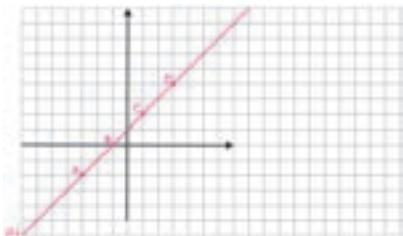
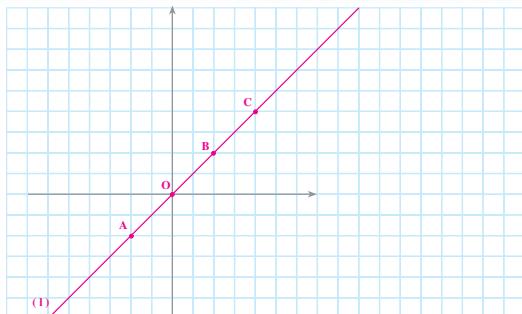


# معادله‌های خطی



## معادله‌ی خط

### رابطه‌ی طول و عرض نقاط



به خط ۱ توجه کنید. مختصات نقاط

$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

را بنویسید. بین طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای وجود دارد؟  
اگر طول هر نقطه را با  $x$  و عرض آن را با  $y$  نشان دهیم، رابطه‌ی بین طول و  
عرض را با یک تساوی جبری نشان دهید.  
نقاط‌ای را روی خط ۱ انتخاب کنید؛ آن را  $D$  بنامید و مختصات آن را بنویسید.

$$. D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

آیا مختصات  $D$  هم در رابطه‌ی بالا صدق می‌کند؟

رابطه‌ی  $x = y$  را **معادله‌ی خط** ۱ می‌نامیم. این تساوی، رابطه‌ی بین طول و عرض نقاط را  
مشخص می‌کند.



## فعالیت

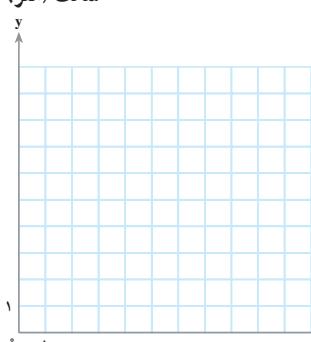


مهرداد با دوچرخه با سرعت ثابت ۳ متر در ثانیه حرکت می کند؛ یعنی، در هر ثانیه ۳ متر به جلو می رود. اگر در خط شروع، زمان را صفر در نظر بگیریم، با کامل کردن جدول زیر، مسافتی را که او در زمان های مختلف طی کرده است، بدست آورید.

۵	۴	۳	۲	۱	۰	زمان (ثانیه)
۶	۴	۳	۲	۱	۰	مسافت (متر)

هریک از زوج عدد های بدست آمده را می توانیم به صورت مختصات نقطه ای در

سانت (متر)



صفحه در نظر بگیریم؛ مثل نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

مختصات نقاط را بنویسید.



نقاط بدست آمده را در محور مختصات زیر پیدا کرده و به هم وصل کنید.

زمان (ثانیه)

سانت (متر)

یک معادله ای خطی بنویسید که نشان دهنده سرعت حرکت دوچرخه باشد.

با توجه به نمودار بالا، مشخص کنید که در ۷ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟

روش کار خود را توضیح دهید.

## سرگرمی و ریاضی



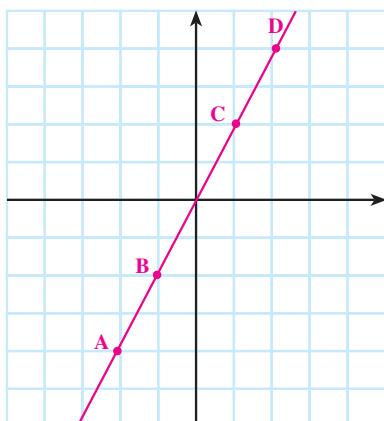
(رنه دکارت ۱۵۹۶-۱۶۵۰ م)

رنه دکارت فیلسف و ریاضی دان بزرگ، در تفکر و استدلال، شیوه‌ی جدیدی را بنیان گذاری کرد و در آموزش علم، روشی نو به کار برد. او معتقد بود که انسان بر تحصیل علم به معنای درک حقیقت و معلوم ساختن مجھولات خود توانایی دارد. دکارت ریاضیات را نمونه‌ی کامل علم می دانست



و معتقد بود که در همه‌ی رشته‌ها باید از راه ریاضی به مطالعه پرداخت. او با به کار بردن جبر در هندسه و حل کردن مسائل هندسه با استفاده از روش‌های جبری، هندسه‌ی تحلیلی را به وجود آورد. مختصاتی که ما برای نقاط به کار می‌بریم، به نام این دانشمند بزرگ، مختصات دکارتی نامیده می‌شود.

## کار در کلاس



۱- به نمودار مقابل توجه کنید؛

الف - مختصات نقاط زیر از خط را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ب - عرض هر یک از این نقاط چند برابر طول آن است؟

پ - یک نقطه روی خط انتخاب کنید و آنرا M بنامید. مختصات M را

بنویسید  $M = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$  عرض این نقطه چند برابر طول آن است؟

ت - اگر مختصات نقطه‌ای دلخواه از خط را  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  بگیریم، بین x و y چه رابطه‌ای برقرار است؟

ث - معادله‌ی این خط چیست؟

۲- جدول زیر را با توجه به نمونه‌ی داده شده کامل کنید.

x	$y = 2x$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
-1	$-2 \times (-1) = 2$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
-2		$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$
.		$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$
2		$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

با توجه به جدول صفحه‌ی قبل، با تغییر دادن عدد  $x$  چند نقطه به صورت  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  می‌توان

پیدا کرد؟

اگر این نقاط را به هم وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

## رسم خطی که معادله‌ی آن داده شده است

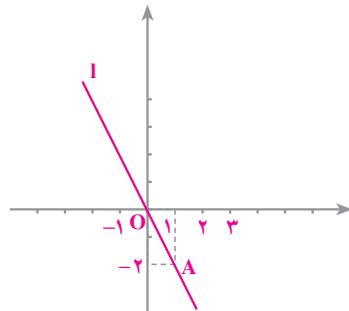
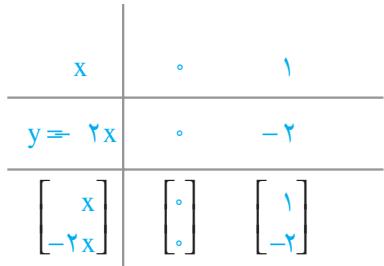
$$y = 2x$$

فرض کنیم معادله‌ی خط  $l$  به صورت

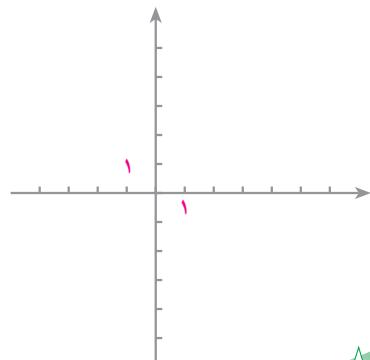
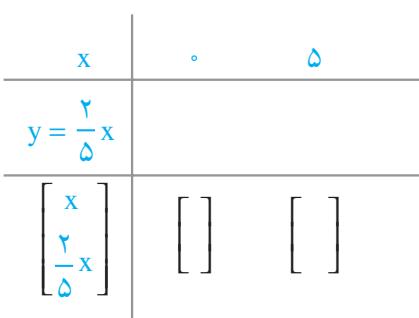
باشد؛ می‌خواهیم خط  $l$  را رسم کنیم. چون یک خط با دو نقطه‌اش مشخص می‌شود، پس، دو نقطه از این خط را به دست می‌آوریم. به طور کلی، اگر طول نقطه‌ای از این خط  $x$  باشد، عرض آن نقطه

- است؛ پس، مختصات هر نقطه از خط به صورت  $\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}$  است. اگر  $x$  را ۱ بگیریم، نقطه‌ی

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  به دست می‌آید و اگر  $x$  را ۰ بگیریم، نقطه‌ی  $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  به دست می‌آید.

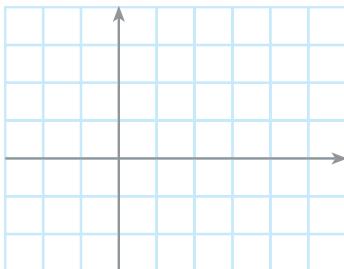


اکنون، خط  $d$  به معادله‌ی  $y = \frac{2}{5}x$  را رسم کنید.

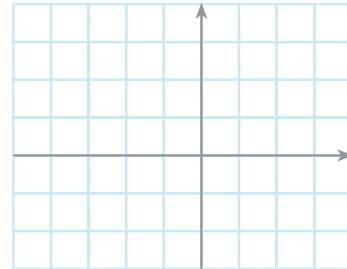




۱- خط‌های زیر را رسم کنید.



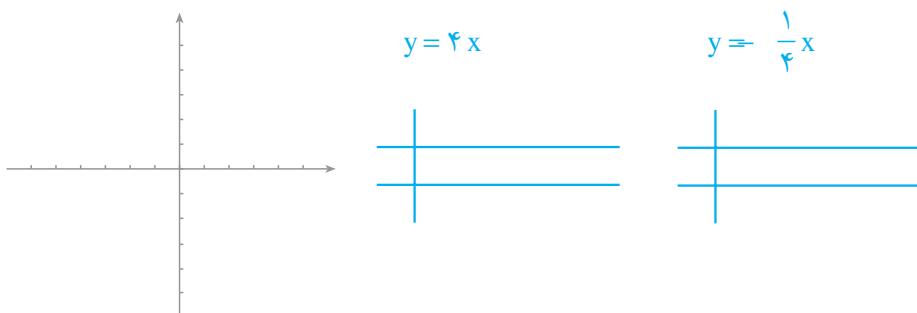
$$y = 3x$$



$$y = -\frac{3}{2}x$$



۲- در شکل زیر، خط‌های زیر را رسم کنید.



$$y = 4x$$

$$y = \frac{1}{4}x$$

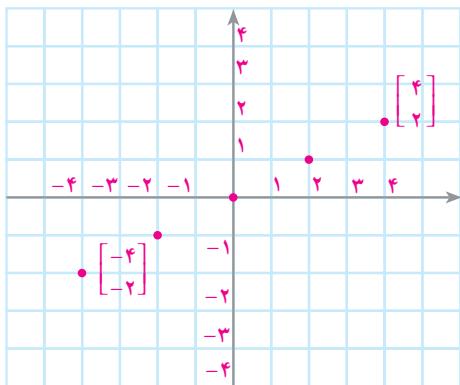
۳- مختصات نقطه‌ای از خط  $y = 5x$  را که طول آن ۲ باشد، پیدا کنید.

آیا نقطه‌ای  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  روی این خط قرار دارد؟ چرا؟

۴- یک دستگاه مختصات رسم کنید و نقاط  $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$  را روی آن مشخص کنید. آیا نقاط O، A و B در یک امتداد قرار دارند؟ معادله‌ی خطی که از این نقاط می‌گذرد، چیست؟



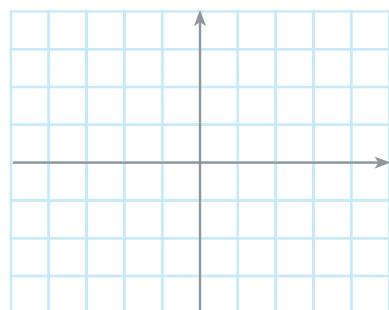
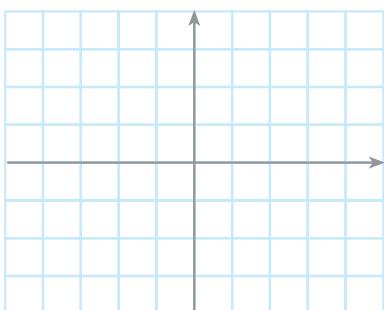
## نمودار مجموعه‌ای از نقاط صفحه



در شکل رو به رو، نمودار نقاط مجموعه‌ی  $A = \{[-4, -4], [-2, -2], [0, 0], [1, 1], [2, 2]\}$  رسم شده است. این نقاط را به هم وصل کنید تا یک پاره خط به دست آید.

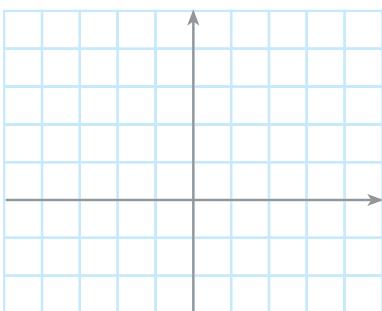
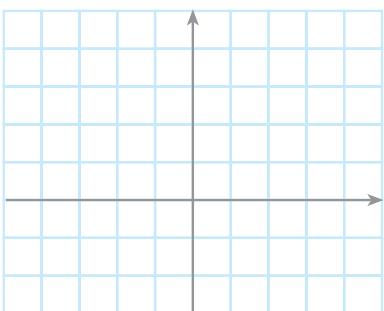
### کار در کلاس

نمودار نقاط هر مجموعه را مشخص کنید.



$$A = \{[-2, -4], [-1, -2], [0, 0], [1, 1], [2, 2]\}$$

$$B = \{[-5, -3], [-3, -1], [-2, 0], [0, 1], [1, 2]\}$$



$$C = \{[-4, -3], [-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [2, 2]\}$$

$$D = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2], [4, 4], [-2, -1]\}$$



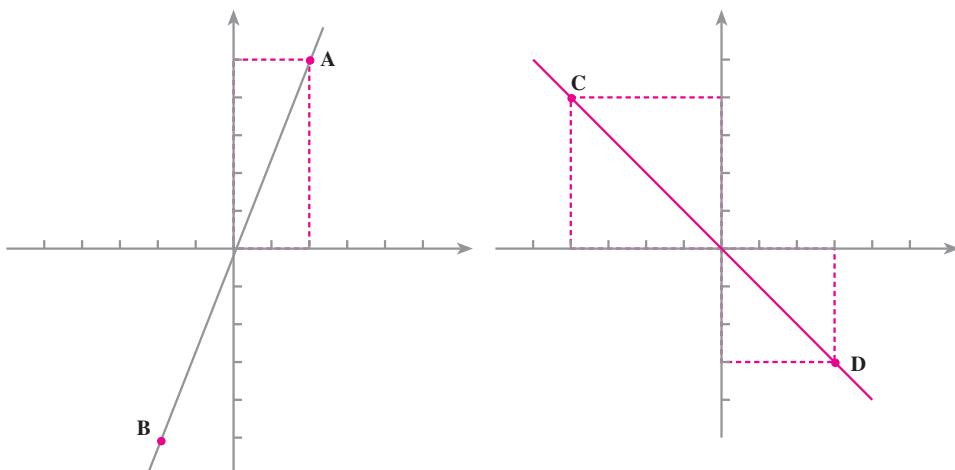


## تمرین

۱- در مورد هریک از نمودارهای زیر،

الف - مختصات نقاط تعیین شده را بنویسید.

ب - رابطه‌ی طول و عرض نقاط خط را پیدا کنید.



۲- محورهای مختصات و خط‌های به معادله‌های زیر را رسم کنید.

$$y = x \quad , \quad y = \frac{3}{2}x \quad , \quad y = \frac{2}{3}x$$

۳- معادله‌ی خطی که از مبدأ مختصات و نقطه‌ی  $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$  می‌گذرد، چیست؟

۴- از نقاط زیر، آن‌ها‌ی را که روی خط  $y = \frac{2}{3}x$  قرار دارند، نام ببرید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

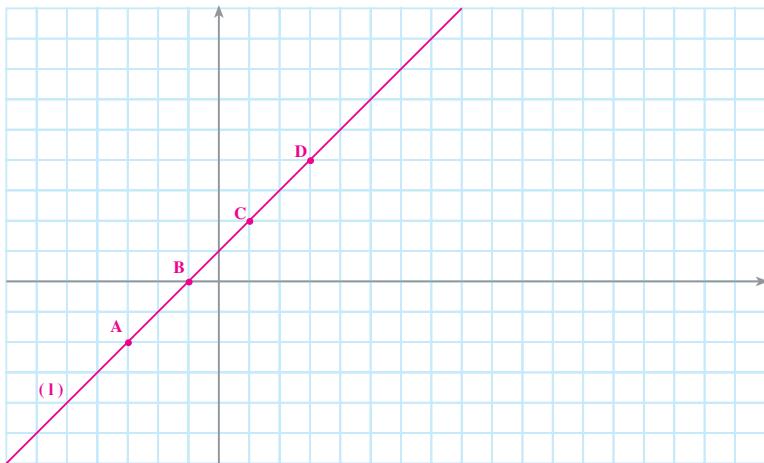
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۵- نمودار هریک از مجموعه‌های زیر را رسم کنید.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$



## خط‌های غیرمبدأ‌گذر

به خط ۱ توجه کنید. مختصات این نقاط

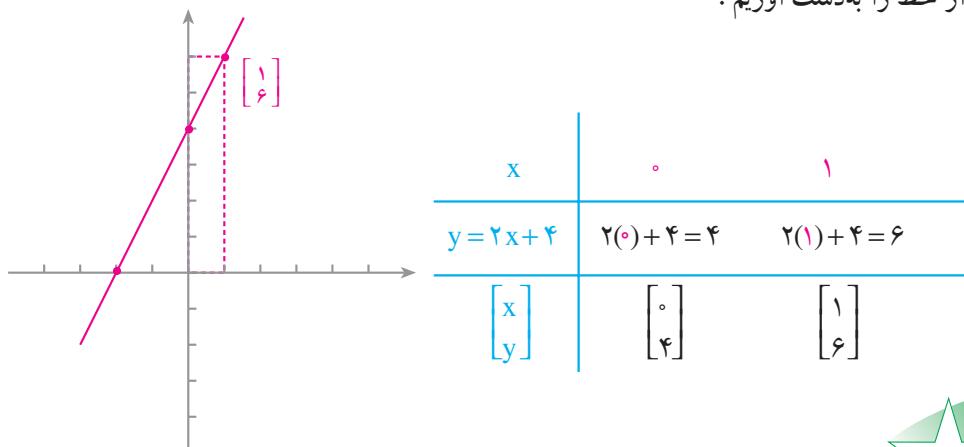
$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

را بنویسید. با توجه به مختصات این نقاط، متوجه می‌شویم که عرض هر نقطه از طول آن، یکی بیشتر است. اگر طول نقاط را  $x$  و عرض آن‌ها را  $y$  بنامیم، طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

معادله‌ی خط ۱ عبارت است از

$y = 2x + 4$ . رسم کنیم.

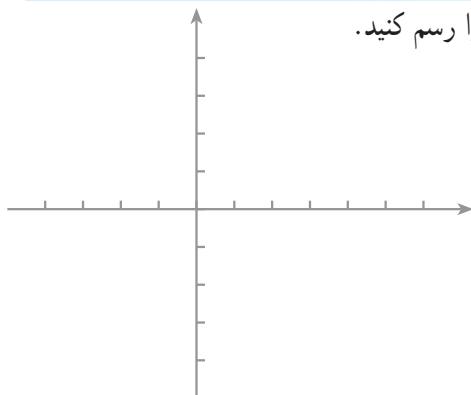
اکنون، می‌خواهیم خط به معادله‌ی  $y = 2x + 4$  را رسم کنیم.  
با توجه به این که هر خط راست با دو نقطه‌اش مشخص می‌شود، کافی است مختصات دو نقطه از خط را به‌دست آوریم:



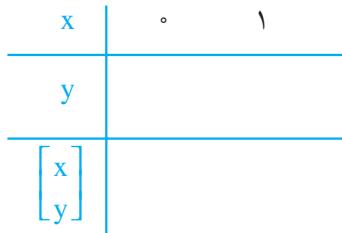
اگر در معادله‌ی خط به جای  $y$  صفر بگذاریم، مقدار  $x$  مساوی ۲- به دست می‌آید؛ بنابراین،

نقطه‌ی  $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$  نیز یک نقطه از خط است.

## کار در کلاس



۱- خط  $d$  به معادله‌ی  $2x+1 = y$  را رسم کنید.

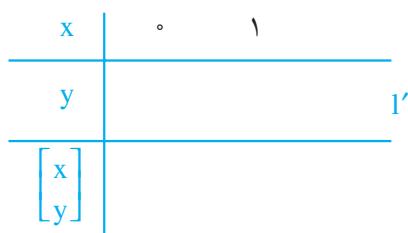
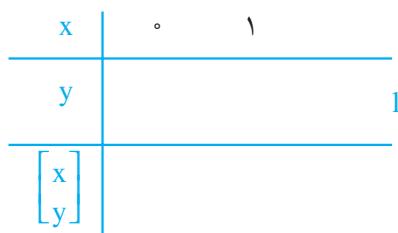
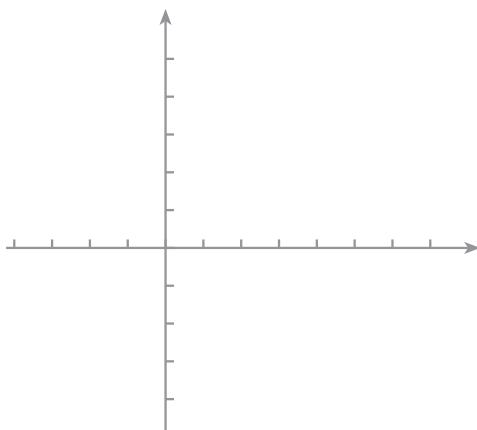


با توجه به معادله‌ی خط، مختصات نقاط زیر از خط را کامل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

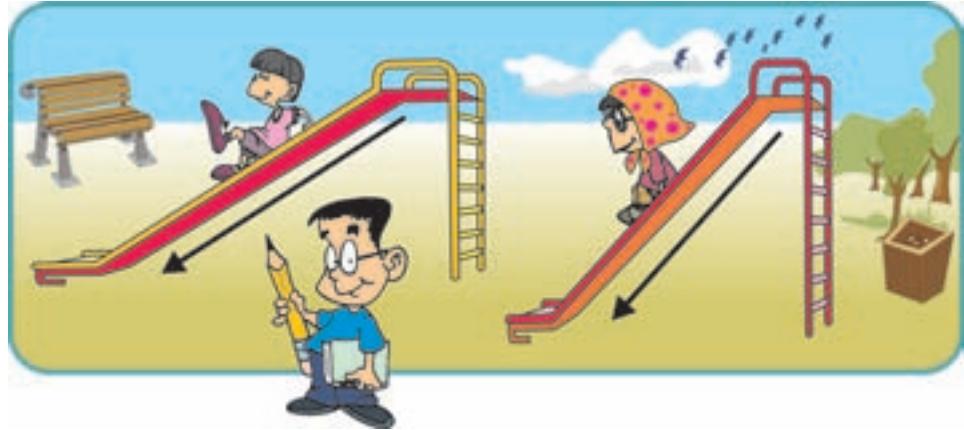
این نقاط را در دستگاه مختصات بالا مشخص کنید.

۲- خط‌های  $l$  به معادله‌ی  $3x - 3 = y$  و  $l'$  به معادله‌ی  $3x + 1 = y$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



آیا این دو خط موازی‌اند؟





## شیب خط

به شکل بالا توجه کنید. شیب کدام سرسره بیشتر است؟ کدام سرسره با سطح افق، زاویه‌ی بزرگ‌تری می‌سازد؟

اینک به شکل مقابل توجه کنید؛ شیب خط

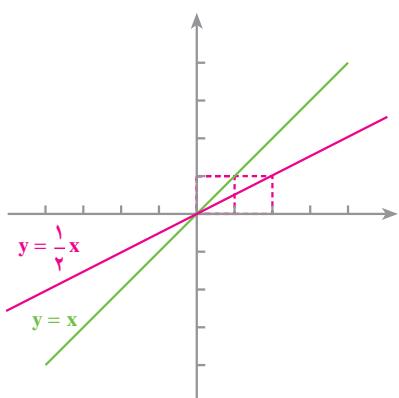
$y = \frac{1}{2}x$  از شیب خط  $y = x$  بیشتر است.

به طور کلی، اگر معادله‌ی خطی به صورت

$$y = ax + b$$

نوشته شود، ضریب  $x$  – یعنی  $a$  – شیب آن خط نامیده می‌شود؛ مثلاً شیب خط  $y = x$  مساوی ۱ و شیب خط

$y = \frac{1}{2}x$  مساوی  $\frac{1}{2}$  است.



فعالیت



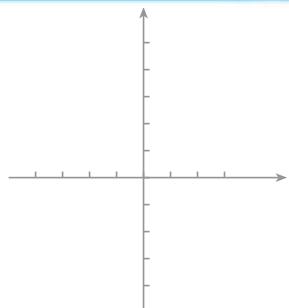
خطهای به معادله‌ی  $y = 2x$ ،

$y = 2x - 4$  و  $y = 2x + 3$  را روی محور

مختصات مقابله‌ی رسم کنید.

با توجه به شکل به دست آمده، از این فعالیت

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



خطهای رسم شده موازی و دارای شیب یکسان‌اند. ضریب  $x$  در هر سه معادله، یکی است.  
به طور کلی، هر دو خط که دارای شیب مساوی باشند، موازی‌اند.

## کار در کلاس

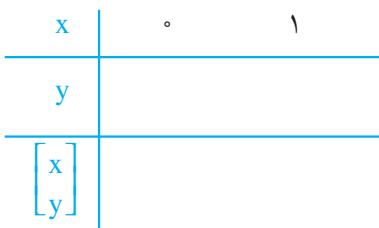
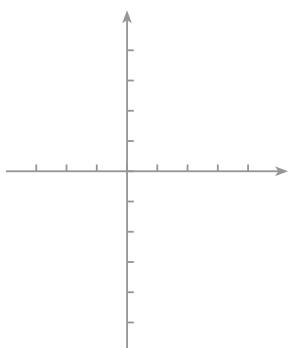
۱- خط  $y = 8x - 5$  با کدام یک از خطهای زیر موازی است؟

$$y = 8x + 5$$

$$y = 8x - 3$$

$$y = 3x - 5$$

۲- خط  $3x + 4 = y$  را رسم کنید.



شیب این خط چند است؟

این خط، محور  $y$  را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۳- معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۴ باشد و محور  $y$  را در نقطه‌ای به

عرض ۲- قطع کند.

۴- معادله‌ی خطی را بنویسید که با خط  $3x + 4 = y$  موازی باشد و محور  $y$  را

در نقطه‌ای به عرض ۵- قطع کند.

در صفحه‌ی پیش دیدید که اگر معادله‌ی خطی را به صورت  $y = ax + b$  بنویسیم، شیب این خط

مساوی  $a$  است و محور  $y$  را در نقطه‌ای به عرض  $b$  قطع می‌کند؛ یعنی، از نقطه‌ی  $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$  می‌گذرد.

عدد  $b$  در معادله‌ی  $y = ax + b$  را **عرض از مبدأ** این خط می‌نامیم.

## کار در کلاس

۱- در کدام یک از قسمت‌های زیر، دو خط داده شده متوازی‌اند؟

$$y = 3x$$

$$y = 3x - 3$$

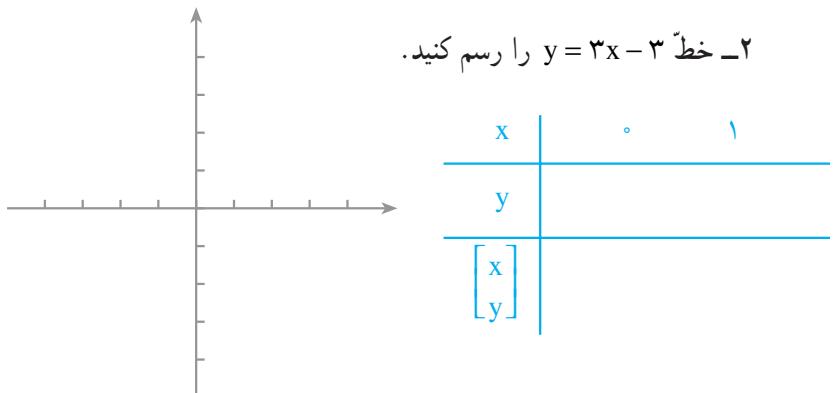
$$y = x + 5$$

$$y = x - 1$$

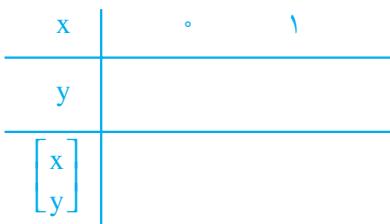
$$y = 2x - 3$$

$$y = x - 3$$

الف-



۲- خط  $y = 3x - 3$  را رسم کنید.



شیب این خط چند است؟

این خط، محورهای مختصات را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

$$A = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

۳- معادلهٔ خطی را بنویسید که شیب آن  $\frac{3}{5}$  باشد و از نقطهٔ  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  بگذرد.

۴- معادلهٔ خطی را بنویسید که با خط  $y = \frac{1}{3}x - 1$  موازی باشد و عرض از مبدأ آن  $+1$  باشد.

۵- معادلهٔ خطی را بنویسید که با خط  $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$  موازی باشد و از نقطهٔ A را مشخص کنید.

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  بگذرد. این دو خط را در دفترتان بکشید و نقطهٔ A را مشخص کنید.



۱- خط ۱ به معادلهٔ  $4x + 7 = y$  را رسم کنید.

شیب این خط چند است؟ این خط، محور y را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۲- معادلهٔ خطی را بنویسید که شیب آن  $-3$  باشد و محور y را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند. معادلهٔ خطی را بنویسید که شیب آن  $-3$  باشد و از مبدأ مختصات بگذرد. هر دو خط را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. آیا این دو خط موازی‌اند؟

۳- معادله‌ی خطی را بنویسید که با خط  $y = \frac{1}{2}x - 1$  موازی باشد و از نقطه‌ی A را مشخص کند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

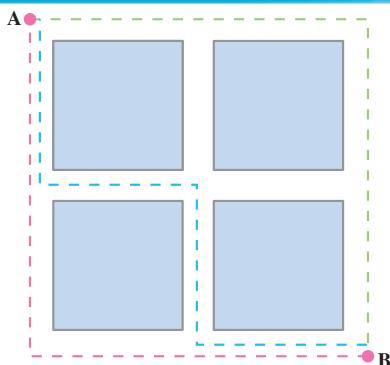
بگذرد. این دو خط را در یک دستگاه مختصات بکشید و نقطه‌ی A را مشخص کنید.

۴- از نقطه‌های زیر، کدام یک روی خط  $y = 3x + 1$  قرار دارند؟

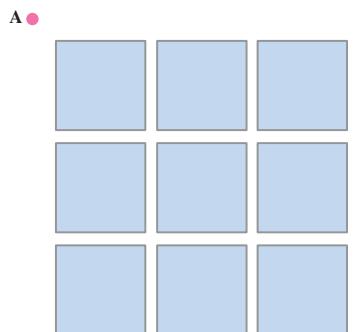
$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۵- عدد b را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی A روی خط  $y = \frac{3}{2}x + b$  واقع باشد.

## سرگرمی‌وریاضی

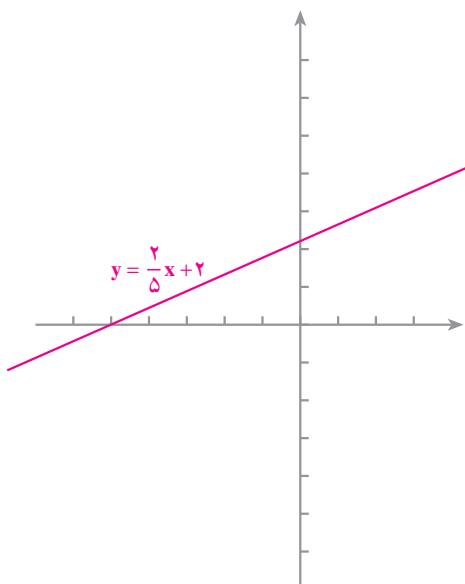
در قطعه‌زمینی چهار ساختمان مانند شکل رویه‌رو ساخته شده است. یک نفر می‌خواهد از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد در صورتی که مسافت طی شده حداقل باشد؟



در شکل، سه تا از راه‌هایی که او می‌تواند انتخاب کند، نشان داده شده است. به راحتی می‌توان فهمید که برای رفتن از A به B راه مختلف را می‌توان طی کرد و همه‌ی این راه‌ها کوتاه‌ترین راه‌های ممکن هستند. حالا فکر کنید که اگر ساختمان‌ها

۹ عدد و مانند شکل رویه‌رو باشند، به چند طریق می‌توان با حداقل مسافت طی شده از نقطه‌ی A به B رفت. سعی کنید در این مورد یک قاعده به دست آورید.

## صورت دیگر معادله‌ی خط



خط ۱ به معادله‌ی  $\frac{2}{5}x + ۲ = y$  را درنظر

بگیرید؛ می‌دانید که معادله‌ی خط، رابطه‌ای است که بین طول و عرض نقاط خط برقرار است. معادله‌ی این خط را به صورتی دیگر هم می‌توان نوشت:

$$5y = 2x + ۱ \circ$$

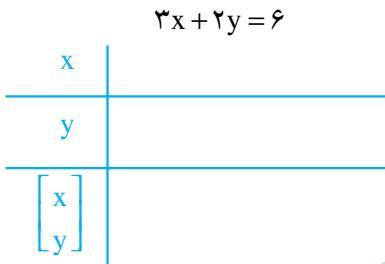
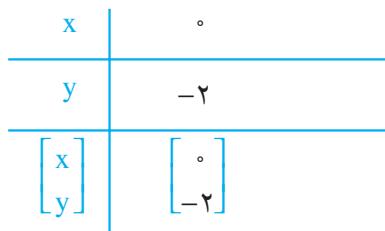
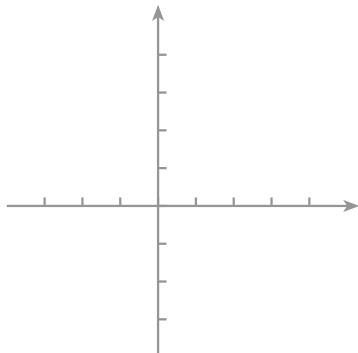
$$(۱) \quad 5y - 2x = ۱ \circ$$

هر معادله‌ی به صورت (۱) معادله‌ی یک خط است. از این نظر، چنین معادله‌ای را یک معادله‌ی خطی می‌نامیم.

### کار در کلاس

برای هر یک از معادله‌های خطی زیر، جدول را کامل کنید و خط مربوطه را بکشید.

$$4x - 5y = 1 \circ$$

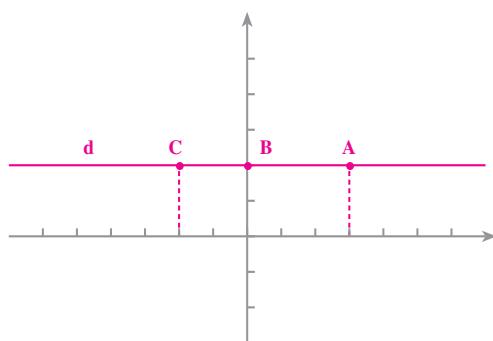


$$3x + 2y = 6$$

## خطهای موازی با محورها

در شکل زیر، به خط  $d$  توجه کنید؛ مختصات نقاط

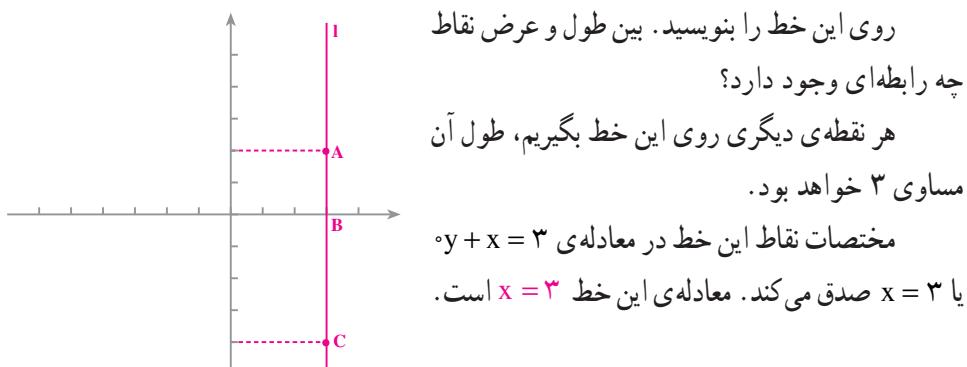
$$A = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$



روی این خط را بنویسید. بین طول و عرض نقاط چه رابطه‌ای وجود دارد؟ عرض هر نقطه‌ی دیگری که روی این خط در نظر بگیریم، مساوی ۲ است. مختصات این نقاط در معادله‌ی  $y = 2$  یا  $y + x = 2$  صدق می‌کند. معادله‌ی این خط  $y = 2$  است.

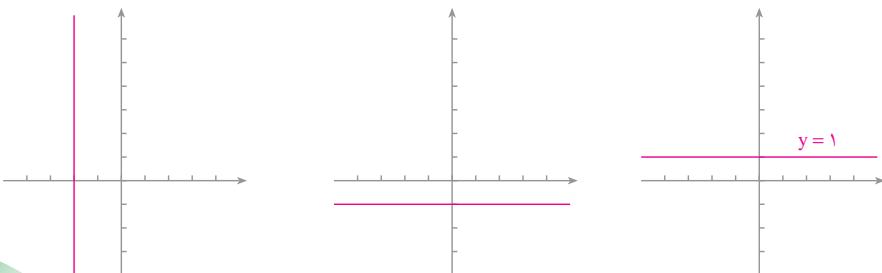
اینک به خط ۱ توجه کنید؛ مختصات نقاط

$$A = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$



روی این خط را بنویسید. بین طول و عرض نقاط چه رابطه‌ای وجود دارد؟ عرض هر نقطه‌ی دیگری روی این خط بگیریم، طول آن مساوی ۳ خواهد بود. مختصات نقاط این خط در معادله‌ی  $y + x = 3$  یا  $x = 3 - y$  صدق می‌کند. معادله‌ی این خط  $x = 3$  است.

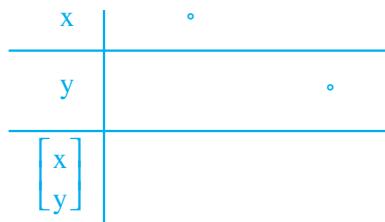
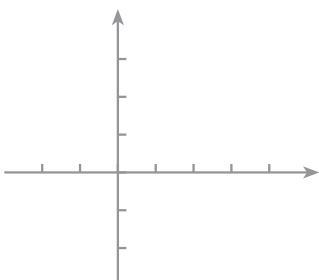
به خطهای زیر توجه کنید و معادله‌ی هریک از آن‌ها را بنویسید.





۱- معادله‌ی خط  $d$  به صورت  $4x - 2y = 8$  داده شده است. ابتدا جدول زیر

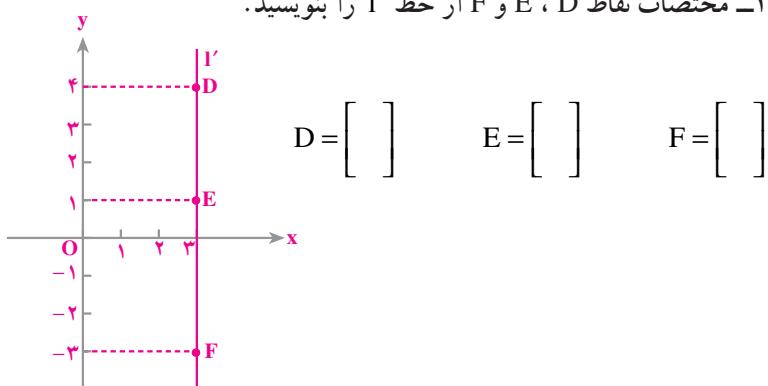
را کامل کنید:



سپس، خط  $d$  را رسم کنید.

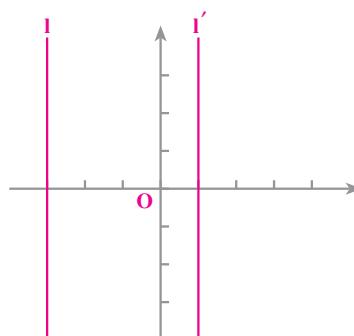
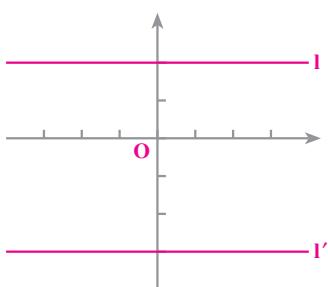
با نوشتن معادله‌ی خط به صورت  $y = ax + b$ ، شیب خط را پیدا کنید.

۲- مختصات نقاط  $D$ ،  $E$  و  $F$  از خط  $l'$  را بنویسید.



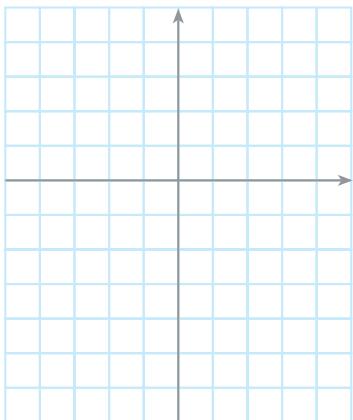
معادله‌ی خط  $l'$  را بنویسید.

۳- معادله‌ی هریک از خط‌های زیر را روی آن‌ها بنویسید.



۴- نقاط  $C = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ ،  $A = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$  را در دستگاه مختصات

روبه رو مشخص کنید. معادله‌ی خطی که از این نقاط می‌گذرد، چیست؟



### تمرین



۱- نقاط  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$  و  $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$  را در یک دستگاه مختصات مشخص کنید و خط  $AB$  را

رسم کنید. معادله‌ی خط  $AB$  را بنویسید (معادله‌ی خطی که از  $A$  و  $B$  می‌گذرد).

۲- نقاط  $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$  را در یک دستگاه مختصات مشخص کنید و خط  $CD$  را

رسم کنید. معادله‌ی این خط چیست؟ (معادله‌ی خطی که از  $C$  و  $D$  می‌گذرد)

۳- هر یک از خط‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$3x - 4y = 12 \quad , \quad x = 5 \quad , \quad y = \frac{3}{2}$$

۴- هر دسته از خط‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ -5x + 2y = 10 \end{cases} \quad \text{ب-}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y = 20 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases} \quad \text{الف-}$$