر با زمان معینی نیست. بنابراین x تعداد دوره‌های شش ماهه را نشان می‌دهد.



پیش‌بینی مقادیر سریهای زمانی

برای پیش‌بینی مقادیر یک سری زمانی، دقیق‌ترین روش، استفاده از معادله خط رگرسیون بلندمدت است. خطی که با کمک معادله $y' = ax + b$ و با ضرایب a و b به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

بعد از تعیین معادله رگرسیونی، از مدل $y = T + S + C + I$ و حذف عامل تغییرات ناگهانی (I) به صورت $y = T + S + C$ استفاده می‌کنیم. (حذف I به این دلیل است که پیش‌بینی تغییرات ناگهانی برایمان مقدور نیست.)

مثال ۷- در مثال ۴ (که قبلاً حل کرده‌ایم) معادله خط رگرسیونی را تنظیم کنید و با ثابت فرض کردن تغییرات ناگهانی و دوره‌های تجاری، مقدار پیش‌بینی فروش را برای بهار و تابستان سال ۱۳۷۳ برآورد کنید.

ابتدا جدول فروش را مجدداً در نظر می گیریم :

جدول ۱۲

فصول سالها	بهار	تابستان	پاییز	زمستان
۱۳۷۰	۱۰	۱۴	۲۰	۱۲
۱۳۷۱	۱۴	۱۸	۲۴	۱۶
۱۳۷۲	۱۸	۲۰	۳۰	۱۸

اکنون در جدول ۱۳ محاسبات a و b و معادله رگرسیونی را انجام می دهیم.

جدول ۱۳

سال	فصل	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$	
۷۰	بهار	۱۰	۰	۰	۰	$a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} =$ $\frac{(12 \times 1314) - (66 \times 214)}{(12 \times 506) - (66)^2} = 0/96$
۷۰	تابستان	۱۴	۱	۱	۱۴	
۷۰	پاییز	۲۰	۲	۴	۴۰	
۷۰	زمستان	۱۲	۳	۹	۳۶	
۷۱	بهار	۱۴	۴	۱۶	۵۶	$b = \bar{y} - a\bar{x} = 17/83 - (0/96) \times \frac{66}{12}$ $b = 12/55$
۷۱	تابستان	۱۸	۵	۲۵	۹۰	
۷۱	پاییز	۲۴	۶	۳۶	۱۴۴	
۷۱	زمستان	۱۶	۷	۴۹	۱۱۲	<p>معادله خط رگرسیون $y' = 0/96x + 12/55$</p>
۷۲	بهار	۱۸	۸	۶۴	۱۴۴	
۷۲	تابستان	۲۰	۹	۸۱	۱۸۰	
۷۲	پاییز	۳۰	۱۰	۱۰۰	۳۰۰	
۷۲	زمستان	۱۸	۱۱	۱۲۱	۱۹۸	
		۲۱۴	۶۶	۵۰۶	۱۳۱۴	

اکنون با کمک معادله خط روند $(y' = 0/96x + 12/55)$ مقادیر مربوط به روند بلند مدت را به شکلی که در جدول زیر نشان داده‌ایم معلوم می‌کنیم.

جدول ۱۴

سال	فصل	y_i	x_i	$T = \text{روند بلند مدت} = y'$
۷۰	بهار	۱۰	۰	$y' = 0/96(0) + 12/55 = 12/55$
۷۰	تابستان	۱۴	۱	$y' = 0/96(1) + 12/55 = 13/51$
۷۰	پاییز	۲۰	۲	$y' = 0/96(2) + 12/55 = 14/47$
۷۰	زمستان	۱۲	۳	$= 15/43$
۷۱	بهار	۱۴	۴	$16/39$
۷۱	تابستان	۱۸	۵	$17/35$
۷۱	پاییز	۲۴	۶	$18/31$
۷۱	زمستان	۱۶	۷	$19/27$
۷۲	بهار	۱۸	۸	$20/23$
۷۲	تابستان	۲۰	۹	$21/19$
۷۲	پاییز	۳۰	۱۰	$22/15$
۷۲	زمستان	۱۸	۱۱	$y' = 0/96(11) + 12/55 = 23/11$
		۲۱۴	۶۶	

حالا با کمک مدل کلی سری زمانی یعنی :

$$y = T + C + S + I$$

و بعد از حذف I یعنی تغییرات ناگهانی، (به دلیل این که پیش‌بینی تغییرات ناگهانی یا بسیار مشکل و یا غیرممکن است.) به صورت $y_i = T + C + S$ تأثیر نوسانات فصلی را برای فصول مختلف معلوم می‌کنیم. برای این کار اختلاف هر یک از مقادیر اولیه (y_i) را با مقدار روند بلند مدت تعدیل شده (T_i) به دست آورده (جدول ۱۵)، برای هر فصل میانگین تأثیرات را محاسبه می‌کنیم (جدول ۱۶).

۱- از رابطه $y_i = T + C + S$ رابطه $y_i - T = C + S$ نتیجه خواهد شد.

جدول ۱۵

y_i	T_i	$y_i - T_i$
۱۰	۱۲/۵۵	-۲/۵۵
۱۴	۱۳/۵۱	۰/۴۹
۲۰	۱۴/۴۷	۵/۵۳
۱۲	۱۵/۴۳	-۳/۴۳
۱۴	۱۶/۳۹	-۲/۳۹
۱۸	۱۷/۳۵	۰/۶۵
۲۴	۱۸/۳۱	۵/۶۹
۱۶	۱۹/۲۷	-۳/۲۷
۱۸	۲۰/۲۳	-۲/۲۳
۲۰	۲۱/۱۹	-۱/۱۹
۳۰	۲۲/۱۵	۷/۸۵
۱۸	۲۳/۱۱	-۵/۱۱

جدول ۱۶

سالها فصول	۱۳۷۰	۱۳۷۱	۱۳۷۲	مجموع تغییرات فصول	میانگین تغییرات فصول
بهار	-۲/۵۵	-۲/۳۹	-۲/۲۳	-۷/۱۷	-۲/۳۹
تابستان	۰/۴۹	۰/۶۵	-۱/۱۹	-۰/۰۵	-۰/۰۱۶۶
پاییز	۵/۵۳	۵/۶۹	۷/۸۵	۱۹/۰۷	+۶/۳۵۶۶
زمستان	-۳/۴۳	-۳/۲۷	-۵/۱۱	-۱۱/۸۱	-۳/۹۳۶۶

حالا اگر مقادیر x را در معادله $y' = ۰/۹۶x + ۱۲/۵۵$ جایگذاری کنیم، مقادیر روند بلند مدت (T) حاصل می‌شوند. مثلاً برای تعیین مقدار روند بلند مدت در بهار ۱۳۷۳ و تابستان ۱۳۷۳ که مقدار x آنها به ترتیب ۱۲ و ۱۳ خواهد بود، خواهیم داشت:

$$y' \text{ (بهار ۷۳)} = ۰/۹۶(۱۲) + ۱۲/۵۵ = ۲۴/۰۷ \rightarrow \text{برآورد بلند مدت در بهار ۷۳}$$

$$y' \text{ (تابستان ۷۳)} = ۰/۹۶(۱۳) + ۱۲/۵۵ = ۲۵/۰۳ \rightarrow \text{برآورد بلند مدت در تابستان ۷۳}$$

حال، اگر مقدار نوسان فصلی مربوط به فصول بهار و تابستان ۷۳ را از جدول ۱۵ به مقدار روند بلند مدت اضافه کنیم، رقم پیش‌بینی فروش برای فصول بهار و تابستان ۱۳۷۳ معلوم خواهد شد.

برای مثال، در مورد بهار سال ۱۳۷۳ خواهیم داشت :

$$24/07 + (-2/39) = 21/68$$

و برای تابستان سال ۱۳۷۳ خواهیم داشت :

$$25/03 + (-0/166) = 25/0134$$

تذکر مجدداً این مطلب لازم است که در این مثال، مقدار برآورد فروش را شامل تغییرات فصلی و روند دراز مدت در نظر گرفته‌ایم.

روش محاسبه و رسم منحنی سهمی گرایش

در سریهای زمانی ممکن است مشاهده شود که تغییرات سری زمانی غیر خطی است. در این موارد، چنانچه تغییرات نمودار از تابع درجه دوم تبعیت کند، شکل کلی تابع به صورت $y = ax^2 + bx + c$ خواهد بود. در این تابع، مقادیر a ، b و c را مقادیر ثابت و x و y را مقادیر متغیر می‌نامند. مقادیر b و c می‌توانند مثبت، منفی و یا صفر باشند و نمودار تابع درجه دوم تحت تأثیر این مقادیر، شکلهای مختلفی به خود می‌گیرد.

مثال ۸- فرض کنید تابع $y = x^2 - 6x + 8$ مربوط به تغییرات یک سری زمانی باشد. نمودار این تابع را رسم کرده، ویژگیهای آن را توضیح دهید.

حل: برای رسم نمودار تابع بالا، کافی است، مقادیر مختلفی به x نسبت داده، مقادیر متناظر y را از تابع به دست آوریم و روی محورهای مختصات، نقاط مذکور را معلوم کرده، به هم وصل کنیم.

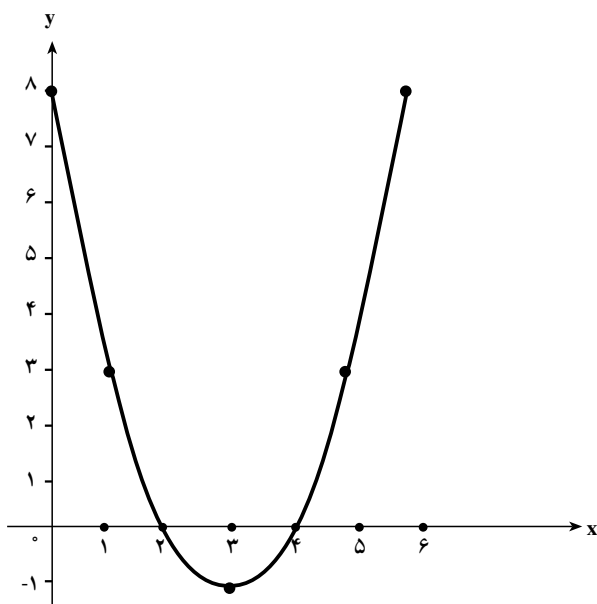
x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۸	۳	۰	-۱	۰	۳	۸

مشاهده می‌شود که این تابع محور عرضها را در یک نقطه قطع می‌کند که مقدار آن در تابع، معادل مقدار ثابت c می‌باشد و تغییر دادن این مقدار، موجب انتقال تابع به بالا یا پایین دستگاه

محورهای مختصات خواهد بود و این تابع با محور طولها در دو نقطه برخورد دارد، که این دو نقطه معادله را صفر می‌کنند. به این دو مقدار «ریشه‌های معادله» گفته می‌شود. معادله‌های درجهٔ دو، دارای دو ریشه خواهند بود، مگر در موارد زیر:

۱- اگر تابع در پایین‌ترین نقطه خود با محور طولها مماس باشد، که در این صورت، فقط یک ریشه خواهد داشت.

۲- اگر نمودار، در بالای محور طولها واقع شود که ریشه نخواهد داشت.
اکنون به شکل منحنی تابع توجه کنید:



نمودار ۸

تمرینهای فصل چهارم

- ۱- مفهوم سریهای زمانی را توضیح دهید.
- ۲- سریهای زمانی را تعریف کنید و کاربرد آنها را در مسائل مالی توضیح دهید.
- ۳- عوامل را در سریهای زمانی نام برده، برای هر کدام تعریف مناسبی بیان کنید.
- ۴- چند روش برای رسم خط روند می‌شناسید؟ آنها را نام برده، نحوه رسم هر کدام را به‌طور کلی توضیح دهید.
- ۵- در جدول زیر، فروش یک فروشگاه را در ۱۲ ماه از یک سال مشاهده می‌کنید. نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم کرده، خط روند را روی نمودار از طریق دست‌آزاد برازنده کنید.

اسفند	بهمن	دی	آذر	آبان	مهر	شهریور	مرداد	تیر	خرداد	اردیبهشت	فروردین	ماهها
۲۸	۳۵	۲۵	۳۰	۱۸	۱۲	۸	۴	۶	۲۰	۱۰	۸	$y_i = \text{فروش}$

- ۶- مقدار تولید یک کارخانه را در فصول مختلف چهار سال متوالی در اختیار دارید. مطلوب است: اولاً، رسم نمودار حرکات فصلی. ثانیاً، رسم خط روند دراز مدت با استفاده از روش میانگینهای متحرک چهار فصلی.

سالها → فصول ↓	۱۳۸۳	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶
بهار	۱۰	۱۲	۱۹	۲۲
تابستان	۱۴	۱۶	۲۱	۲۵
پاییز	۱۲	۱۴	۱۸	۲۰
زمستان	۸	۱۰	۱۲	۱۶

- ۷- اگر صادرات یک کشور در ده سال متوالی، به‌صورت صفحه‌بعد باشد، نمودار حرکات سری زمانی را رسم کرده، خط روند دراز مدت را با کمک روشهای زیر روی نمودار حرکات سریهای زمانی برازنده کنید.

الف) طریقۀ میانگینهای مضاعف ب) طریقۀ میانگینهای متحرک سه ساله

ج) طریقهٔ کمترین مجدورات

سالها	۱۹۸۰	۱۹۸۱	۱۹۸۲	۱۹۸۳	۱۹۸۴	۱۹۸۵	۱۹۸۶	۱۹۸۷	۱۹۸۸	۱۹۸۹
صادرات	۲۰۰	۱۸۰	۲۲۰	۲۶۰	۲۴۰	۲۵۰	۳۰۰	۲۸۰	۳۲۰	۲۶۰

۸- تعداد دانشجویان یک دانشگاه در طول پنج سال متوالی، طبق جدول زیر بوده است. خطّ روند دراز مدّت را از طریقهٔ رگرسیونی رسم کنید و تعداد دانشجو را برای سه سال متوالی بعد از سال ۱۳۷۲ پیش‌بینی کنید.

سالها	۱۳۸۲	۱۳۸۳	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶
تعداد دانشجو	۱۵۰۰	۱۸۰۰	۱۶۰۰	۲۰۰۰	۲۲۰۰

۹- در جدول تمرین ۸ خطّ روند را از طریقهٔ میانگینهای متحرک سه ساله، روی نمودار حرکات سریهای زمانی برازنده کنید.

۱۰- تعداد مشتریهای یک بانک را در ساعات مختلف پنج روزکاری، در جدول زیر در اختیار دارید. نمودار حرکات سری زمانی را رسم کرده، خطّ روند را از طریقهٔ میانگینهای متحرک روی نمودار حرکات سری زمانی برازنده کنید.

روزها ساعت	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
۸	۲۰	۱۵	۱۲	۱۴	۱۸
۱۰	۱۴	۱۲	۱۰	۱۲	۲۰
۱۲	۱۰	۸	۶	۸	۸
۱۴	۶	۴	۴	۵	۱۰

----- تستهای چهار گزینه‌ای -----

۱- در معادله کمترین مربعات $y = ax + b$ مقدار a برابر است با :

$$(1) \frac{\sum xy}{\sum x^2} \quad (2) \frac{\sum x^2}{\sum xy} \quad (3) \frac{\sum x}{\sum xy} \quad (4) \frac{\sum xy}{\sum x}$$

۲- اگر تعداد سالهای مورد بررسی در سریهای زمانی ۹ باشد، در تعیین مقادیر x_i برای سال چهارم چه عددی را در نظر می‌گیرید تا $\sum x_i$ مساوی صفر شود؟

$$(1) -1 \quad (2) 4 \quad (3) 5 \quad (4) \text{ صفر}$$

۳- کدام روش برای رسم خط روند، دقیقتر از سایر روشها است؟

$$(1) \text{ دست آزاد} \quad (2) \text{ میانگینهای مضاعف}$$

$$(3) \text{ میانگینهای متحرک} \quad (4) \text{ کمترین مربعات}$$

۴- کدام عامل از عوامل سریهای زمانی، غالباً قابل پیش‌بینی نیست؟

$$(1) \text{ تغییرات فصلی} \quad (2) \text{ تغییرات ناگهانی} \quad (3) \text{ تغییرات دوره‌ای} \quad (4) \text{ تغییرات دراز مدت}$$

۵- برای اینکه در تعیین ضرایب a و b در معادله خط رگرسیون، $\sum x_i = 0$ بشود، مقدار x

را برای کدام سال صفر در نظر می‌گیرید؟ اگر تعداد سالها فرد باشد :

$$(1) \text{ سال اول} \quad (2) \text{ سال آخر}$$

$$(3) \text{ سال وسطی} \quad (4) \text{ میانگین دو سال وسطی}$$

۶- در تبدیل معادله رگرسیون به معادله کمترین مربعات برای پیش‌بینی، مقدار b را در معادله

« $y' = ax + b$ » از کدام رابطه معلوم خواهید کرد؟

$$(1) b = \bar{y} \quad (2) b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (3) b = a\bar{x} \quad (4) b = \bar{x}$$

۷- مقادیر تعدیل شده (y'_i) در روش میانگینهای متحرک نسبت به مقادیر اولیه سری زمانی

$$(y_i =)$$

(۱) از نوسانات بیشتری برخوردار است. (۲) از نوسانات کمتری برخوردار است

(۳) تفاوتی ندارد. (۴) گاهی نوسانات، کمتر و گاهی بیشتر است.

۸- در جدول صفحه بعد اولین و دومین میانگینهای متحرک سه ساله کدامند؟

$$(1) 18 \text{ و } 10 \quad (2) 14 \text{ و } 12 \quad (3) 15 \text{ و } 12 \quad (4) 14 \text{ و } 10$$

سالها	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲
y_i	۱۰	۱۵	۵	۲۲	۱۸	۱۴	۱۹	۱۰

۹- استفاده از بررسی سربهای زمانی به منظور :

(۱) شناخت گذشته است. (۲) پیش‌بینی آینده است.

(۳) بررسی وضعیت حال است. (۴) هر سه مورد درست هستند.

۱۰- تغییرات ناگهانی ناشی از کدام عامل زیر هستند؟

(۱) عامل انسان (۲) عامل طبیعت

(۳) هم عامل انسان و هم عامل طبیعت (۴) نه عامل انسان و نه عامل طبیعت