«حوادث آینده را نمی‌توان دقیقاً پیش‌بینی کرد،
امّا احتمال پیش‌آمدهای آینده را می‌توان محاسبه کرد.»

فصل دوم

احتمال (اندازه‌گیری مقدار شانس)

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ مفهوم مجموعه را با مثال بیان کرده، اجتماع، اشتراک و متمّم را تعریف کند.

۲ ــ آزمایش و فضای نمونه‌ای را تعریف کند.

۳ ــ پیشامد و انواع آن را تبیین نماید.

۴ ــ برداشتهای مختلف از احتمال را بیان کند.

۵ ــ اصول قراردادی (موضوعه) احتمال را برشمارد.

۶ ــ احتمال پیشامدها را بر مبنای فراوانی نسبی محاسبه کند.

۷ ــ احتمال متمّم یک پیشامد را محاسبه کند.

۸ ــ احتمال اجتماع و اشتراک دو پیشامد را محاسبه کند.

۹ ــ احتمال شرطی را برای پیشامدها محاسبه کند.

مقدمه

واژه « احتمال » را در صحبتهای روزمرّهٔ اشخاص زیاد شنیده‌اید. مثلاً وقتی هوا ابری است، می‌گویند : احتمال دارد که باران ببارد و یا فرضاً دانش‌آموزی که با جدیّت درس می‌خواند می‌گویند که :احتمال قبول شدن این دانش‌آموز در امتحانات **زیاد** است و در مورد دانش‌آموزی که وقت خود را بیهوده تلف می‌کند و کار مدرسه‌اش را جدّی نمی‌گیرد، می‌گویند : احتمال قبول شدن در امتحانات برای این دانش‌آموز **کم** است. به کار بردن واژه‌های « زیاد » و « کم » در کنار کلمهٔ احتمال این معنی

را می‌رساند که احتمال قابل اندازه‌گیری است. در این فصل، با مفهوم احتمال و چگونگی اندازه‌گیری آن آشنا خواهید شد.

امروزه از موضوع و تئوری احتمال در برنامه‌ریزیهای اقتصادی، اجتماعی تکنولوژیکی، سیاسی و بسیاری دیگر از پدیده‌های علمی نظیر زیست‌شناسی، روانشناسی، جامعه‌شناسی، آموزش و پرورش، پزشکی و غیره استفاده می‌شود.

نکته: به طور کلی احتمالات درباره پدیده‌هایی قابل طرح است که نمی‌توان نتیجه قطعی آنها را قبل از وقوع تعیین کرد. چنین پدیده‌هایی را پدیده‌های تصادفی می‌گویند.

مروری بر نظریهٔ مجموعه‌ها

در این قسمت برخی از مفاهیم اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها را، که در طرح مباحث احتمال مورد نیاز خواهد بود، یادآوری می‌کنیم.

مجموعه چیست؟

هر فهرست یا گردآورده‌ای از اشیا را « مجموعه » گویند. اشیایی را که مجموعه شامل آنها می‌شود عناصر یا اعضای مجموعه نامند. همه مجموعه‌های تحت بررسی، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ ثابتی به نام « مجموعهٔ جهانی » فرض می‌شوند. مجموعهٔ جهانی را غالباً با علامت U و مجموعهٔ تهی، یعنی مجموعهٔ بدون عضو را با علامت $\varnothing$ نشان می‌دهند.

اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه A و B عبارت است از مجموعه‌ای که عناصر آن یا به A تعلّق دارد، یا به B (و یا به هر دو). اجتماع A و B را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهند.

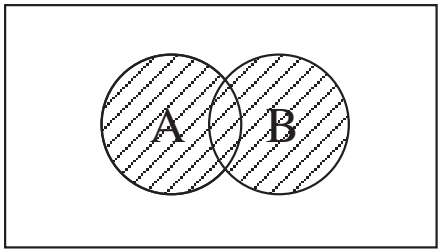
اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه A و B که با نماد $A \cap B$ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه‌ای

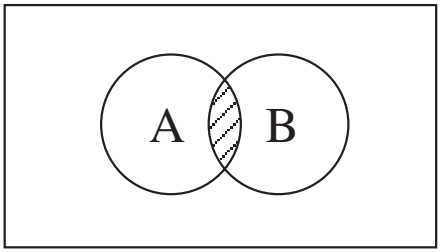
که عناصر آن هم به A تعلّق دارند و هم به B. اگر $A \cap B = \varnothing$ باشد، A و B را مجزّا از هم می‌نامند.

متمّم دو مجموعه (= مکمّل دو مجموعه)

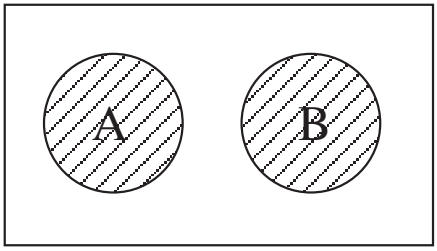
متمّم مطلق یک مجموعه مانند A از یک مجموعهٔ جهانی که با علامت A^c [1] یا A' نشان داده می‌شود، عبارت از مجموعه‌ای است که عناصر آن به A تعلّق ندارند.(گروهی از ریاضی‌دانان واژه مکمّل را به جای متمّم به کار می‌برند.) در نمودارهای ۱ تا ۴ که به نمودارهای وِن[2] شهرت دارند، مفاهیم بالا را به صورت هندسی نشان داده‌ایم.



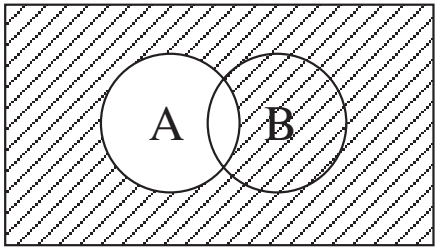
نمودار ۱ــ $A \cup B$ سایه خورده است.



نمودار ۲ــ $A \cap B$ سایه خورده است.



نمودار۳ــ $A \cup B$ سایه خورده است.



نمودار ۴ــ A^c سایه خورده است.

۱ــ حرف C بالای A از کلمه Complementary گرفته شده است که به معنای مکمل می‌باشد.

۲ــ وِن «Ven» دانشمندی است که اوّلین بار از این نمودارها استفاده کرده است.

زیر پیشامد (= زیر مجموعه)

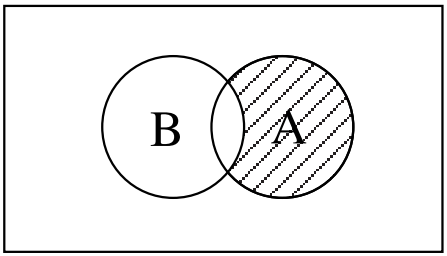
اگر هر پیشامد ساده که در A هست در B نیز وجود داشته باشد، می‌گویند A زیرپیشامد B است (که به‌صورت $A \subset B$ نشان داده می‌شود.) توجه دارید که رخ دادن A باعث رخ دادن B می‌شود، اما لزوماً عکس آن درست نیست.

پیشامدهای برابر

اگر A زیرپیشامد B و B زیرپیشامد A باشد می‌گویند A و B برابراند. (که به‌صورت $A = B$ نشان داده می‌شود.)

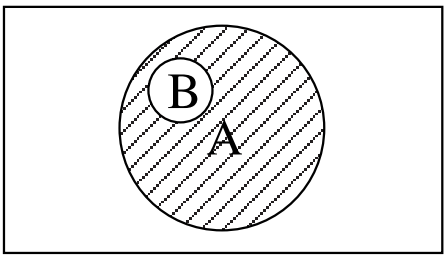
تفاضل دو پیشامد A و B

پیشامدی که از تمام پیشامدهای ساده که در A هستند ولی در B نباشند تشکیل شده باشد، تفاضل A از B نامیده شده و به‌صورت $A - B$ (A نه B) نشان داده می‌شود. به تصویر زیر نگاه کنید :



نمودار ۵ــ A–B هاشور خورده است.

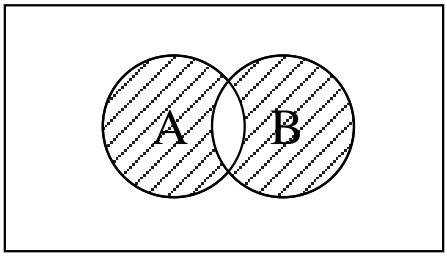
ممکن است A زیرمجموعه B باشد، در این صورت $A - B$ را یک تفاضل واقعی می‌نامند. در تصویر زیر تفاضل واقعی $A - B$ سایه خورده است.



نمودار ۶ــ A–B به‌صورت تفاضل واقعی

تفاضل متقارن A و B

پیشامدی که از تمام پیشامدهای ساده که یا در A یا در B امّا نه در هر دو باشند، تشکیل شده باشد، تفاضل متقارن A و B نامیده می‌شود که با علامت $A \Delta B$ نشان داده می‌شود. (یا A یا B نه هر دو) در تصویر مقابل تفاضل متقارن A و B را مشاهده می‌کنید.



نمودار ۷ــ $A \Delta B$ سایه خورده است.

مثال زیر می‌تواند در بیان مفاهیم اساسی نظریه مجموعه‌ها، شما را کمک کند.*

مثال ــ فرض کنید دو عدد کارت سفید با شماره‌های ۱ و ۲، سه عدد کارت قرمز با شماره‌های ۳، ۴ و ۵ و دو عدد کارت سبز با شماره‌های ۶ و ۷ را که هم‌اندازه و هم‌شکل هستند به‌خوبی مخلوط کرده، به‌طور تصادفی یک کارت از هفت کارت را بیرون بیاوریم در این صورت اگر A پیشامد کارت بزرگتر از ۱ و B پیشامد کارت کوچکتر از ۵ باشد خواهیم داشت:

$A = \{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$

$B = \{۱,۲,۳,۴\}$

با این ترتیب می‌توان نوشت:

فضای نمونه‌ای	$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$
اجتماع دو پیشامد A و B	$A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$
اشتراک دو پیشامد A و B	$A \cap B = \{۲,۳,۴\}$
مکمّل پیشامد A	$A' = \{۱\}$
مکمّل پیشامد B	$B' = \{۵,۶,۷\}$
تفاضل B از A	$A - B = \{۵,۶,۷\}$
تفاضل A از B	$B - A = \{۱\}$
تفاضل متقارن A و B	$A \Delta B = \{۱,۵,۶,۷\}$

* این مثال از کتاب آمار و احتمال مقدماتی تألیف دکتر جواد بهبودیان اقتباس شده است.

مفاهیم اساسی احتمال (اصطلاحات)

آزمایش و انواع آن

واژهٔ آزمایش در مبحث احتمال به معنای هر نوع تحقیق عملی است، که بر اثر انجام آن، داده‌های آماری به دست می‌آیند. دو نوع آزمایش متمایز، وجود دارد :

آزمایش تجربی ــ آزمایش تجربی عبارت است از فرآیند شناخته شده‌ای که به نتیجهٔ معیّنی منجر شود و در شرایط کنترل شده قابلیّت تکرار را داشته باشد. مانند نتایجی که در آزمایشهای درس شیمی، انتظار آنها را داریم. مثل اینکه بر اثر واکنش اسیدسولفوریک گرم و غلیظ و مس، انتظار داریم که سولفات مس و انیدرید سولفورو و دو مولکول آب حاصل شود.

آزمایش تجربی ــ تصادفی ــ آزمایشهای تجربی ــ تصادفی به آن دسته از آزمایشها گویند که عامل تصادف در نتیجهٔ آنها دخالت داشته باشد. و به همین دلیل، نتیجهٔ قطعی آنها را قبل از انجام آزمایش نمی‌توان پیش‌بینی کرد. مانند نتیجهٔ پرتاب یک سکّهٔ سالم[1] (ایده‌آل) که یا روی سکّه یا پشت سکّه ظاهر خواهد شد.

تئوری احتمالات در مورد آزمایشهای تجربی کاربردی ندارد، زیرا در شرایط اطمینان، انجام می‌شوند، در حالی که این تئوری می‌تواند در مورد آزمایشهای تجربی ــ تصادفی، که در شرایط عدم اطمینان انجام می‌شوند، کاربردهای فراوانی داشته باشد. می‌توان گفت به‌طورکلی هرگاه انسان با عدم یقین مواجه می‌شود، واژه احتمال را به‌کار می‌برد.

فضای نمونه‌ای چیست؟

مجموعهٔ نتایج ممکن و متمایز یک آزمایش تجربی ــ تصادفی را « فضای نمونه‌ای » گویند که با علامت S نشان داده می‌شود. مثلاً اگر روی سکّه را با علامت H (از کلمهٔ Head) و پشت سکّه را با نماد T (از واژهٔ Tail) نشان دهیم، در پرتاب یک سکّهٔ سالم، خواهیم داشت $S=\{H,T\}$. اگر تعداد عضوهای یک فضای نمونه‌ای به گونه‌ای باشند که بتوان عددی را به تعداد عناصر فضای نمونه‌ای نسبت داد، فضا را متناهی (محدود) می‌نامند و در غیر این صورت، فضای نمونه‌ای را نامتناهی (نامحدود) گویند. مثلاً اگر سکّه‌ای را آنقدر بریزید تا سرانجام روی سکّه ظاهر شود، فضای

۱ــ سکه سالم یا ایده‌آل سکه‌ای است که دو طرف آن برای بالا قرار گرفتن، شانس مساوی داشته باشند. چنین سکه‌هایی را، سکه‌های نااریب گویند.

نمونه‌ای از نوع نامتناهی خواهد بود، زیرا معلوم نیست که در چندمین نوبت، روی سکّه ظاهر خواهد شد. نگاه کنید :

S = { H,TH,TTH,TTTH,... }

چنانچه عضوهای فضاهای نمونه‌ای متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر باشند، می‌گویند فضای نمونه‌ای گسسته است. اما اگر فضای نمونه‌ای، مجموعه‌ای مشتمل بر تمامی‌اعداد متعلّق به یک فاصله یا اجتماع چند فاصله باشد، آن فضا را اصطلاحاً پیوسته می‌نامند. طول خطوط، سطح زیرمنحنیها و حجم اجسام فضایی از نوع فضاهای نمونه‌ای پیوسته محسوب می‌شوند.

برآمد[1] چیست؟

به هر نتیجه از نتایج ممکن یک آزمایش تجربی ــ تصادفی یک «برآمد» گفته می‌شود.

مثلاً اگر سکّه‌ای را سه بار پرتاب کنیم،فضای نمونه‌ای شامل $(۲^۳ = ۸)$ برآمد زیر خواهد بود :

S = { HHH-HHT- HTH - HTT - THH - THT - TTH - TTT }

تذکّر : برای تعیین تعداد عضوهای هر فضای نمونه‌ای گسسته، تعداد حالتهای یک بار آزمایش را به‌توانِ تعداد تکرار آزمایش برسانید.

تذکر: تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای پیوسته، مانند طول یا سطح یا حجم بی‌نهایت بوده و قابل شمارش نیست.

پیشامد (رویداد) چیست؟

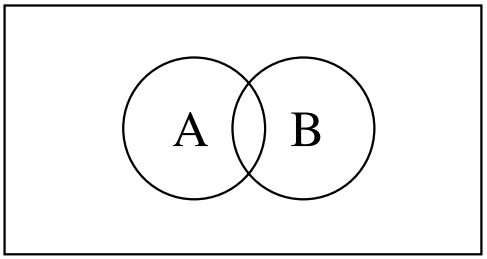
هر زیر مجموعه از مجموعهٔ فضای نمونه‌ای S را یک « پیشامد » گویند. پیشامدها را با حروف A، B، C و... نشان می‌دهند. پیشامد می‌تواند ساده یا مرکّب باشد.اگر تنها یک برآمد، در کلّ برآمدها دارای خصوصیّتی مشخّص و قابل تعریف کردن باشد، پیشامد مزبور را ساده نامند. مانند : آمدن دقیقاً سه بار روی سکّه در پرتاب یک سکّه سه بار. امّا اگر یک پیشامد، مجموعه‌ای از چند برآمد باشد که خصوصیّت مشترکی را دارا باشند، اصطلاحاً به آن «پیشامد مرکّب » گفته می‌شود. مانند ظاهر شدن دوبار روی سکّه در پرتاب یک سکّه سه بار.

---

۱ ــ Outcome

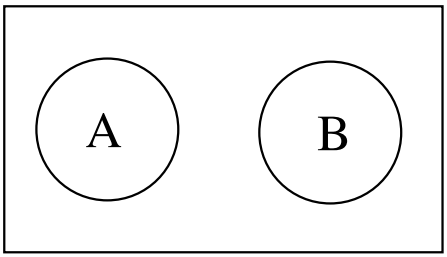
پیشامدهای ناسازگار و سازگار[1]

A و B را ناسازگار گویند هرگاه نتوانند همزمان رخ دهند. مانند تولّد پسر و دختر در یک زایمان با یک فرزند. یا آمدن روی سکّه و پشت سکّه به طور همزمان در پرتاب یک سکّه یک بار. امّا **دو پیشامد A و B، سازگار خواهند بود، هرگاه بتوانند همزمان رخ دهند.** مثل اینکه در یک جعبه، پنج مهرهٔ زرد با شماره‌های ۱ تا ۵ و پانزده مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۱۵ وجود داشته باشد و یک مهره به تصادف بیرون بیاوریم و بخواهیم مهرهٔ استخراج شده، زرد یا عددی کوچکتر از چهار باشد. در نمودارهای ۸ و ۹ با پیشامدهای سازگار و ناسازگار به صورت هندسی آشنا می‌شوید :



$A \cap B \neq \varnothing$

نمودار ۸ ــ دو پیشامد سازگار



$A \cap B = \varnothing$

نمودار ۹ ــ دو پیشامد ناسازگار

پیشامدهای مستقل (نابسته) و غیرمستقل (وابسته) ــ هرگاه وقوع A تأثیری در مقدار احتمال وقوع B نداشته باشد، پیشامدهای A و B را مستقل گویند، امّا اگر وقوع A در مقدار احتمال Bمؤثّر باشد و مقدار احتمال را تغییر دهد، A و B را غیرمستقل گویند. مثلاً اگر از یک گلدان با ۱۰ مهرهٔ سفید و ۲۰ مهرهٔ سیاه، دو مهره یک بار متوالیاً و با جایگذاری و یک بار متوالیاً و بدون جایگذاری استخراج کنیم و بخواهیم هر دو مهره سفید باشند، در حالت اوّل سفید بودن مهرهٔ اوّل و سفید بودن مهرهٔ دوم دو پیشامد مستقل خواهند بود، اما در حالت دوم، این دو پیشامد غیرمستقل محسوب می‌شوند، زیرا در حالت بدون جایگذاری، سفید بودن مهرهٔ اول در احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم تأثیر خواهد گذاشت.

پیشامدهای حتمی، غیرممکن و تصادفی ــ پیشامدهای موجود را از نظر شدّت و ضعف مقدار ریاضی احتمال به ۳ دسته تقسیم می‌کنند :

ــ ***پیشامدهای حتمی (یقینی)*** ــ پیشامدی را حتمی‌گویند که تحت هر شرایطی به‌طور

۱ــ پیشامدهای ناسازگار را مانعةالجمع و پیشامدهای سازگار را غیرمانعةالجمع نیز می‌گویند.

اجتناب‌ناپذیری رخ خواهد داد. در صفحات بعد، خواهیم دید که مقدار احتمال چنین پیشامدهایی مساوی واحد (= ۱) خواهد بود (یعنی امکان وقوع آنها صددرصد است).

ــ ***پیشامدهای غیرممکن (محال)*** ــ پیشامدی را غیرممکن گویند که تحت هیچ شرایطی امکان وقوع نداشته باشد. مقدار احتمال چنین پیشامدهایی مساوی صفر است.

ــ ***پیشامدهای تصادفی (احتمالی)*** ــ به پیشامدهایی که امکان وقوع یا عدم وقوع آنها وجود دارد، پیشامدهای تصادفی گفته می‌شود. مقدار احتمال چنین پیشامدهایی بین صفر و یک است.

برای مثال اگر در داخل یک گلدان ۵ سکّه ۱۰ ریالی وجود داشته باشد و یک سکّه به‌طور تصادفی بیرون بیاوریم، آمدن یک سکّه ۱۰ ریالی، یک پیشامد حتمی و آمدن یک سکّه ۲۰ ریالی یک پیشامد غیرممکن است، اما اگر علاوه بر ۵ سکّهٔ ۱۰ ریالی در داخل گلدان، ۵ سکّه ۲۰ ریالی نیز وجود داشته باشد و یک سکّه بیرون بیاوریم، آمدن یک سکّه ۱۰ ریالی یک پیشامد تصادفی است.

خودآزمایی ــ در زندگی شخصی خودتان سه پیشامد حتمی و سه پیشامد غیرممکن و سه پیشامد احتمالی بیان نمایید.

برداشتهای مختلف از احتمال

واژهٔ احتمال را می‌توان معادل کلمهٔ « شانس » وقوع و یا عدم وقوع پیشامدهای معیّن تلقّی کرد. مثلاً وقتی یک سکّه را پرتاب می‌کنیم، احتمال آمدن روی سکّه، معادل است با شانس آمدن روی سکّه. یا احتمال اینکه دانشجویی از سلف‌سرویس دانشکده‌ای استفاده کند، معادل است با شانس استفاده کردنِ دانشجو از سلف سرویس. و یا احتمال اینکه کالای جدیدی در بازار موفق باشد، در حقیقت منظورِ همان شانس موفقیّت کالای جدید در بازار می‌باشد. هر کدام از این سه مثال، نشان‌دهندهٔ برخوردی خاص با مفهوم احتمال است. در مثال اول (پرتاب سکّه) پیشامد مطرح شده به فضای نمونه‌ای تعلّق دارد با تعدادی برآمد هم شانس. چنین برداشتی را « **احتمال کلاسیک** » نام داده‌اند.

هر یک از برآمدها درچنین آزمایشها، شانسی مساوی $\frac{1}{n}$ خواهند داشت. (اگر آزمایش دارای n برآمد باشد.)

اولین بار « لاپلاس » در قرن هفدهم، تئوری احتمال را با این برداشت، پایه‌گذاری کرد.

در مثال دوم (احتمال استفاده کردن دانشجو از سلف‌سرویس) پیشامدی مطرح شده که فضای نمونه‌ای آن دارای برآمدهای هم شانس نیستند،یعنی تعداد کلّ موفقیّتها و تعداد کل پیشامدهای ممکن از قبل مشخص نیستند بلکه بر اساس مشاهدات نمونه‌ای معلوم خواهند شد.چنین برداشتی را «**احتمال تجربی ــ کلاسیک** » گویند.

امّا در مثال سوم (احتمال موفقیّت کالای جدید در بازار) نمی‌توان به صورت عینی، تعداد موفقیّتها و تعداد کل حالات را مشخص کرد و لذا محاسبهٔ احتمال،جنبه ذهنی و شخصی پیدا کرده،متکی بر ادراک و شخصیّت فرد در حدس‌زدن می‌باشد. به چنین برداشتی « **احتمال ذهنی ــ شخصی** » نام داده‌اند.اکثر تصمیم‌گیریهای اقتصادی ــ تجاری با تکیه بر چنین برداشتی از احتمال صورت می‌پذیرند.برداشت احتمال کلاسیک را به این دلیل که فضای نمونه‌ای آن حامل برآمدهای هم‌شانس می‌باشد،« **مدل احتمال یکنواخت**» و برداشت احتمال تجربی ــ کلاسیک را به این دلیل که فضای نمونه‌ای آن حامل برآمدهای غیر هم‌شانس می‌باشد، « **مدل احتمال غیر یکنواخت** » می‌نامند.

اصول قراردادی (موضوعه) احتمال

چون برداشتهای سه گانهٔ احتمال،دارای این ضعف مهم هستند که برای تعریف احتمال، ازخود واژهٔ احتمال استفاده می‌کنند، لذا ریاضیدان معروف روس، آندره کولموگروف[1] احتمال را یک مفهوم ثابت و غیرقابل تعریف درنظر گرفت، (مثل اینکه در هندسه نقطه را یک مفهوم ثابت و تعریف‌نشدنی در نظرمی‌گیرند.) و سه اصل زیر را به عنوان اصول بدیهی، ثابت و بی‌نیاز از استدلال، عنوان کرد :

اصل اوّل

احتمال رخ دادن هر برآمد در هر فضای نمونه‌ای، یک عدد غیرمنفی است، به‌طوری که اگرفضای نمونه‌ای S را با برآمدهای $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ در نظر بگیریم،خواهیم داشت :

$$\boxed{0 \leq P \leq 1} \qquad \text{(فرمول۱)}$$

۱ ــ Kolmogrov André

اصل دوم

مجموع احتمالهای رخ دادن تمامی برآمدهای فضای نمونه‌ای S، مساوی یک خواهد بود. یعنی اگر S دارای چند برآمد باشد :

$$S = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots e_n$$
$$P_{(s)} = P_{(e_1)} + P_{(e_2)} + P_{(e_3)} + \ldots + P_{(e_n)} = 1$$

(فرمول ۲)

اصل سوم

احتمال رخ دادن هر پیشامد مشخص (مانند پیشامد A) برابر است با مجموع احتمالهای رخ‌دادن برآمدهایی که پیشامد مورد نظر را تشکیل می‌دهند. مثلاً برای پیشامد A که از چند برآمد ناسازگار تشکیل شده است :

$$A = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_k$$
$$P_{(A)} = P_{(e_1)} + P_{(e_2)} + P_{(e_3)} + \ldots + P_{(e_k)}$$

(فرمول۳)

تذکّر: سایر قوانین احتمال را می‌توان با کمک سه اصل بالا استنتاج کرد.

فرمولهای ریاضی احتمال

تعریف احتمال بر مبنای فراوانی نسبی (= احتمال نظری)

از سه نظریه و برداشتهای مختلف احتمال و با استفاده از منطق فراوانی نسبی (که در درس مفاهیم و روشهای آماری (۱) با آن آشنا شده‌اید.) می‌توان قانونمندی زیر را برای محاسبهٔ احتمال یک پیشامد بیان کرد :

$$\text{مقدار احتمال هر پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد آن پیشامد}}{\text{تعداد کلّ حالات ممکن آزمایش}}$$

توجّه نمایید که از دستور بالا فقط وقتی استفاده می‌کنیم که نتایج یک آزمایش هم‌شانس باشند.

مثلاً اگر پیشامدی مانند A را در فضای نمونه‌ای S در نظر بگیریم، و احتمال را با علامت P (ازکلمهٔ انگلیسی Probability) نشان دهیم،خواهیم داشت :

(فرمول ۴)

$$P_{(A)} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

برای توجیه بیشتر این دستور،به یک مثال توجّه کنید :

شما وقتی یک سکّه سالم را یک بار پرتاب می‌کنید، چرا و به کدامین دلیل احتمال آمدن روی سکّه را مساوی $\frac{۱}{۲}$ می‌پندارید؟ آیا از هر دو بار پرتاب یک سکّهٔ سالم حتماً یک بار آن روی سکّه بالا قرار می‌گیرد؟

طبیعی است که جواب این سؤال منفی است. اما چرا احتمال روی سکّه را $\frac{۱}{۲}$ می‌دانند؟ دلیل این امر، آن است که اگر سکّه سالم باشد[۱] (سکّه نااریب باشد.) با افزوده شدن بر دفعات تکرار آزمایش، نسبت دفعاتی که روی سکّه بالا قرار می‌گیرد، به کل دفعات پرتاب به سمت $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند. درحالی که اگر سکّه اریب باشد،(مثلاً چکش خورده باشد.) نسبت مزبور به سوی احتمالی متفاوت از $\frac{۱}{۲}$ گرایش پیدا می‌کند :

هرگاه تعداد آزمایشهای تصادفی را به سمت بی نهایت میل دهیم، فراوانی نسبی نیز به سمت مقدار احتمال پیشامد مورد نظر،میل خواهد کرد.

تذکّر: هرگاه شمارش حالات مساعد و حالات ممکن، به علت بی‌شمار بودن آنها امکان‌پذیر نباشد، برای محاسبهٔ احتمال از طول یا مساحت یا حجم حالات مساعد و حالات ممکن، استفاده می‌کنند. این شیوه محاسبه احتمال را اصطلاحاً «احتمال هندسی» نام داده‌اند.

مثال ۱ــ در گلدانی ۴ مهرهٔ سفید،۶ مهرهٔ سیاه و ۱۰مهرهٔ آبی وجود دارد.(مهره‌ها صرفنظر از رنگ،کاملاً یکسان هستند.) از این ظرف، یک مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سیاه باشد،چقدر است؟

$$P_{(\text{سیاه بودن})} = \frac{۶}{۲۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

۱ــ به سکه سالم یا به تاس سالم، اصطلاحاً سکه ایده‌ال یا تاس ایده‌ال گفته می‌شود.

این مثال، از مدل احتمال غیر یکنواخت،تبعیّت می‌کند زیرا برآمدهای سفید و سیاه و آبی هم‌شانس نیستند.

مثال ۲ــ سکّه سالمی‌را دوبار پشت سر هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آمدن هر دو بار پشت سکّه چقدر است؟

$$S=\{ HH- HT - TH - TT \}$$

$$P_{(TT)} = \frac{۱}{۴}$$

ملاحظه می‌کنید که این مثال، منطبق با مدل احتمال یکنواخت می‌باشد.(زیرا هر یک از برآمدهای HH - HT - THو TT هم‌شانس هستند.)

احتمال متمّم یک پیشامد

با توجّه به اینکه **اگر A یک پیشامد از S باشد، A^c پیشامدی است به نام متمم A (یا مکمّل A) به طوری که عضوهایش به‌جز عضوهای A باشند**[۱]. و با توجه به اصل دوم از اصول قراردادی (موضوعه) احتمال. (مجموع احتمالهای رخ دادن تمامی برآمدهای فضای نمونه‌ای S باید مساوی یک باشند.) می‌توان نوشت :

$$\boxed{P_{(A)} + P_{(A^c)} = ۱} \overset{\text{بنابراین}}{\Rightarrow} P_{(AC)} = ۱ - P_{(A)} \qquad \text{(فرمول ۵)}$$

معمولاً از رابطه بالا وقتی استفاده می‌کنیم که بخواهیم احتمال رخ ندادن یک پیشامد را محاسبه نماییم.

مثال ۳ــ کارمندان یک شرکت را از نظر اهلیّت و جنسیّت، مورد بررسی قرار داده‌ایم، جدول زیر حاصل شده است :

اهلیت → / جنسیت ↓	تهرانی	شیرازی	تبریزی	کرمانی	مشهدی	جمع
زن	۵	۴	۳	۶	۷	۲۵
مرد	۸	۷	۵	۱۰	۱۵	۴۵
جمع	۱۳	۱۱	۸	۱۶	۲۲	۷۰

۱ــ بنابراین می‌توان گفت که بین A و A^c رابطه $A \cap A^c = \varnothing$ برقرار است.

اگر یک کارمند را به طور تصادفی انتخاب کنیم،چقدر احتمال هست :

اولاً ــ تبریزی باشد؟ (A)

ثانیاً ــ تبریزی نباشد؟ (A^c)

$$P_{(A)} = \frac{۸}{۷۰} = \frac{۴}{۳۵}$$

$$P_{(A^c)} = ۱ - \frac{۴}{۳۵} = \frac{۳۱}{۳۵}$$

مثال بالا، مثال بسیار ساده‌ای برای استفاده از احتمال متمّم «یا احتمال مکمّل» است. در مواردی که مثال اندکی پیچیده‌تر می‌شود، قانون ۲ــ۵ راهگشا خواهد بود. به‌عنوان نمونه می‌توان به موردی اشاره کرد که مثلاً بخواهیم احتمال این امر را محاسبه کنیم که از افراد یک خانواده ۵ نفره چقدر احتمال هست که حداقل ۲ نفرشان در یک روز متولّد شده باشند؟

حل: احتمال حداقل ۲ نفر از ۵ نفر در یک روز از سال متولد شده باشند = $P_{(A)}$

پس $P_{(A')}$ را محاسبه کرده، مقدار آن را از یک کم می‌کنیم

احتمال آنکه تولد هر ۵ نفر در یک روز نباشد = $P_{(A')}$

$$P_{(A')} = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ۳۶۲ \times ۳۶۱}{(۳۶۵)^۵}$$

و درنتیجه :

$$P_{(A)} = ۱ - \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ۳۶۲ \times ۳۶۱}{(۳۶۵)^۵}$$

توضیح: توجّه دارید که مخرج کسر بالا (یعنی تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای) طبق اصل ضرب برای ۵ نفر از $۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵$ یعنی $(۳۶۵)^۵$ به‌دست آمده است زیرا هرکدام از افراد خانواده می‌توانسته‌اند در یکی از ۳۶۵ روز سال متولد شده باشند.(سال کبیسه را صرفنظر کرده‌ایم.)

احتمال اجتماع دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند،احتمال اجتماع آنها از فرمول ۶ به‌دست می‌آید :

$$\boxed{P_{(A \cup B)} = P_{(A)} + P_{(B)}}$$ (فرمول ۶)

در حالی که اگر A و B سازگار باشند، احتمال اجتماع آنها، طبق فرمول ۷ محاسبه خواهد شد.

$$P_{(A\cup B)} = P_{(A)} + P_{(B)} - P_{(A\cap B)}$$ (فرمول ۷)

مثال ۴ــ اگر از جدول مثال ۳ یک نفر به طور تصادفی انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد که اولاً فرد انتخاب شده، تهرانی یا تبریزی باشد؟ ثانیاً، احتمال اینکه فرد انتخاب شده تهرانی یا زن باشد، چقدر است؟

$$P_{(\text{تهرانی یا تبریزی})} = P_{(\text{تهرانی})} + P_{(\text{تبریزی})} = \frac{۱۳}{۷۰} + \frac{۸}{۷۰} = \frac{۲۱}{۷۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

$$P_{(\text{تهرانی یا زن})} = P_{(\text{تهرانی})} + P_{(\text{زن})} - P_{(\text{تهرانی و زن})} = \frac{۱۳}{۷۰} + \frac{۲۵}{۷۰} - \frac{۵}{۷۰} = \frac{۳۳}{۷۰}$$

احتمال اشتراک دو پیشامد

اگر A وB دو پیشامد مستقل از همدیگر باشند،طبق اصل ضرب،احتمال اشتراک آنها ازحاصلضرب احتمالهایشان به دست خواهد آمد. (به‌شرط آنکه احتمال هریک از پیشامدهای A و B مخالف صفر باشد.)

یا

$$P_{(A\cap B)} = P_{(A)} \times P_{(B)} = P_{(B)} \times P_{(A)}$$ (فرمول ۸)

فرمول ۸ شرط مستقل بودن دو پیشامد A و B نیز خواهد بود.

مثال ۵ ــ احتمال اینکه کارمندی در یک اداره در مرخصی باشد، ۰/۲ و احتمال اینکه به کارمندی حکم جدیدی داده شود، ۰/۰۱ است.

احتمال اینکه کارمندی در مرخصی باشد و حکم جدیدی نیز برایش صادر شود، چقدر است؟

توجّه دارید که دو پیشامد «در مرخصی بودن» و«صدور حکم جدید»، دو پیشامد مستقل هستند.

$$P_{(A\cap B)} = ۰/۲ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۰۲$$

تذکّر: اگر در فرمول ۸ پیشامد A مشروط به پیشامد B باشد،که با نماد $A|B$ نشان داده می‌شود[1]، باید فرمول ۸ را به‌صورت زیر بنویسیم :

$$P_{(A\cap B)} = P_{(B)} \cdot P_{(A|B)}$$ (فرمول ۹)

۱ــ احتمال شرطی را با نماد A/B نیز نشان می‌دهند.

مثال ۶ــ در داخل یک انبار، از انبارهای اتومبیلهای ساخته شدهٔ یک کارخانه، ۸۰ اتومبیل سواری و ۲۰ اتومبیل وانت وجود دارد. دو اتومبیل به‌طور تصادفی از انبار خارج می‌کنیم. احتمال این که هر دو اتومبیل سواری باشند، چقدر است؟

$$P_{(\text{اولی سواری باشد})} = \frac{۸۰}{۱۰۰}$$

$$P_{(\text{دومی سواری باشد})} = \frac{۷۹}{۹۹}$$

$$P_{(\text{هر دو سواری باشد})} = \frac{۸۰}{۱۰۰} \times \frac{۷۹}{۹۹} = \frac{۳۱۶}{۴۹۵}$$

مثال ۷ــ در یک قفسه در یک بانک، ۱۰ کارت حساب جاری و ۲۰ کارت حساب پس‌انداز وجود دارد. اگر بخواهیم سه کارت به طور تصادفی انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که هر سه کارت از نوع حساب جاری باشند؟

$$P = \frac{۱۰}{۳۰} \times \frac{۹}{۲۹} \times \frac{۸}{۲۸} = \frac{۶}{۲۰۳}$$

تذکّر: مثالهایی نظیر مثال ۷ را می‌توان با کمک ترکیب (یا سایر عوامل آنالیز ترکیبی) نیز حل کرد. مثلاً می‌توان مثال ۷ را به‌صورت زیر حل کرد.

$$P = \frac{\text{حالات مساعد}}{\text{حالات ممکن}} = \frac{C^{۳}_{۱۰}}{C^{۳}_{۳۰}} = \frac{۶}{۲۰۳}$$

مثال ۸ ــ در یک انبار، ۱۰ کارتن یخچال، ۲۰ کارتن فریزر و ۲۰ کارتن یخچال ــ فریزر وجود دارد که از نظر ظاهر، شبیه هم هستند. اگر به طور تصادفی ۳ جعبه از آنها را انتخاب کنیم، چقدر احتمال هست که :

اولاً ــ هر سه کارتن یخچال باشند؟ $P = \frac{C^{۳}_{۱۰}}{C^{۳}_{۵۰}}$

ثانیاً ــ دو عدد فریزر و یکی یخچال ــ فریزر باشد؟ $P = \frac{C^{۲}_{۲۰} \times C^{۱}_{۲۰}}{C^{۳}_{۵۰}}$

ثالثاً ــ هیچ کدام مثل هم نباشند؟ $P = \frac{C^{۱}_{۱۰} \times C^{۱}_{۲۰} \times C^{۱}_{۲۰}}{C^{۳}_{۵۰}}$

مثال ۹ــ در یک جعبه، ۱۰ مهرهٔ سفید و ۳۰ مهرهٔ سیاه وجود دارد که از نظر شکل و اندازه و وزن کاملاً یکسان هستند. دو مهره، متوالیاً، یک بار با جایگذاری و یک بار بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن هر دو مهره را در دو حالت با جایگذاری و بدون جایگذاری محاسبه کنید.

توضیح: در روش با جایگذاری، هر مهره که بیرون آورده می‌شود، مجدّداً به داخل جعبه برگردانده می‌شود، در حالی که در روش بدون جایگذاری هر مهره که از جعبه خارج می‌شود، کنار گذاشته شده، مهرهٔ بعدی از بقیّهٔ مهره‌ها، بیرون آورده می‌شود.

در روش با جایگذاری

$$P=\frac{۱۰}{۴۰}\times\frac{۱۰}{۴۰}=\frac{۱}{۱۶}$$

در روش بدون جایگذاری

$$P=\frac{۱۰}{۴۰}\times\frac{۹}{۳۹}=\frac{۳}{۵۲}$$

مثال بالا را می‌توان با کمک آنالیز ترکیبی به‌صورت زیر نیز حل کرد :

در روش با جایگذاری با کمک ترتیبهای با تکرار

$$P=\frac{P^{۲}_{۱۰}}{P^{۲}_{۴۰}}=\frac{۱۰^{۲}}{۴۰^{۲}}=\frac{۱۰\times۱۰}{۴۰\times۴۰}=\frac{۱}{۱۶}$$

در روش بدون جایگذاری با کمک ترتیبهای بدون تکرار

$$P=\frac{P^{۲}_{۱۰}}{P^{۲}_{۴۰}}=\frac{\frac{۱۰!}{۸!}}{\frac{۴۰!}{۳۸!}}=\frac{۱۰\times۹}{۴۰\times۳۹}=\frac{۳}{۵۲}$$

تفاوت « مستقل بودن » و « ناسازگار بودن » پیشامدها

گاهی مفاهیم « مستقل بودن » دو پیشامد و« ناسازگار بودن » دو پیشامد، با هم اشتباه می‌شوند. برای دوری از چنین اشتباهی، توضیح این نکته ضروری است که هرگاه در مورد مستقل بودن دو پیشامد A وB سخن به میان می‌آید، منظور این است که وقوع پیشامد A، هیچ ارتباطی به پیشامد B ندارد. درحالی که وقتی صحبت از ناسازگار بودن A و B می‌شود، مقصود این است که، A وB نمی‌توانند همزمان رخ دهند. شاید این اشتباه، از آنجا ناشی شده است که در نمودارهای وِن، تصوّر بر این است که، دو پیشامد مستقل A و B نباید هیچ نقطهٔ مشترکی داشته باشند، در حالی که این تصور برای دو پیشامد ناسازگار درست است، نه برای دو پیشامد مستقل. مثلاً اگر A پیشامدی باشد با

احتمالی برابر ۰/۲ و B پیشامد دیگری باشد با احتمالی مساوی ۰/۳ به طوری که بشود نوشت :

$$P_{(A)} = ۰/۲ \text{ و } P_{(B)} = ۰/۳$$

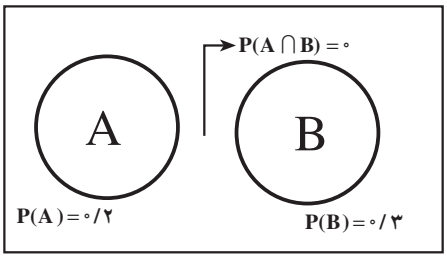
حال اگر A و B مستقل از یکدیگر باشند، خواهیم داشت :

$$P_{(A\cap B)} = P_{(A)} . P_{(B)} = ۰/۲ \times ۰/۳ = ۰/۰۶$$

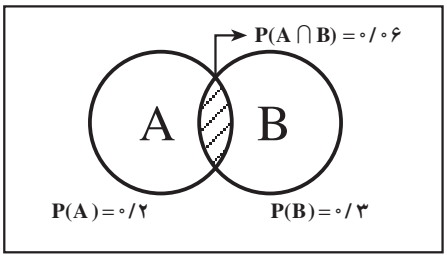
در حالی که اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، باید $A\cap B = \varnothing$ باشد، و چون $P(\varnothing) = ۰$ است، بنابراین :

$$P_{(A\cap B)} = ۰$$

در نمودارهای ۱۰ و ۱۱ وضعیت دو پیشامد ناسازگار و دو پیشامد مستقل را به‌صورت هندسی مشاهده می‌کنید :



نمودار ۱۰ــ دو پیشامد ناسازگار



نمودار ۱۱ــ دو پیشامد مستقل

محاسبهٔ احتمال شرطی

دو پیشامد را شرطی گویند، هرگاه وقوع یکی مشروط به وقوع « یا عدم وقوع » دیگری باشد در فرمول ۹، اگر $P_{(A|B)}$ را مجهول در نظر بگیریم و $P_{(B)}$ و $P_{(A\cap B)}$ معلوم باشند،باید طرف معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم کنیم تا مقدار مجهول محاسبه شود :

$$\boxed{P_{(A|B)} = \frac{P_{(A\cap B)}}{P_{(B)}}} \qquad \text{(فرمول ۱۰)}$$

در واقع در احتمالات شرطی، فضای نمونه‌ای محدود به موارد شرط (یعنی B) خواهد شد.

فرمول بالا را می‌شود به‌صورت خلاصه شده زیر نیز بیان کرد :

$$\text{مقدار احتمال شرطی} = \frac{\text{از موارد شرط آن تعداد که مورد سؤال هستند}}{\text{موارد شرط}}$$

و یا

$$P_{(A|B)} = \frac{\text{تعداد حالتهایی که A و B می‌توانند رخ دهند}}{\text{تعداد حالتهایی که B می‌تواند رخ دهد}}$$

توجه دارید که در این صورت $P_{(A|B)}$ بزرگتر از $P_{(A)}$ خواهدبود، مگر موقعی که A و B دو پیشامد مستقل باشند، که در این صورت احتمال شرطی،مساوی احتمال غیر شرطی خواهد بود. یعنی :

$$\boxed{P_{(A|B)} = \frac{P_{(A\cap B)}}{P_{(B)}} \overset{\text{در صورت مستقل بودن}}{\Longrightarrow} \frac{P_{(A)}.P_{(B)}}{P_{(B)}} = P_{(A)}} \qquad \text{(فرمول ۱۱)}$$

تذکّر: توجه داشته باشید که فرمول احتمال شرطی،زمانی درست است که $P_{(B)}$ مخالف صفر باشد،چه پیشامدها از مدل احتمال یکنواخت تبعیت کنند و چه از مدل احتمال غیر یکنواخت.

مثال ۱۰ــ دو مکعب شش وجهی منتظم (تاس) را که اعداد ۱ تا ۶ روی وجوه مختلف آنها نوشته شده با هم می‌ریزیم. احتمال اینکه حدّاقل، شمارهٔ یکی از مکعبها ۲ باشد، چقدر است؟ (اگر بدانیم که مجموع شماره‌های دو مکعب، مساوی ۶ است.)

حل: اگر A را پیشامد « حدّاقل، شمارهٔ یک مکعب ۲ باشد » بدانیم و B را پیشامد «مجموع دو مکعب شش ». در این صورت می‌توان نوشت :

$$n_{(s)} = ۶^۲ = ۳۶$$

$$A = \{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۱,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲)\}$$

$$B = \{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$$

$$(A\cap B) = \{(۲,۴),(۴,۲)\}$$

$$P_{(A|B)} = \frac{P_{(A\cap B)}}{P_{(B)}} = \frac{\frac{۲}{۳۶}}{\frac{۵}{۳۶}} = \frac{۲}{۵}$$

مثال ۱۱ــ احتمال اینکه احمد در مرحلهٔ اوّل کنکور دانشگاهها قبول شود، ۰/۷ است و احتمال اینکه اگر در مرحله اوّل قبول شده، در مرحله دوم نیز قبول شود، ۰/۸ است. احتمال اینکه

احمد در هر دو مرحله، قبول شود، چقدر است؟

$$P_{(A|B)} = \frac{P_{(A\cap B)}}{P_{(B)}} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{P_{(A\cap B)}}{۰/۷} \Rightarrow P_{(A\cap B)} = ۰/۵۶$$

مثال ۱۲ــ در مثال ۱۰ آیا A و B دو پیشامد مستقل‌اند؟ چرا؟

حل: برای اینکه A و B دو پیشامد مستقل باشند باید رابطه زیر بین آنها برقرار باشد :

$$P_{(A\cap B)} = P_{(A)} \cdot P_{(B)}$$

$$P_{(A)} = \frac{۱۱}{۳۶} \quad , \quad P_{(B)} = \frac{۵}{۳۶} \quad , \quad P_{(A\cap B)} = \frac{۲}{۳۶}$$

$$\frac{۱۱}{۳۶} \times \frac{۵}{۳۶} = \frac{۵۵}{۱۲۹۶}$$

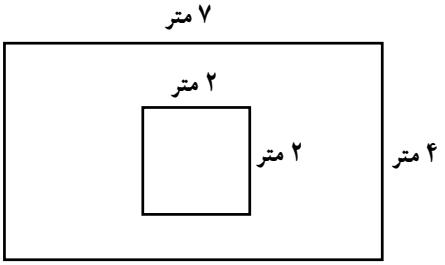
مشاهده می‌کنیم که شرط مستقل بودن بین A و B برقرار نیست زیرا :

$$\frac{۵۵}{۱۲۹۶} \neq \frac{۲}{۳۶}$$

تذکّر ۱: مفهوم حداقل x بار، معادل $X \geq x$ و مفهوم حداکثر x بار معادل $X \leq x$ می‌باشد.

تذکّر ۲: همه مسائلی که در این فصل بیان شده مربوط به مجموعه‌های شمارش‌پذیر بودند. توجّه داشته باشید که احتمالات در مورد مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر مانند مساحت اشکال هندسی و یا حجم و یا طول و نظایر آن نیز کاربردهای فراوانی دارد. تمرینهای ۱۸ و ۱۹ همین فصل نمونه‌ای از احتمالات هندسی هستند.

مثال ۱۳ــ در تصویر زیر، اگر تیری به سمت مستطیل رها شود، احتمال آن‌که تیر، به مربع برخورد کند، چقدر است؟



حل: در این مسأله، هم فضای نمونه‌ای (یعنی مساحت مستطیل) و هم عضوهای حالت‌های مساعد (مساحت مربع) از نوع فضاهای نمونه‌ای پیوسته هستند.

$$\text{مقدار احتمال} = \frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{۲\times۲}{۷\times۴} = \frac{۴}{۲۸} = \frac{۱}{۷}$$

تمرینهای فصل دوم

۱ــ اجتماع دو پیشامد را تعریف کرده، علامت آن را نشان دهید.

۲ــ اشتراک دو پیشامد را تعریف کرده، علامت آن را نشان دهید.

۳ــ مفهوم تهی را توضیح داده، علامت آن را نشان دهید.

۴ــ آزمایش تصادفی چیست؟ انواع آن را نام ببرید و برای هر کدام مثالی ذکر کنید.

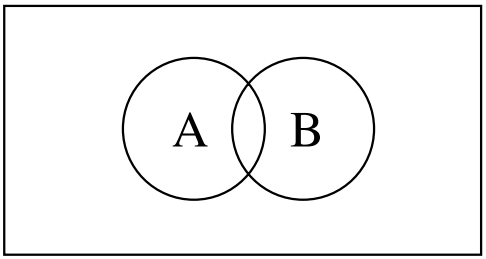
۵ ــ فضای نمونه‌ای را تعریف کرده،برای فضاهای نمونه‌ای محدود و نامحدود مثال بیاورید.

۶ــ پیشامد را تعریف کنید. برای پیشامدهای سازگار و ناسازگار مثال ذکر کنید.

۷ــ برداشتهای مختلف از احتمال را شرح دهید.

۸ ــ سه اصل اساسی احتمال را که به اصول قراردادی (موضوعه) احتمال معروفند، توضیح دهید.

۹ــ در نمودار زیر $(A \cup B)^c$ را سایه بزنید.



۱۰ــ احمد، محمود و حامد در یک مسابقهٔ علمی‌شرکت کرده‌اند. اگر بدانیم احتمال برنده شدن احمد دو برابر برنده شدن محمود و احتمال برنده شدن محمود دو برابر برنده شدن حامد است،احتمال برنده شدن هر یک ازاین سه نفر را معلوم کنید.

۱۱ــ اگر احتمال بالا قرار گرفتن روی سکّه‌ای، دو برابر احتمال بالا قرار گرفتن پشت آن باشد، چقدر احتمال دارد که در دو بار پرتاب این سکّه، هر دو بار روی سکّه بالا قرار گیرد؟

۱۲ــ در یک شرکت بیمه، ۱۰ بیمه نامه تنظیم شده که چهار عدد آنها مربوط به بیمهٔ اتومبیل و ۶ عدد بقیه، مربوط به بیمهٔ آتش سوزی می‌باشند. اگر به طور تصادفی سه عدد از بیمه نامه‌ها را انتخاب کنیم،چقدر احتمال دارد :

الف) هر سه، بیمه‌نامهٔ اتومبیل باشند؟

ب) دو عدد از بیمه‌نامه‌ها، از نوع بیمهٔ آتش‌سوزی باشند؟

ج) حدّاقل یکی از آنها مربوط به بیمهٔ اتومبیل باشد؟

د) حداکثر دو بیمه‌نامه از نوع بیمه آتش‌سوزی باشند؟

۱۳ــ ۲۵۰ نفر از دانش‌آموزان یک دبیرستان را از نظر رشتهٔ تحصیلی و کلاس، مطابق جدول زیر مورد بررسی قرار داده‌ایم. اگر یک دانش‌آموز به‌طور تصادفی از این گروه انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که :

الف) کلاس سوم باشد؟

ب) کلاس سوم نباشد؟

ج) کلاس اول یا دوم باشد؟

د) رشتهٔ حسابداری و کلاس سوم باشد؟

هـ) رشتهٔ حسابداری یا کلاس دوم باشد؟

و) رشتهٔ بازرگانی باشد به شرطی که بدانیم کلاس اول است؟

ز) آیا کلاس چهارم بودن و رشتهٔ حسابداری بودن،دو پیشامد مستقل‌اند؟چرا؟

کلاس → / رشته ↓	اول	دوم	سوم	چهارم
تجربی	۲۰	۱۵	۲۵	۸
ریاضی	۱۰	۵	۱۵	۱۰
حسابداری	۳۰	۱۵	۱۰	۱۲
بازرگانی	۴۰	۲۰	۱۰	۵

۱۴ــ اگر از جدول تمرین ۱۳،چهارنفر به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه رشته‌های آنها متفاوت باشد، چقدر است؟ واحتمال اینکه هر چهار نفر از یک رشته باشند،چقدر است؟

۱۵ــ ۷۰٪ دانش‌آموزان یک دبیرستان، درس آمار را و ۴۰٪ آنها درس ریاضیات عمومی و ۳۰٪ دانش‌آموزان هر دو درس را انتخاب کرده‌اند. اگر یک دانش‌آموز را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه :

الف) آمار یا ریاضی را انتخاب کرده باشد، چقدر است؟

ب) هیچ کدام از این دروس را انتخاب نکرده باشند،چقدر است؟

۱۶ــ احتمال اینکه آقای x یک مسأله را حل کند $\frac{۲}{۹}$ و احتمال اینکه همین مسأله را آقای y حل کند $\frac{۳}{۵}$ است.این مسأله را به هر دو نفر ارائه می‌دهیم تا حل کنند.چقدر احتمال دارد که :

الف) هر دو نفر مسأله را حل کنند.

ب) مسأله حل شود.

ج) فقط یکی از آنها مسأله را حل کند.

۱۷ــ در یک دانشکده،کلاس Aدارای ۱۵ دانشجوی تهرانی و ۲۵ دانشجوی شهرستانی و کلاس B دارای ۲۰ دانشجوی تهرانی و ۴۰ دانشجوی شهرستانی است.اگر از هر کلاس یک دانشجو به صورت تصادفی انتخاب کنیم،چقدر احتمال دارد که از کلاس A تهرانی و ازکلاسB شهرستانی باشند؟ اگر بخواهیم از هر دو کلاس شهرستانی باشند، احتمال را معلوم کنید.اگر بخواهیم هردو نفری که انتخاب می‌شوند یا تهرانی باشند یا شهرستانی، مقدار احتمال چقدر خواهد بود؟

۱۸ــ دایره‌ای به شعاع R را درنظر بگیرید. اگر به‌طور تصادفی نقطه‌ای در داخل این دایره انتخاب شود، احتمال آنکه این نقطه به مرکز دایره نزدیکتر از محیط دایره باشد، چقدر است؟

راهنمایی ــ فضای نمونه‌ای، مجموعه شمارش‌ناپذیر مساحت یک دایره به شعاع R است.

۱۹ــ مستطیلی به طول ۲۵ و عرض ۲۰ سانتی‌متر را درنظر بگیرید که در داخل آن دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر واقع شده باشد. اگر تیری به سمت مستطیل رها شود، احتمال آنکه به دایره اصابت نماید چقدر است؟

۲۰ــ اگر سه پیشامد A، B و C دو به دو با همدیگر ناسازگار باشند و بدانیم که $P_{(A)} = ۰/۱$ ، $P_{(B)} = ۰/۳$ و $P_{(C)} = ۰/۳$ باشد، $P_{(A \cup B \cup C)}$ چقدر است؟

تستهای چهار گزینه‌ای

۱ــ A و B مستقل‌اند $P_{(A\cap B)} = \frac{۱}{۸}$ ، $P_{(A)} = \frac{۱}{۲}$ است. $P_{(B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۲ــ از ظرفی با ۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه، ۲ مهره با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه حدّاقل یک مهره سیاه بیرون آمده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۶}{۱۰}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

۳ــ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P_{(A)} = ۰/۳$ و $P_{(B)} = ۰/۲$ باشد، $P_{(A\cup B)}$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۵۶

۴ــ یک تاس را دوبار می‌اندازیم. احتمال آنکه جمع دو شماره، حدّاقل برابر ۱۰ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳۶}$ ۲) $\frac{۳}{۳۶}$ ۳) $\frac{۴}{۳۶}$ ۴) $\frac{۶}{۳۶}$

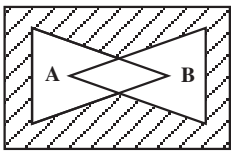
۵ــ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، $P_{(A|B)}$ کدام است؟

۱) $P_{(B)}$ ۲) $P_{(A)}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۶ــ یک سکّه سالم را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه دو بار روی سکّه بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۶}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۷ــ در تصویر زیر کدام بخش، هاشور خورده است؟



۱) $A\cup B$ ۲) $(A\cup B)^c$

۳) $A^c\cap B^c$ ۴) گزینه‌های ۲ و ۳ درست است.

۸ ــ هرگاه $S=\{۱,۵,۲,۸\}$, $A=\{۱,۵\}$ و $B=\{۸\}$ باشد، کدام پیشامد در یک آزمایش تصادفی حتمی‌است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cup B$ ۴) S

۹ــ احتمال اینکه احمد یک مسأله را درست حل کند، $\frac{۳}{۵}$ است و احتمال اینکه محمود همان مسأله را درست حل کند، $\frac{۱}{۴}$ است. این مسأله را به هر دو شخص می‌دهیم تا حل کنند. احتمال آنکه مسأله درست حل شود، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۴}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۰}$ ۴) $\frac{۲۰}{۲۰}$

۱۰ــ در جعبه A دو مهرهٔ سبز و سه مهرهٔ قرمز و در جعبه B سه مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ زرد وجود دارد. از هر جعبه، یک مهره به تصادف اختیارمی‌کنیم. احتمال همرنگ نبودن مهره‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۲۵}$ ۲) $\frac{۶}{۲۵}$ ۳) $\frac{۹}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۵}$

۱۱ــ اگر از کلاسی که ۱۰ دانش آموز تهرانی و ۲۰ دانش‌آموز غیرتهرانی در آن درس می‌خوانند، دو نماینده انتخاب کنیم، احتمال آن‌که هر دو نماینده تهرانی باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۲۹}$

۱۲ــ در تست ۱۱ احتمال آن‌که هر دو نماینده غیرتهرانی باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۳۸}{۸۷}$ ۳) $\frac{۳۸}{۹۰}$ ۴) $\frac{۱۹}{۸۷}$

۱۳ــ در تست ۱۱ چقدر احتمال هست که یکی از نمایندگان تهرانی و دیگری غیرتهرانی باشد؟

۱) $\frac{۱۰}{۸۷}$ ۲) $\frac{۲۰}{۸۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۸۷}$ ۴) $\frac{۸۰}{۸۷}$

۱۴ــ در تست ۱۱ احتمال آن‌که لااقل یکی از نمایندگان تهرانی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۸۷}$ ۲) $\frac{۴۰}{۸۷}$ ۳) $\frac{۳۱}{۸۷}$ ۴) $\frac{۴۹}{۸۷}$

۱۵ــ در داخل یک جعبه ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه هم شکل و هم وزن وجود دارد. اگر از داخل این جعبه دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون بیاوریم. احتمال آن که مهره دومی سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵۴}{۹۰}$ ۲) $\frac{۲۴}{۹۰}$ ۳) $\frac{۳۰}{۹۰}$ ۴) $\frac{۴۸}{۹۰}$

۱۶ــ در تست ۱۵احتمال آن که لااقل یکی از مهره‌ها سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۹۰}$ ۲) $\frac{۷۸}{۹۰}$ ۳) $\frac{۳۹}{۹۰}$ ۴) $\frac{۴۲}{۹۰}$