فصل چهارم

مشخّصه‌های پراکندگی

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، فراگیر باید بتواند :

۱ــ دلایل به‌کار بردن مشخّصه‌های پراکندگی را بیان کند.

۲ــ مشخّصه‌های مهم پراکندگی را معرفی کند.

۳ــ نحوهٔ محاسبه واریانس را برای توزیعهای گسسته و پیوسته، به‌کار برد.

۴ــ خواص مشخّصه‌های پراکندگی و کاربرد آنها را بیان کند.

۵ــ برای توزیعهای با دامنهٔ نامعیّن، پراکندگی را با استفاده از چارکها محاسبه کند.

۶ــ مشخّصه‌های نسبی پراکندگی را معرّفی کند.

۷ــ مشخّصه‌های چولگی را برای توزیعهای با دامنهٔ معلوم و نامعیّن محاسبه کند.

۸ــ با مشخّصه‌های پراکندگی بتواند جامعه‌ها را مقایسه کند.

در مطالعه تغییرپذیری صفت متغیّر برای اعضای جامعه، تنها نمی‌توان به متوسّط اندازهٔ صفت، اکتفا نمود، زیرا قبلاً دیدیم که یک میانگین همواره به یک جامعه تعلق ندارد، بلکه دو یا چند توزیع متفاوت، ممکن است میانگینهای یکسان داشته باشند، ولی پراکندگی آنها متفاوت باشد.

برای مشخص نمودن پراکندگی صفت متغیّر، می‌توان از انحرافات مقادیر صفت از همدیگر یا انحرافات مقادیر صفت از مشخّصه‌های دیگر مانند مشخّصه‌های مرکزی استفاده کرد.

مشخّصه‌های پراکندگی

طول دامنهٔ تغییرات

در آمار برای اندازه‌گیری پراکندگی، مشخّصه‌های مختلفی مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از

ساده‌ترین آنها، که به‌آسانی با توزیع صفت متغیّر، محاسبه می‌شود «طول دامنهٔ تغییرات» صفت می‌باشد.

طول دامنهٔ تغییرات از تفاضل بزرگترین اندازهٔ صفت و کوچکترین مقدار آن به‌دست می‌آید.

$$R = X_{max} - X_{min} \quad \text{طول دامنه تغییرات} \qquad (۱)$$

فرض کنیم مقادیر مشاهده شده صفت متغیّر در جامعه به‌قرار زیر به‌دست آمده باشد:

$X: ۳, ۵, ۷, ۹, ۷, ۴, ۵, ۸, ۱۱, ۱۰$

دامنهٔ تغییرات صفت، مطابق فرمول۱ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

چون بزرگترین اندازهٔ صفت، ۱۱ و کوچکترین اندازهٔ آن، ۳ می‌باشد، بنابراین:

$R = ۱۱ - ۳ = ۸$

خواهد بود. ولی دامنهٔ تغییرات، به‌عنوان مشخّصه پراکندگی، تصویر صحیحی دربارهٔ چگونگی تراکم مقادیر، حول مقدار متوسط صفت، ارائه نمی‌دهد و فقط از تغییر کوچکترین و بزرگترین مقدار صفت، متأثر می‌شود. از این‌رو، برای ارزیابی نوسانات مقدارصفت نسبت به مقدار متوسط، مشخّصه‌های پراکندگی دیگری مورد استفاده قرار می‌گیرند که ازنظر کلی به دامنهٔ تغییرات ارجحیّت دارند.

متوسط قدرمطلق انحرافات (انحراف متوسّط[1])

اگر بخواهیم نوسانات مقادیر صفت را حول میانگین، با میانگین انحرافات ارزیابی کنیم، یعنی مشخّصه پراکندگی را به‌صورت:

$$\frac{\sum F_i (X_i - \overline{X})}{N}$$

بیان کنیم، چون صورت کسر، مطابق خاصیت ۳ میانگین، همواره مساوی صفر است، دربارهٔ پراکندگی واقعی صفت، چیزی به‌دست نخواهد آمد.

برای برطرف کردن این مشکل، از قدرمطلق انحرافات و یا از مجذور انحرافات استفاده می‌شود. محاسبهٔ میانگین قدرمطلق انحرافات که آن‌را با نمادِ AD نشان می‌دهیم، به‌قرار زیر خواهد بود:

$$AD = \frac{\sum F_i \left| X_i - \overline{X} \right|}{N} \qquad (۲)$$

و اگر فراوانیها برای مقادیر صفت، برابر ۱ باشد، رابطهٔ بالا به‌صورت صفحهٔ بعد درخواهد آمد:

۱ـ Average Deviation =AD

$$AD = \frac{\sum |X_i - \overline{X}|}{N} \qquad (۳)$$

روش محاسبه آن‌را با ذکر یک مثال بیان می‌کنیم.

مثال ۱: برای توزیع صفت متغیّر که با جدول زیر بیان شده است، متوسط قدرمطلق انحرافات را محاسبه می‌کنیم :

X	۲	۳	۴	۵	۶	–
F_i	۱۰	۲۰	۳۰	۱۶	۴	۸۰

ابتدا میانگین حسابی را برای این توزیع محاسبه می‌کنیم، مقدار آن برابر $\overline{X} = ۳/۸$ است. بنابراین، طبق رابطهٔ ۲ خواهیم داشت :

$$AD = \frac{\sum F_i |X_i - \overline{X}|}{N}$$

$$= \frac{۱۰|۲-۳/۸| + ۲۰|۳-۳/۸| + ۳۰|۴-۳/۸| + ۱۶|۵-۳/۸| + ۴|۶-۳/۸|}{۸۰}$$

$$= \frac{۱۸+۱۶+۶+۱۹/۲+۸/۸}{۸۰} = \frac{۶۸}{۸۰} = ۰/۸۵$$

تمام محاسبات می‌تواند در جدول زیر انجام پذیرد (جدول ۱) :

جدول ۱

X	F_i	F_iX_i	$X_i - \overline{X}$	$\lvert X - \overline{X}\rvert$	$F_i \lvert X_i - \overline{X}\rvert$
۲	۱۰	۲۰	۲ – ۳/۸	۱/۸	۱۸
۳	۲۰	۶۰	۳ – ۳/۸	۰/۸	۱۶
۴	۳۰	۱۲۰	۴ – ۳/۸	۰/۲	۶
۵	۱۶	۸۰	۵ – ۳/۸	۱/۲	۱۹/۲
۶	۴	۲۴	۶ – ۳/۸	۲/۲	۸/۸
–	۸۰	۳۰۴	–	–	۶۸

$$\overline{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N} = \frac{۳۰۴}{۸۰} = ۳/۸$$

$$AD = \frac{\sum F_i |X_i - \overline{X}|}{N} = \frac{۶۸}{۸۰} = ۰/۸۵$$

یعنی به‌طور متوسط، هریک از مقادیر صفت، به اندازهٔ ۰/۸۵ واحد از متوسط خود انحراف دارند.

اگر صفت متغیّر با توزیع فاصله‌ای، بیان شده باشد، همانطور که در محاسبهٔ متوسط حسابی، گفته شد، ابتدا وسط فاصله‌ها را تعیین کرده، سپس مانند توزیع گسسته، عمل می‌کنیم.

مثال ۲: متوسط قدرمطلق انحرافات را برای مؤسّسات تولیدکننده مواد شیمیایی در مثال ۹ از فصل سوم، محاسبه می‌کنیم (جدول ۲) :

جدول ۲

X	F_i	X'_i	$F_iX'_i$	$\left\|X'_i-\overline{X}\right\|$	$F_i\left\|X'_i-\overline{X}\right\|$
۱۱–۱۳	۷	۱۲	۸۴	۳/۸۵	۲۶/۹۵
۱۳–۱۵	۹	۱۴	۱۲۶	۱/۸۵	۱۶/۶۵
۱۵–۱۷	۱۰	۱۶	۱۶۰	۰/۱۵	۱/۵۰
۱۷–۱۹	۸	۱۸	۱۴۴	۲/۱۵	۱۷/۲۰
۱۹–۲۱	۶	۲۰	۱۲۰	۴/۱۵	۲۴/۹۰
–	۴۰	–	۶۳۴	–	۸۷/۲۰

$$\overline{X}=\frac{۶۳۴}{۴۰}=۱۵/۸۵$$

$$AD=\frac{\sum F_i\left|X_i-\overline{X}\right|}{N}=\frac{۸۷/۲۰}{۴۰}=۲/۱۸$$

متوسط قدرمطلق انحرافات، یک اندازهٔ طبیعی برای پراکندگی توزیع می‌باشد، لیکن به‌علت فاقدبودنِ بعضی ویژگیهای ریاضی، از این مشخّصه، کمتر استفاده می‌شود.

متوسط مجذور انحرافات یا واریانس[1] (پراش)

درعمل به‌جای استفاده از علامت قدرمطلق، از مجذور انحرافات استفاده می‌کنند. بنابراین یکی دیگر از معیارهای پراکندگی، متوسط مجذور انحرافات است که آن‌را واریانس می‌نامند و با نماد $V(X)$ نشان داده و با فرمول زیر تعریف می‌شود :

۱ــ Variance

$$V(X)=\frac{F_۱(X_۱-\overline{X})^۲+F_۲(X_۲-\overline{X})^۲+\cdots+F_k(X_k-\overline{X})^۲}{F_۱+F_۲+\cdots+F_k}$$
$$=\frac{\sum F_i(X_i-\overline{X})^۲}{N} \qquad (۴)$$

و اگر مقادیر صفت بدون فراوانی باشند (فراوانی هرکدام یک باشد) :

$$V(X)=\frac{\sum(X_i-\overline{X})^۲}{N} \qquad (۵)$$

محاسبه واریانس را با مثال زیر نشان می‌دهیم :

مثال ۳: برای توزیع صفت متغیّر که با جدول زیر بیان شده است، واریانس را محاسبه می‌کنیم :

X	۲	۳	۴	۵	–
$\mathbf{F_i}$	۱۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰۰

متوسط حسابی برای این توزیع $\overline{X}=۳/۶$ است، بنابراین با استفاده از فرمول ۴ خواهیم داشت :

$$V(X)=\frac{\sum F_i(X_i-\overline{X})^۲}{N}$$
$$=\frac{۱۰(۲-۳/۶)^۲+۴۰(۳-۳/۶)^۲+۳۰(۴-۳/۶)^۲+۲۰(۵-۳/۶)^۲}{۱۰+۴۰+۳۰+۲۰}$$
$$=۰/۸۴$$

تمامی محاسبات می‌تواند در جدول زیر انجام پذیرد (جدول ۳) :

جدول ۳

$\mathbf{X_i}$	$\mathbf{F_i}$	$\mathbf{F_iX_i}$	$\mathbf{X_i-\overline{X}}$	$\mathbf{(X_i-\overline{X})^۲}$	$\mathbf{F_i(X_i-\overline{X})^۲}$
۲	۱۰	۲۰	−۱/۶	۲/۵۶	۲۵/۶
۳	۴۰	۱۲۰	−۰/۶	۰/۳۶	۱۴/۴
۴	۳۰	۱۲۰	۰/۴	۰/۱۶	۴/۸
۵	۲۰	۱۰۰	۱/۴	۱/۹۶	۳۹/۲
–	۱۰۰	۳۶۰	–	–	۸۴

$$\overline{X}=\frac{۳۶۰}{۱۰۰}=۳/۶$$

$$V(X)=\frac{\sum F_i(X_i-\overline{X})^۲}{N}=\frac{۸۴}{۱۰۰}=۰/۸۴$$

در محاسبهٔ واریانس، اغلب به‌علت اینکه متوسط حسابی، با رقمهای اعشاری باید از مقادیر صفت کم شود، به‌توان رساندن این اعداد اعشاری، محاسبه را دشوارتر می‌سازد. از این‌رو، فرمول واریانس را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنند :

$$V(X)=\frac{\sum F_i(X_i-\overline{X})^۲}{N}=\frac{\sum F_iX_i^۲}{N}-\overline{X}^۲ \qquad (۶)$$

$$V(X)=\frac{\sum F_i(X_i-\overline{X})^۲}{N}=\frac{\sum F_iX_i^۲-\frac{(\sum F_iX_i)^۲}{N}}{N} \qquad (۷)$$

و اگر فراوانی هرکدام از اندازه‌ها مساوی یک باشد، فرمولهای ۶ و ۷ به‌صورت زیر نوشته خواهد شد :

$$V(X)=\frac{\sum (X_i-\overline{X})^۲}{N}=\frac{\sum X_i^۲}{N}-\overline{X}^۲ \qquad (۸)$$

$$V(X)=\frac{\sum (X_i-\overline{X})^۲}{N}=\frac{\sum X_i^۲-\frac{(\sum X_i)^۲}{N}}{N} \qquad (۹)$$

فرمولهای ۶ تا ۹ را فرمولهای کاربردی واریانس نامند.

مثال ۴: واریانس را برای توزیع صفت متغیّر که در مثال ۳ بیان شده است، با استفاده از فرمول ۶ محاسبه می‌کنیم (جدول ۴) :

جدول ۴

X_i	F_i	F_iX_i	$F_iX_i^۲$
۲	۱۰	۲۰	۴۰
۳	۴۰	۱۲۰	۳۶۰
۴	۳۰	۱۲۰	۴۸۰
۵	۲۰	۱۰۰	۵۰۰
—	۱۰۰	۳۶۰	۱۳۸۰

$$\overline{X}=\frac{۳۶۰}{۱۰۰}=۳/۶$$

$$V(X) = \frac{\sum F_i X_i^۲}{N} - \overline{X}^۲$$

$$= \frac{۱۳۸۰}{۱۰۰} - (۳/۶)^۲ = ۱۳/۸ - ۱۲/۹۶ = ۰/۸۴$$

اگر صفت متغیّر، به‌صورت توزیع فاصله‌ای بیان شده باشد، مانند محاسبهٔ متوسط حسابی، ابتدا، وسط فاصله‌ها را تعیین کرده، سپس مانند توزیع گسسته، عمل می‌کنند.

مثال ۵: واریانس را برای توزیع صفت متغیّر که با جدول ۲ در مثال ۲ بیان شده است، محاسبه می‌کنیم. تمامی محاسبات در جدول ۵ آورده شده است :

جدول ۵

X	F_i	X'_i	$F_i X'_i$	$F_i X_i^۲$
۱۱–۱۳	۷	۱۲	۸۴	۱۰۰۸
۱۳–۱۵	۹	۱۴	۱۲۶	۱۷۶۴
۱۵–۱۷	۱۰	۱۶	۱۶۰	۲۵۶۰
۱۷–۱۹	۸	۱۸	۱۴۴	۲۵۹۲
۱۹–۲۱	۶	۲۰	۱۲۰	۲۴۰۰
–	۴۰	–	۶۳۴	۱۰۳۲۴

$$V(X) = \frac{\sum F_i X_i^۲ - \frac{(\sum F_i X_i)^۲}{N}}{N}$$

$$= \frac{۱۰۳۲۴ - \frac{(۶۳۴)^۲}{۴۰}}{۴۰} = \frac{۲۷۵/۱}{۴۰} = ۶/۸۷۷۵$$

انحراف معیار[۱]

واریانس، دارای ویژگیهای مهم ریاضی است که در اینجا درباره آنها بحث نمی‌کنیم لیکن به علت اینکه، واریانس، پراکندگی را به صورت مجذور انحرافات بیان می‌کند، برای اینکه متوسط انحراف برای یک عضو مشخص گردد، از واریانس جذر گرفته و آن را انحراف معیار صفت متغیّر می‌نامند و با حرف یونانی σ نشان می‌دهند.

۱ــ Standard Deviation

$$\sigma = +\sqrt{V(X)}$$
$$= +\sqrt{\frac{\sum F_i (X_i - \overline{X})^۲}{N}} \qquad (۱۰)$$

با وجود اینکه در آمارنظری، به‌عنوان اندازهٔ پراکندگی، به‌طور اساسی، واریانس مورد استفاده قرار می‌گیرد، ولی انحراف معیار، مناسب‌ترین و متداولترین مشخّصه پراکندگی است که در عمل از آن استفاده می‌شود. از این‌رو، در بحثهای بعدی، پراکندگی را با انحراف معیار، ارزیابی خواهیم کرد.

مثال۶: انحراف معیار را برای مثال ۵ محاسبه می‌کنیم :

$$\sigma = +\sqrt{V(X)} = \sqrt{۶/۸۷۷۵} = ۲/۶۲۲$$

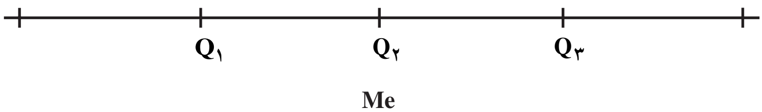
انحراف معیار، نیز مانند متوسط قدرمطلق انحرافات، متوسط انحرافات اندازه‌های صفت را از میانگین صفت نشان می‌دهد.

انحراف چارکی[۱]

به همان دلایلی که میانه به‌عنوان مشخّصه مرکزی تعریف شده است، برای تغییرپذیری جامعه‌هایی که دامنه توزیع صفت در آنها نامشخص باشد، از مشخّصه‌های آماری که از دامنه توزیع متأثر نمی‌باشند، استفاده می‌کنند. چنین مشخّصه‌های آماری، چارکها[۲] هستند که میانه یکی از آنها می‌باشد.

برای تعیین پراکندگی توزیع صفت در چنین حالتی از انحراف چارکی استفاده می‌شود که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد :

اگر طول دامنه تغییرات صفت را به چهار قسمت مساوی از نظر حجم تقسیم کنیم، سه عددی که این دامنه را به چهار قسمت افراز می‌کند به ترتیب چارک اول، چارک دوم و چارک سوم نامند و با $Q_۱$ ، $Q_۲$ و $Q_۳$ نشان داده می‌شوند.



متوسط تفاضل چارک دوم و چارک اول با تفاضل چارک سوم و چارک دوم را انحراف چارکی نامند و آن را با نماد QD نشان می‌دهند.

۱ـ Quartile Deviation

۲ـ Quartiles

فرمول آن به صورت زیر بیان می‌شود :

$$QD = \frac{(Q_۲ - Q_۱) + (Q_۳ - Q_۲)}{۲} = \frac{Q_۳ - Q_۱}{۲} \qquad (۱۱)$$

چارکها، مقدار صفت متغیّر در مجموعه مرتب شده مقادیر صفت هستند که ۲۵درصد اعضای جامعه، کوچکتر از $Q_۱$ و ۲۵درصد اعضای جامعه، بین $Q_۱$ و $Q_۲$ و ۲۵درصد اعضای جامعه بین $Q_۲$ و $Q_۳$ و ۲۵درصد بقیه اعضا، بالاتر از $Q_۳$ قرار می‌گیرند.

چارکهای اول و سوم، یعنی $Q_۱$ و $Q_۳$ ، مشابه میانه، طبق فرمولهای زیر محاسبه می‌شوند :

$$Q_۱ = X_i + \frac{\frac{N}{۴} - FC_i}{F_i} \times I \qquad (۱۲)$$

که در آن

X_i ــ نقطهٔ شروع فاصله گروهی از صفت متغیّر است که چارک اول در آن قرار دارد.

I ــ طول فاصله‌ای است که چارک اول در آن قرار دارد.

FC_i ــ فراوانی انباشته گروه قبل از گروه چارک اول می‌باشد.

F_i ــ فراوانی مطلق گروه چارک اول است.

$$Q_۳ = X_i + \frac{\frac{۳N}{۴} - FC_i}{F_i} \times I \qquad (۱۳)$$

که در آن

X_i ــ نقطهٔ شروع فاصله گروهی از صفت متغیّر است که چارک سوم در آن قرار دارد.

I ــ طول فاصله‌ای است که چارک سوم در آن قرار دارد.

FC_i ــ فراوانی انباشته گروه قبل از گروه چارک سوم می‌باشد.

F_i ــ فراوانی مطلق گروه چارک سوم است.

بدیهی است، برای محاسبات چارک اول و چارک سوم، باید ستون فراوانیهای تجمعی را در جدول توزیع صفت، محاسبه کنیم.

مثال ۷: فرض کنید توزیع فراوانی کارگران برحسب مزد و حقوق ماهانه آنها در یک مؤسّسه با جدول زیر بیان شده باشد. می‌خواهیم تغییرپذیری (پراکندگی) مزد و حقوق ماهانه را برای این جامعه محاسبه کنیم :

جدول ۶

مزد و حقوق ماهانه کارگران X	تعداد کارگران F_i	فراوانی انباشته FC_i
۴۰۰۰۰ تا	۱۲	۱۲
۴۰۰۰۰–۴۵۰۰۰	۳۸	۵۰
۴۵۰۰۰–۵۰۰۰۰	۴۴	۹۴
۵۰۰۰۰–۵۵۰۰۰	۵۰	۱۴۴
۵۵۰۰۰–۶۰۰۰۰	۶۲	۲۰۶
۶۰۰۰۰–۷۰۰۰۰	۴۲	۲۴۸
۷۰۰۰۰–۸۰۰۰۰	۲۵	۲۷۳
۸۰۰۰۰–۱۰۰,۰۰۰	۱۴	۲۸۷
۱۰۰,۰۰۰ تومان به بالا	۱۳	۳۰۰
–	۳۰۰	–

ملاحظه می‌شود که مشخّصه‌هایی مانند «طول دامنهٔ تغییرات»، «متوسّط قدرمطلق انحرافات»، واریانس و انحراف معیار به‌عنوان مشخّصه پراکندگی برای این توزیع نمی‌تواند محاسبه گردد. زیرا حدود بالا و پایین جامعه نامشخص است. از این‌رو «انحراف چارکی» را برای این توزیع فراوانیها، محاسبه می‌کنیم. ابتدا ستون فراوانیهای انباشته را محاسبه می‌کنیم که نتیجهٔ آن در ستون سوم جدول ۶ آمده است.

محاسبهٔ چارک اول ($Q_۱$): برای این‌منظور $\frac{N}{۴}$ را تعیین می‌کنیم :

$$\frac{N}{۴}=\frac{۳۰۰}{۴}=۷۵$$

با مقایسهٔ مقدار چارک اول (۷۵) با ستون فراوانیهای انباشته جدول، مشاهده می‌شود که در فراوانی انباشته (۹۴) متعلق به فاصله ۵۰۰۰۰ــ۴۵۰۰۰ قرار دارد، بنابراین چارک‌اول در فاصله ۵۰۰۰۰ــ۴۵۰۰۰ می‌باشد. با استفاده از فرمول ۱۲ مقدار $Q_۱$ را محاسبه می‌کنیم.

در اینجا :

$$X_i = ۴۵۰۰۰$$

$$I = ۵۰۰۰۰ - ۴۵۰۰۰ = ۵۰۰۰$$

$$FC_i = ۵۰$$

$$F_i = ۴۴$$

$$Q_۱ = X_i + \frac{\frac{N}{۴} - FC_i}{F_i} \times I$$

$$= ۴۵۰۰۰ + \frac{۷۵ - ۵۰}{۴۴} \times ۵۰۰۰$$

$$= ۴۵۰۰۰ + \frac{۱۲۵۰۰۰}{۴۴} = ۴۵۰۰۰ + ۲۸۴۱ = ۴۷۸۴۱$$

مشابه روش بالا، چارک سوم ($Q_۳$) را محاسبه می‌کنیم. برای این‌منظور $\frac{۳N}{۴}$ را تعیین می‌کنیم :

$$\frac{۳N}{۴} = \frac{۳ \times ۳۰۰}{۴} = ۲۲۵$$

با $\frac{۳N}{۴}$ ، فاصله‌ای را که شامل چارک سوم است، جستجو می‌کنیم. چون ۲۲۵ در فراوانی انباشته (۲۴۸) که متعلق به فاصلهٔ ۷۰۰۰۰ــ۶۰۰۰۰ است، قرار دارد، از این‌رو، چارک سوم در فاصله ۷۰۰۰۰ــ۶۰۰۰۰ می‌باشد. با استفاده از فرمول ۱۳، چارک سوم را محاسبه می‌کنیم.

در اینجا :

$X_i = ۶۰۰۰۰$

$I = ۷۰۰۰۰ - ۶۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰$

$FC_i = ۲۰۶$

$F_i = ۴۲$

$$Q_۳ = X_i + \frac{\frac{۳N}{۴} - FC_i}{F_i} \times I$$

$$= ۶۰۰۰۰ + \frac{۲۲۵ - ۲۰۶}{۴۲} \times ۱۰۰۰۰$$

$$= ۶۰۰۰۰ + \frac{۱۹۰۰۰۰}{۴۲} = ۶۰۰۰۰ + ۴۵۲۴ = ۶۴۵۲۴$$

حال با استفاده از فرمول ۱۱، انحراف چارکی (QD) را محاسبه می‌کنیم :

$$QD = \frac{Q_۳ - Q_۱}{۲}$$

$$= \frac{۶۴۵۲۴ - ۴۷۸۴۱}{۲} = ۸۳۴۱/۵$$

چون تمامی مقادیر صفت متغیّر، بر روی انحراف چارکی، تأثیر نمی‌کنند (حداکثر ۵۰درصد از مقادیر صفت در آن تأثیر دارند)، از این مشخّصه در مواردی که محاسبه انحراف معیار، دشوار یا غیرممکن است، استفاده می‌شود.

مشخّصه‌های نسبی پراکندگی

برای مقایسهٔ تغییرات صفت در دو یا چند جامعه با میانگینهای مختلف، از مشخّصه‌های نسبی پراکندگی، استفاده می‌شود. این مشخّصه‌ها از نسبت مشخّصه‌های پراکندگی به مشخّصه‌های مرکزی صفت، محاسبه می‌شوند.

یکی از مهمترین مشخّصه‌های نسبی پراکندگی، ضریب تغییرات است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

ضریب تغییرات[1]

نسبت انحراف معیار صفت متغیّر بر متوسط حسابی صفت که برحسب درصد بیان شده باشد، ضریب تغییرات، نامیده می‌شود و آن‌را با C.V نشان می‌دهند.

$$C.V=\frac{\sigma}{\overline{X}}\times ۱۰۰ \qquad (۱۴)$$

که در آن:

σ ــ انحراف معیار صفت متغیّر است.

$\overline{X}$ ــ متوسط حسابی صفت متغیّر، می‌باشد.

مثال۸: ضریب تغییرات را برای صفت متغیّر که در مثال ۵ آورده شده است، و برای آن $\overline{X}=۱۵/۸۵$ و $\sigma=۲/۶۲۲$ می‌باشند، محاسبه می‌کنیم:

$$C.V=\frac{\sigma}{\overline{X}}\times ۱۰۰=\frac{۲/۶۲۲}{۱۵/۸۵}\times ۱۰۰=۱۶/۵۴٪$$

یعنی تغییرات صفت، ۱۶/۵درصد اندازه متوسط آن را تشکیل می‌دهد.

ضریب تغییرات نه‌تنها برای بیان تغییرپذیری نسبی به‌کار می‌رود، بلکه به عنوان «مشخّصه همگنی» جامعه نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. هرگاه ضریب تغییرات صفت در جامعه از ۳۳درصد تجاوز نکند، آن جامعه را ازنظر صفت‌متغیّر، «همگن» درنظر می‌گیرند.

مثلاً جامعه‌ای که در مثال بالا آورده شد، نسبت به صفت متغیّر، همگن می‌باشد.

وقتی به‌عنوان اندازهٔ تغییرپذیری، متوسط قدرمطلق انحرافات (A.D)، مورد استفاده قرار می‌گیرد، مشخّصه‌نسبی پراکندگی به‌صورت انحراف‌خطی نسبی، محاسبه می‌شود:

۱ــ Coefficient of variation

انحراف خطی‌نسبی

نسبت متوسّط قدرمطلق انحرافات بر متوسط حسابی صفت متغیّر که برحسب درصد بیان شده باشد، «انحراف‌خطی‌نسبی» نامیده می‌شود. اگر آن‌را با $C.V_{AD}$ نشان دهیم، به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$C.V_{AD} = \frac{AD}{\overline{X}} \times ۱۰۰ \qquad (۱۵)$$

که در آن :

AD ــ متوسط قدرمطلق انحرافات صفت متغیّر است.

$\overline{X}$ ــ متوسط حسابی صفت متغیّر، می‌باشد.

مثال ۹: انحراف خطی نسبی را برای صفت متغیّر در مثال ۲، محاسبه می‌کنیم که برای آن $\overline{X} = ۱۵/۸۵$ و $AD = ۲/۱۸$ قبلاً محاسبه شده است.

$$C.V_{AD} = \frac{AD}{\overline{X}} \times ۱۰۰$$
$$= \frac{۲/۱۸}{۱۵/۸۵} \times ۱۰۰ = ۱۳/۷۵\%$$

درحالاتی که استفاده از مشخّصه‌های تغییرپذیری (پراکندگی) مذکور، امکان‌پذیر نباشد، مناسب است از مشخّصه‌نسبی پراکندگی دیگری به‌نام «انحراف چارکی نسبی» استفاده گردد.

انحراف چارکی نسبی

نسبت انحراف چارکی بر میانهٔ صفت متغیّر «انحراف چارکی نسبی» نامیده می‌شود که آن‌را با q نشان می‌دهیم :

$$q = \frac{QD}{Me} \times ۱۰۰ \qquad (۱۶)$$

مثال ۱۰: انحراف چارکی نسبی را برای صفت متغیّر درمثال ۷ محاسبه می‌کنیم که برای آن : $QD = ۸۳۴۱/۵$ و $Me = ۵۵۴۸۴$ می‌باشد.

$$q = \frac{QD}{Me} \times ۱۰۰ = \frac{۸۳۴۱/۵}{۵۵۴۸۴} \times ۱۰۰ = ۱۵\%$$

مشخّصه چولگی (انحراف از قرینگی)

برای پی‌بردن به خصوصیّات عمومی توزیع، اغلب، مشخّصه‌های انحراف از قرینگی یا چولگی محاسبه می‌شود.

قبل از اینکه مشخّصه‌های چولگی را معرفی کنیم، باید بدانیم توزیع قرینه چیست، تا براساس آن، غیرقرینه‌بودن، مشخص گردد.

هرگاه فراوانیهای متعلق به دو مقدار صفت که از مرکز توزیع، در فاصله‌های مساوی قرار دارند، یکسان باشند، آن‌توزیع را «قرینه» می‌خوانند. در غیر این صورت، توزیع را «غیرقرینه» یا «چوله» می‌نامند.

مثلاً در توزیع فراوانیهایی که با جدول زیر بیان شده است، فراوانیها، نسبت به وسط توزیع، دوبه‌دو باهم برابرند :

X	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
F_i	۱۰	۴۰	۸۰	۴۰	۱۰

درصورتی که درتوزیع فراوانیهایی که در جدول زیر بیان شده است، فراوانیها برای مقادیر صفت که نسبت به وسط توزیع در فاصله‌های مساوی قرار گرفته‌اند، یکسان نیستند.

X_i	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
F_i	۱۰	۲۰	۴۰	۴۵	۲۵	۱۰

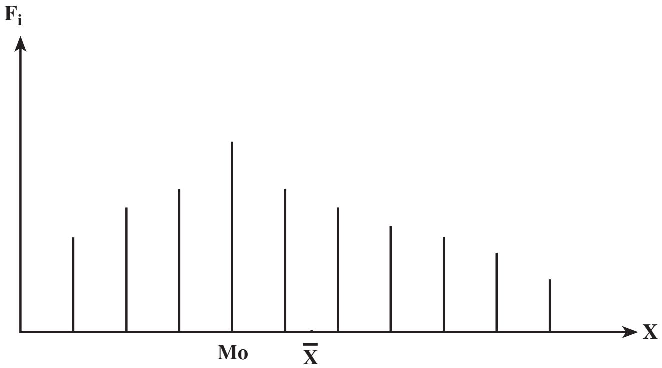
برای مقایسه درجه‌دوری توزیعها ازحالت قرینه‌بودن، از مشخّصه‌نسبی که «ضریب چولگی» نام دارد، استفاده می‌شود.

ــ ضریب چولگی پیرسن: در فصل گذشته، ملاحظه شد که برای توزیعهای قرینه، مقدار میانگین، میانه و نما باهم برابرند. درارتباط با آن، ساده‌ترین مشخّصه انحراف از قرینگی یا چولگی که ضریب چولگی پیرسن نام دارد، بر مناسبات بین مشخّصه‌های مرکزی استوار گردیده است.

هرچه تفاوت بین مشخّصه‌های مرکزی $(\overline{X}-Mo)$ ، بیشتر باشد، چولگی نیز بیشتر است. ضریب چولگی پیرسن به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$P_{AS}=\frac{\overline{X}-Mo}{\sigma} \tag{۱۷}$$

کمیّت P_{AS} ، می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. مقدار مثبت این ضریب، وجود چولگی راست را نشان می‌دهد یعنی دامنهٔ راست توزیع نسبت به نما، بیشتر کشیده است تا دامنهٔ چپ آن (مانند نمودار شکل ۱) :

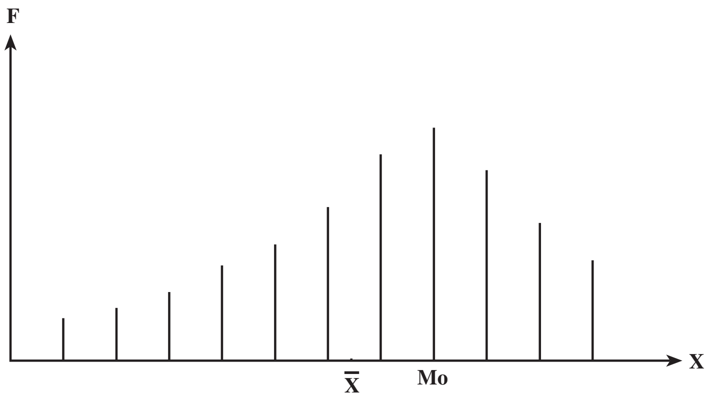


شکل ۱ــ وجود چولگی راست

در چولگی راست، بین مشخّصه‌های مرکزی رابطهٔ زیر برقرار است :

$$Mo < Me < \overline{X} \quad (۱۸)$$

علامت منفی در این ضریب، گواه وجود چولگی چپ است که در شکل ۲ نشان داده شده است :



شکل ۲ــ وجود چولگی چپ

در این حالت، بین مشخّصه‌های مرکزی، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$Mo > Me > \overline{X} \tag{۱۹}$$

معمولاً وقتی ضریب چولگی کوچکتر از ۰/۱ باشد، توزیع را تقریباً قرینه و وقتی که ضریب چولگی بزرگتر از ۰/۵ باشد آن‌را خیلی چوله درنظر می‌گیرند. طبیعی است که در توزیعهای قرینه، ضریب چولگی مساوی با صفر خواهد بود.

مثال ۱۱: ضریب چولگی پیرسن (P_{AS}) را برای توزیع زیر محاسبه می‌کنیم :

X	۱۰–۱۵	۱۵–۲۰	۲۰–۲۵	۲۵–۳۰	۳۰–۳۵	–
F_i	۴	۱۰	۲۰	۵	۱	۴۰

برای محاسبهٔ ضریب چولگی پیرسن، میانگین حسابی، نما و انحراف معیار توزیع را باید به‌دست آورد. تمامی محاسبات در جدول ۷ آورده شده است.

جدول ۷

X	F_i	X'_i	$F_iX'_i$	$F_iX'^2_i$
۱۰–۱۵	۴	۱۲/۵	۵۰	۶۲۵
۱۵–۲۰	۱۰	۱۷/۵	۱۷۵	۳۰۶۲/۵
۲۰–۲۵	۲۰	۲۲/۵	۴۵۰	۱۰۱۲۵
۲۵–۳۰	۵	۲۷/۵	۱۳۷/۵	۳۷۸۱/۲۵
۳۰–۳۵	۱	۳۲/۵	۳۲/۵	۱۰۵۶/۲۵
–	۴۰	–	۸۴۵	۱۸۶۵۰

$$\overline{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N} = \frac{۸۴۵}{۴۰} = ۲۱/۱۲۵$$

$$V(X) = \frac{\sum F_i X_i{}^{۲} - \frac{(\sum F_i X_i)^{۲}}{N}}{N}$$

$$= \frac{۱۸۶۵۰ - \frac{(۸۴۵)^{۲}}{۴۰}}{۴۰} = \frac{۷۹۹/۳۷۵}{۴۰} = ۱۹/۹۸$$

$$\sigma = +\sqrt{V(X)} = \sqrt{۱۹/۹۸} = ۴/۴۷$$

$$Mo = X_i + \frac{F_i - F_{i-۱}}{(F_i - F_{i-۱}) + (F_i - F_{i+۱})} \times I$$

$$= ۲۰ + \frac{۲۰-۱۰}{(۲۰-۱۰)+(۲۰-۵)} \times ۵$$

$$= ۲۰ + \frac{۵۰}{۲۵} = ۲۲$$

درنتیجه، ضریب چولگی پیرسن طبق فرمول۱۷، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$P_{AS} = \frac{\overline{X} - Mo}{\sigma} = \frac{۲۱/۱۲۵ - ۲۲}{۴/۴۷} = -۰/۱۹$$

ولی باید متذکر شد که ضریب چولگی پیرسن همیشه نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. مثلاً اگر توزیع دو نما داشته باشد، این ضریب نمی‌تواند محاسبه گردد.

ــ ضریب چولگی بر پایه میانگین توان سوم انحرافات:

یکی از متداول‌ترین ضرایب چولگی که نقص ضریب چولگی پیرسن را ندارد و از تمامی عناصر توزیع (یعنی از مقادیر صفت و فراوانیها) در محاسبه آن استفاده می‌شود ضریب چولگی بر پایه میانگین توان سوم انحرافات می‌باشد که با M_{AS} نشان داده می‌شود، به صورت زیر بیان می‌شود :

$$M_{AS} = \frac{\frac{\sum F_i (X_i - \overline{X})^۳}{N}}{\sigma^۳} = \frac{\sum F_i (X_i - \overline{X})^۳}{N\sigma^۳} \qquad (۲۰)$$

مثال ۱۲: ضریب چولگی بر پایهٔ میانگین توان سوم انحرافات را برای توزیع فراوانیهای صفت متغیّر که با جدول زیر بیان شده است، محاسبه می‌کنیم :

X	۳	۴	۵	۶	۷	۸	–
F_i	۱	۶	۱۳	۱۱	۱۰	۹	۵۰

تمامی محاسبات در جدول۸، آورده شده است :

جدول ۸

X	F_i	F_iX_i	$F_iX_i^۲$	$X_i - \overline{X}$	$(X_i - \overline{X})^۳$	$F_i(X_i - \overline{X})^۳$
۳	۱	۳	۹	−۳	−۲۷	−۲۷
۴	۶	۲۴	۹۶	−۲	−۸	−۴۸
۵	۱۳	۶۵	۳۲۵	−۱	−۱	−۱۳
۶	۱۱	۶۶	۳۹۶	۰	۰	۰
۷	۱۰	۷۰	۴۹۰	۱	۱	۱۰
۸	۹	۷۲	۵۷۶	۲	۸	۷۲
−	۵۰	۳۰۰	۱۸۹۲	−	−	−۶

$$\overline{X} = \frac{۳۰۰}{۵۰} = ۶$$

$$V(X) = \frac{\sum F_i X_i^۲}{N} - \overline{X}^۲$$

$$= \frac{۱۸۹۲}{۵۰} - ۶^۲ = ۳۷/۸۴ - ۳۶ = ۱/۸۴$$

$$\sigma = + \sqrt{V(X)} = \sqrt{۱/۸۴} = ۱/۳۶$$

$$\sigma^۳ = ۱/۳۶ \times ۱/۸۴ = ۲/۵۰$$

با استفاده از کمیّتهای محاسبه‌شده، طبق فرمول ۲۰، ضریب‌چولگی را محاسبه می‌کنیم :

$$M_{AS} = \frac{\frac{\sum F_i (X_i - \overline{X})^۳}{N}}{\sigma^۳} = \frac{\frac{-۶}{۵۰}}{۲/۵} = -۰/۰۴۸$$

بنابراین، چون ضریب چولگی، کوچکتر از ۰/۱ به‌دست آمده است، می‌توان گفت، توزیع تقریباً قرینه است.

سؤالها و تمرینها

۱ــ چرا در مطالعهٔ صفت‌متغیّر، برای اعضای جامعه، تنها به کمیّتهای متوسط نمی‌توان اکتفا کرد؟

۲ــ اندازهٔ پراکندگی چیست؟ ساختن اندازهٔ پراکندگی انحرافات مقادیر صفت از متوسط صفت، چه اهمیّتی دارد؟

۳ــ طول دامنهٔ تغییرات چیست؟

۴ــ طول دامنهٔ تغییرات را برای داده‌های زیر به‌دست آورید :

۳،۴،۷،۸ ،۱۰،۹،۵،۷،۱۱،۶،۱۳،۱۰،۱۵

۵ــ طول دامنه تغییرات را برای طول‌قد دانش‌آموزان که در جدول زیر داده شده است، محاسبه کنید.

X طول قد	۱۴۴−۱۴۸	۱۴۸−۱۵۲	۱۵۲−۱۵۶	۱۵۶−۱۶۰	۱۶۰−۱۶۴	
F_i فراوانی	۲	۶	۱۰	۱۵	۷	۴۰

۶ــ نقص طول دامنهٔ تغییرات به‌عنوان یک مشخّصه پراکندگی در چیست؟

۷ــ چرا از انحرافات مقادیر صفت، نسبت به متوسط حسابی، نمی‌توانیم متوسط انحرافات را محاسبه کنیم؟

۸ــ متوسط قدرمطلق انحرافات را تعریف کنید.

۹ــ متوسط قدرمطلق انحرافات را برای توزیع قد دانش‌آموزان در تمرین ۵ محاسبه کنید.

۱۰ــ چرا در عمل، از متوسّط قدرمطلق انحرافات، کمتر استفاده می‌شود؟

۱۱ــ متوسط مجذور انحرافات یا واریانس، چه مشخّصه‌ای است؟

۱۲ــ واریانس به‌عنوان مشخّصهٔ پراکندگی، برای برطرف کردنِ چه مشکلی در آمار، وارد گردیده است؟

۱۳ــ فرمولهای کاربردی یا فرمولهای محاسباتی واریانس، کدامها هستند؟ آنها را بنویسید.

۱۴ــ واریانس را برای طول قد دانش‌آموزان درتمرین ۵ محاسبه کنید.

۱۵ــ واریانس را برای اندازه‌های صفت که در زیر داده شده‌اند، محاسبه کنید.

X: ۳,۵,۳, ۶,۷,۲,۸,۱۰

۱۶ــ چرا به‌جای واریانس، برای نشان‌دادن پراکندگی صفت، از انحراف معیار، استفاده می‌شود؟

۱۷ــ انحراف معیار چیست؟ تعریف کنید.

۱۸ــ انحراف معیار را برای تمرین ۵ (طول قد دانش‌آموزان)، محاسبه کنید.

۱۹ــ برای توزیع فراوانیهای صفت که در زیر داده شده، انحراف معیار و متوسط قدرمطلق انحرافات را محاسبه کرده، آنها را باهم مقایسه کنید. به‌نظر شما کدام دقیق‌تر است؟

X	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	–
F_i	۴	۷	۱۰	۶	۲	۱	۳۰

۲۰ــ انحراف چارکی چیست؟ تعریف کنید.

۲۱ــ لزوم واردکردن انحراف چارکی به‌عنوان مشخّصه پراکندگی، در چیست؟

۲۲ــ چارکها، چه مفهومی را بیان می‌کنند؟

۲۳ــ چارک اول چیست؟

۲۴ــ چارک دوم چیست؟

۲۵ــ چارک سوم چیست؟

۲۶ــ انحراف چارکی را برای توزیع فراوانیهای زیر محاسبه کنید :

X	۸–۴	۱۲–۸	۱۶–۱۲	۲۰–۱۶	۲۴–۲۰	۲۴ به بالا
F_i	۳	۵	۸	۱۲	۶	۶

۲۷ــ مشخّصه‌های نسبی پراکندگی، چه مفهومی دارند؟

۲۸ــ چرا برای بیان پراکندگی صفت، از مشخّصه‌های نسبی پراکندگی استفاده می‌شود؟

۲۹ــ ضریب تغییرات چیست؟

۳۰ــ ضریب تغییرات را برای تمرین ۱۵ محاسبه کنید.

۳۱ــ ضریب تغییرات را برای تمرین ۱۹ محاسبه کنید.

۳۲ــ ضریب «انحراف خطی نسبی»، چیست؟ در چه مواردی از آن استفاده می‌کنند؟
۳۳ــ انحراف خطی نسبی را برای تمرین ۵ محاسبه کنید.
۳۴ــ انحراف خطی نسبی را برای تمرین ۱۹ محاسبه کنید.
۳۵ــ انحراف چارکی نسبی چیست؟ در چه مواردی از آن استفاده می‌کنند؟
۳۶ــ انحراف چارکی نسبی را برای تمرین ۲۶ محاسبه کنید.
۳۷ــ برای پی‌بردن به خصوصیّات عمومی توزیعها، از چه نوع مشخّصه‌هایی استفاده می‌شود؟
۳۸ــ چه نوع توزیعی را، توزیع قرینه گویند؟ تعریف کنید.
۳۹ــ توزیع غیرقرینه یا توزیع چوله، چه نوع توزیعی است؟
۴۰ــ مشخّصه چولگی یا ضریب چولگی چیست؟ چه خصوصیّاتی از توزیع صفت را بیان می‌کند؟
۴۱ــ ضریب چولگی پیرسن، بر چه اساسی ساخته می‌شود؟
۴۲ــ ضریب چولگی پیرسن را برای تمرین ۱۵محاسبه کنید.
۴۳ــ ضریب چولگی پیرسن را برای تمرین ۱۹ محاسبه کنید.
۴۴ــ ضریب چولگی منفی، چگونه تعبیر می‌شود؟
۴۵ــ ضریب چولگی مثبت، چگونه تعبیر می‌شود؟
۴۶ــ ضریب چولگی براساس متوسط توان سوم انحرافات چیست؟ فرمول آن‌را بنویسید.
۴۷ــ ضریب چولگی براساس متوسط توان سوم انحرافات را برای تمرین ۱۵ محاسبه کنید.
۴۸ــ ضریب چولگی براساس متوسّط توان سوم انحرافات را برای تمرین ۱۹ محاسبه کنید.

خودآزمونهای چهارگزینه‌ای

۱ــ کدام‌یک از مشخّصه‌های پراکندگی زیر، ازنظر دقت، اعتبار بیشتری دارد؟

الف ــ دامنهٔ تغییرات　　　ب ــ واریانس

ج ــ متوسط قدرمطلق انحرافات　　　د ــ انحراف معیار

۲ــ از روی یک نمونه $n=۱۰۰$ در جامعه، کمیّتهای زیر محاسبه شده است :

$$n=۱۰۰ \quad \sum F_i X_i = ۱۲۰۰ \quad \sum F_i (X_i - \overline{X})^۲ = ۳۶$$

واریانس جامعه کدام است؟

الف ــ ۰/۳۶ ‏ ‏ ‏ ‏ ب ــ ۰/۱۶ ‏ ‏ ‏ ‏ ج ــ ۰/۶ ‏ ‏ ‏ ‏ د ــ ۰/۱۲

۳ــ اگر مجموع توان دوم، ۱۰ اندازه از صفت متغیّر $\sum X^{2} = ۱۷۰۰$ و میانگین آنها $\overline{X} = ۱۲$ باشد، واریانس X کدام است؟

الف ــ ۶ ‏ ‏ ‏ ‏ ب ــ ۱۶ ‏ ‏ ‏ ‏ ج ــ ۲۶ ‏ ‏ ‏ ‏ د ــ صفر

۴ــ با معلوم بودن $\overline{X} = ۱۰$ و $\sum X^{2} = ۱۲۰۰$ ، $V(X) = ۲۰$ ، حجم جامعه چقدر بوده است؟

الف ــ ۸ ‏ ‏ ‏ ‏ ب ــ ۲۰ ‏ ‏ ‏ ‏ ج ــ ۱۲ ‏ ‏ ‏ ‏ د ــ ۱۰

۵ــ انحراف چارکی برای توصیف کدام مشخّصهٔ صفت، به‌کار می‌رود؟

الف ــ مشخّصهٔ مرکزی ‏ ‏ ‏ ‏ ب ــ مشخّصهٔ پراکندگی

ج ــ مشخّصهٔ چولگی ‏ ‏ ‏ ‏ د ــ هیچ‌کدام

۶ــ اگر بین مشخّصه‌های مرکزی رابطهٔ $\overline{X} > Me > Mo$ برقرار باشد، کدام گزینه برای صفت متغیّر درست است؟

الف ــ چولگی به چپ است. ‏ ‏ ‏ ‏ ب ــ چولگی ندارد.

ج ــ چولگی به راست است. ‏ ‏ ‏ ‏ د ــ توزیع قرینه است.

۷ــ کدام‌یک از روابط زیر، فرمول ضریب چولگی بر پایه میانگین توان سوم انحرافات است؟

الف ــ $\dfrac{\sum F_i (X_i - \overline{X})^{۳}}{\sigma^{۳}}$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب ــ $\dfrac{\dfrac{\sum F_i (X_i - \overline{X})^{۲}}{N}}{\sigma^{۳}}$

ج ــ $\dfrac{\sum F_i (X_i - \overline{X})^{۳}}{N}$ ‏ ‏ ‏ ‏ د ــ $\dfrac{\dfrac{\sum F_i (X_i - \overline{X})^{۳}}{N}}{\sigma^{۳}}$

۸ــ کدام گزینه تعریف ضریب تغییرات صفت می‌باشد؟

الف ــ نسبت میانگین بر انحراف معیار صفت

ب ــ نسبت میانه بر انحراف معیار صفت

ج ــ نسبت انحراف معیار بر میانه صفت

د ــ نسبت انحراف معیار بر میانگین صفت

۹ــ انحراف خطی نسبی از کدام گزینه به‌دست می‌آید؟

الف ــ $\frac{AD}{\overline{X}}$ ب ــ $\frac{QD}{\overline{X}}$ ج ــ $\frac{\sigma}{Me}$ د ــ $\frac{V(X)}{\overline{X}}$

۱۰ــ کدام یک از گزینه‌های زیر ضریب انحراف چارکی را بیان می‌کند؟

الف ــ $\frac{Q_۳ - Q_۲}{۲}$ ب ــ $\frac{QD}{Me}$

ج ــ $\frac{Q_۳ - Q_۱}{۲}$ د ــ $\frac{Q_۳ - Q_۱}{Me}$