

# فصل ۲

## دنباله‌های اعداد



«ریاضی ملکه‌ی علوم است»<sup>۱</sup> کارل فریدریک گوس

### ۱— دنباله‌ها

اولین فعالیتی که کودک را با ماهیت اعداد آشنا می‌کند، شمارش است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی  $N$  که از ۱ آغاز می‌شود و یکی یکی افزوده می‌گردد، مثالی از یک دنباله‌ی عددی است و هریک از این اعداد یک جمله از دنباله‌ی اعداد طبیعی نامیده می‌شوند. به بیانی دیگر، برای ساختن دنباله‌ای از اعداد طبیعی، به هر جمله یکی اضافه می‌کنیم تا جمله‌ی بعدی به دست آید. چنین دنباله‌هایی می‌توانند از هر عدد طبیعی شروع شوند و تا بی‌نهایت ادامه یابند.

|| دنباله‌ی عددی آرایشی از اعداد است که هر عدد یا جمله‌ی آن با یک قانون یکسان به ||  
|| دنبال جمله‌ی قبلی می‌آید.<sup>۲</sup> ||

۱— Karl Friedrich Gauss

۲— این تعریف دسته‌ی خاصی از دنباله‌های اعداد را در بر می‌گیرد.

در مثال‌های زیر، به بررسی راه‌های مختلف پیدا کردن مجموع اعداد طبیعی می‌پردازیم:

## فعالیت ۱-۲

چند گل برای ساختن شکل زیر لازم است؟

۱

۲

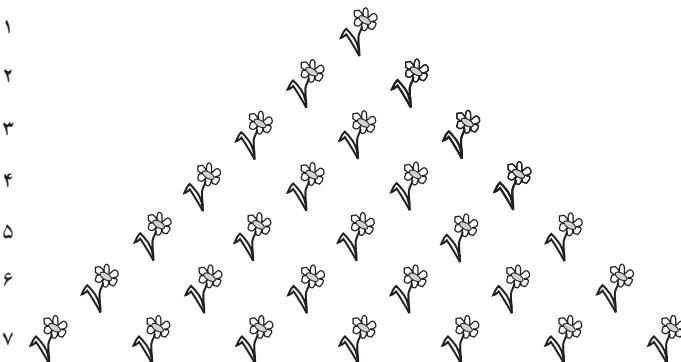
۳

۴

۵

۶

۷



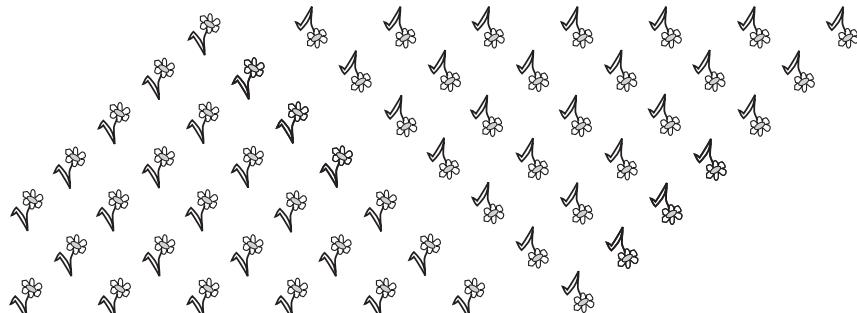
شکل ۱

یکی از راه‌های پاسخ به سؤال فوق، یافتن تعداد گل‌های موجود در هر ردیف است که درست

چپ نوشته شده است، یعنی :  $1+2+3+4+5+6+7$

راه دیگر از تصویر زیر حدس زده می‌شود :

۸  
۸  
۸  
۸  
۸  
۸  
۸  
۸



شکل ۲

در شکل ۲؛ تعداد ردیف‌ها ۷ و تعداد گل‌ها در هر ردیف ۸ است.

تمرین ۱: ویژگی شکل ۲ را مشخص کنید و سپس راه میان‌بری برای تعیین تعداد گل‌ها در شکل ۲ پیدا کنید.

تمرین ۲: با توجه به شکل ۲، راه میانبری برای تعیین تعداد گل‌ها در شکل ۱ پیدا کنید. چه رابطه‌ای بین مجموع گل‌های شکل ۲ و مجموع گل‌های شکل ۱ وجود دارد؟

با دقّت در تمرین‌های ۱ و ۲، متوجه شدیم که مجموع تعداد گل‌ها در ردیف‌های اول و آخر مساوی است با تعداد گل‌ها در ردیف‌های دوم و ماقبل آخر و به همین ترتیب تا آخر، یعنی در شکل ۲، تعداد گل‌ها در هر ردیف برابر است با

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 +7 & +6 & +5 & +4 & +3 & +2 & +1 \\
 \hline
 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8
 \end{array}$$

اگر به شکل ۲ دقیق‌تر نگاه کنید، متوازی‌الاضلاعی را می‌بینید که قاعده‌ی آن ۸، یعنی مجموع ردیف‌های اول و آخر و ارتفاع آن ۷، یعنی تعداد ردیف‌ها است. حال جواب تمرین ۱ را با مساحت متوازی‌الاضلاع مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تمرین ۳: دوباره به شکل ۱ نگاه کنید! این شکل ذوزنقه‌ای است که طول قاعده‌ی بالای آن ۱ (هر گل یک واحد) و طول قاعده‌ی پایینی آن ۷ است. مجدداً جواب تمرین ۲ را با مساحت ذوزنقه مقایسه کنید و نتیجه را یادداشت کنید.

## ۲-۲- تاریخچه‌ی یک کشف کوچک<sup>۱</sup> یا یک نبوغ بزرگ!

داستانی درباره‌ی گوس که از بزرگترین نوایع و ریاضیدان‌های معروف دنیا (۱۸۵۵-۱۷۷۷) است نقل می‌کنند<sup>۲</sup> که بسیار جالب است. ماجرا از این قرار بوده است که وقتی گوس در دبستان درس می‌خواند روزی معلم از آن‌ها خواست که اعداد ۱ تا ۱۰۰ را پشت سر هم بنویسند و جمع کنند. قبل از این که همکلاسی‌های گوس عddenویسی را به پایان ببرند، او مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورد و به معلم نشان داد! معلم برآشفت و فکر کرد که گوس قصد اذیت کردن او را دارد. با این حال، براثر پافشاری گوس، معلم او به جمع اعداد متوالی از ۱ تا ۱۰۰ پرداخت و پس از صرف مدت زمانی طولانی به نتیجه‌ای رسید که گوس کودک در چند دقیقه رسیده بود. حدس‌های متعددی درباره‌ی راه حل گوس زده می‌شود. واقعاً گوس مسأله را چگونه حل کرده بود؟

۱- خلاقیت ریاضی اثر جورج پولیا.

۲- برگردان‌های مختلفی از داستان گوس در منابع تاریخ ریاضی وجود دارد.

نمودار زیر<sup>۱</sup> چند شیوه‌ی مختلف به دست آوردن مجموع اعداد متوالی از ۱ تا ۱۰۰ را نشان

می‌دهد:

A	B	C	D
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	۵۰	۵۰
.	.	.	۵۱
.	.	۶۵	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	۹۸	۹۸	۹۸
.	۹۹	۹۹	۹۹
۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰

در ستون A، طریق به دست آوردن مجموع، نوشتند عدد ها به ترتیب از آغاز و جمع آنها است، یعنی همان شیوه‌ای که در ابتدا برای جمع کردن تعداد گل‌های شکل ۱ به کار بردیم.

در ستون B، جمع اعداد با شروع از انتهای ۱۰۰ یعنی به ترتیب تزویلی شیوه‌ی به دست آوردن مجموع در ستون C، جمع کردن این اعداد بدون هیچ ترتیب خاصی است.

ستون D از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. زیرا رابطه‌ی جالبی بین اعداد ابتدایی و انتهایی دیده می‌شود. این همان راه میانبری است که در تمرین ۲ پیدا کردیم. مجموع هردو عددی که به یک فاصله از دو انتهای باشند، مجموع معینی می‌دهند، یعنی

$$1+100=2+99=3+98=\dots=50+51=101$$

و چون مجموعاً ۵ جفت از این اعداد داریم، درنتیجه مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ برابر است با  $50 \times 101 = 5050$ .

دوباره به تمرین ۲ دقّت کنید! در آن تمرین، تعداد گل‌های شکل ۱ را با توجه به شکل ۲ به دست آوردید. در واقع، تعداد گل‌های شکل ۲ در هر ردیف برابر مجموع گل‌های ردیف‌های اول و آخر بود

۱- به نقل از جرج بولیا، ۱۹۶۲

و چون مجموعاً ۷ ردیف گل داشتیم، درنتیجه مجموع گل‌های شکل ۱ نصف گل‌های شکل ۲ یعنی  $\frac{7}{2} \times 8$  بود. به بیانی دیگر

(تعداد گل‌های ردیف آخر + تعداد گل‌های ردیف اول)  $= \frac{\text{مجموع گل‌های شکل ۱}}{2}$   
که این همان روش پیدا کردن مساحت ذوزنقه‌ای است که قاعده‌ی کوچک آن ۱، قاعده‌ی بزرگ آن ۷ و بلندی یا ارتفاع آن ۷ یعنی تعداد ردیف‌ها است:

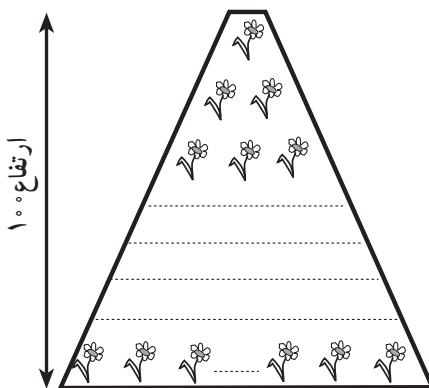
$$(\text{قاعده‌ی بزرگ} + \text{قاعده‌ی کوچک}) \times \frac{\text{ارتفاع}}{2} = \text{مجموع گل‌های شکل ۱}$$

در مسئله‌ی گوس نیز،  $1^{\circ} 1$  مجموع عددهای ابتدا و انتهای و  $5^{\circ}$  نصف تعداد آن‌ها بود پس

$$\frac{(\text{عدد انتهای} + \text{عدد ابتدای})}{2} \times \text{تعداد عددها} = \text{مجموع اعداد از ۱ تا } S = 100$$

$$= \frac{100}{2}(1+100)$$

به یاد چه می‌افتد؟ همان‌طورکه قبلاً هم دیدیم، مجموع فوق یادآور مساحت ذوزنقه‌ای است که ارتفاع آن ۱۰۰ و قاعده‌های آن ۱ و ۱۰۰ است.



حال همین مسئله را اساس کار قرار می‌دهیم و به تعمیم آن می‌پردازیم. به جای عدد خاص  $100$ ، عدد طبیعی  $n$  را درنظر می‌گیریم. در واقع با کمک گرفتن از تجربه‌ی گوس، می‌خواهیم

-۱- حرف اول  $S$  به معنی مجموع است.

مجموع اولین  $n$  عدد طبیعی را پیدا کنیم.

برای این کار، از همان شیوه‌ای که در ستون D به کار بردیم دوباره استفاده می‌کنیم؛ یعنی پیدا کردن جفت مرتبهای از اعداد ابتدایی و انتهایی (اعدادی که به فاصله‌ی معینی از ابتدا و انتها قرار گرفته‌اند) که مجموع معینی دارند.

به همان شیوه‌ای که در شکل ۲ داشتیم، مجموع  $S$  را دوباره می‌نویسیم مشروط بر این که در سطر دوم، ترتیب جمله‌ها برعکس، یعنی از بزرگ به کوچک نوشته شوند. (حتماً به باد می‌آورید که در شکل ۲ ردیف گل‌ها را برعکس چیدیم.)

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

از جمع دو سطر بالا نتیجه می‌گیریم که

$$2S = \underbrace{(1+n) + (1+n) + (1+n) + \dots + (1+n) + (1+n) + (1+n)}_{n \text{ بار}}$$

چون تعداد جمله‌ها  $n$  تا بود پس

$$2S = n(1+n)$$

یا

$$S = \frac{n(1+n)}{2} \quad (*)$$

یعنی :

$$S = \frac{(1+n)(n+1)}{2}$$

(جمله‌ی آخر + جمله‌ی اول) تعداد جمله‌ها

## فعالیت ۲

برای نشان دادن مجموع  $\frac{n(n+1)}{2}$  ۱+۲+۳+...+ $n$  مستطیلی را درنظر می‌گیریم که یک

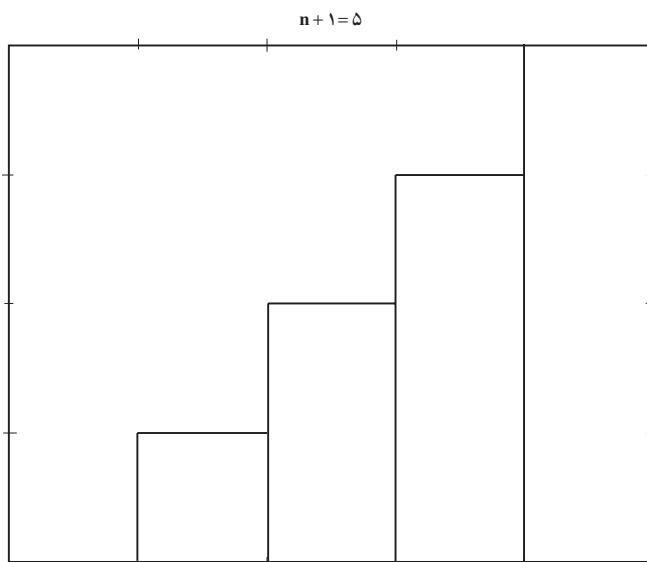
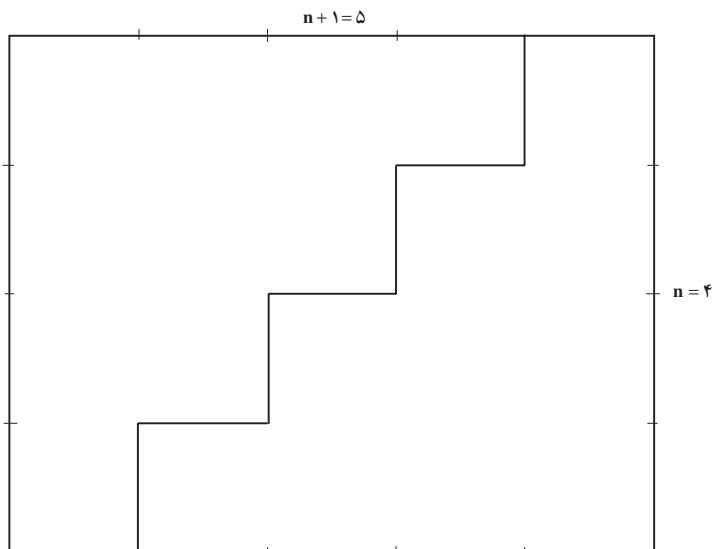
ضلع آن  $n$  و ضلع دیگرش  $1+n$  باشد. حال با خطی بلکانی، مستطیل را به دو قسمت مساوی تقسیم

می‌کنیم : مساحت هر قسمت برابر است با  $n + n - 1 + \dots + 2 + 1$ . چرا؟ به آن فکر کنید! مساحت تمام مستطیل چقدر است؟ درست حدس زدید! با توجه به طول و عرض مستطیل، مساحت آن  $n(n+1)$

و مساحت نصف آن  $\frac{n(n+1)}{2}$  است. بنابراین

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

شکل زیر با فرض  $n = 4$  رسم شده است.



## ۳-۲- دنباله‌ی حسابی

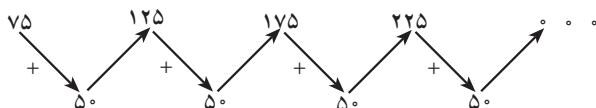
مادر بزرگ گلاره تصمیم گرفت به تمام نوه‌های خود عیدی بدهد. به این ترتیب که به کوچکترین آن‌ها ۲۵ تومانی و به بچه‌های دیگر به ترتیب سن ۲ سکه بیشتر از نفر قبلی بدهد. در ضمن هیچ کدام از بچه‌ها همسن نبودند. می‌خواهیم مجموع پول‌هایی که مادر بزرگ گلاره به نوه‌های خود داده است و مقدار عیدی نفر پانزدهم را به دست آوریم. دنباله‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی عیدی‌های دریافتی از مادر بزرگ است :

۷۵ ، ۱۲۵ ، ۱۷۵ ، ۲۲۵ ، ۲۷۵ ، ... ، ۴۲۵ ،

این دنباله نمونه‌ای از یک دنباله‌ی حسابی است.

| هر جمله از یک دنباله‌ی حسابی از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به دست |  
| می‌آید. به این مقدار ثابت قدر نسبت می‌گوییم. |

دنباله‌ی عیدی‌ها شبیه دنباله‌ی اعداد طبیعی است، با این تفاوت که هر جمله‌ی آن با افزودن عدد ۵ به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. با این حال، این دنباله حالت تعمیم یافته‌ای از مثال ردیف‌های گل و اعداد از ۱ تا ۱۰ است که با آن‌ها آشنا شدیم. در دو مثال قبلی، اولین جمله‌ی دنباله‌ها (اولین ردیف گل‌ها) عدد ۱ بود و به ترتیب در سطراها (ردیف‌های) بعدی یک گل افزوده شد، یعنی اختلاف هر دو جمله در آن‌ها دقیقاً ۱ بود، اما در این دنباله، جمله‌ی اول ۷۵ است و جمله‌ها به ترتیب ۵ تا ۵ تا زیاد شده‌اند، یعنی اختلاف هر دو جمله در این دنباله دقیقاً ۵ است.



تمرین ۴: مجموع بولهایی که مادر بزرگ به ۱۵ نفر از نوههای خود داده است چه قدر است؟

در فعالیت ۱-۲، پیدا کردن تعداد گل‌ها در هر ردیف ساده بود، زیرا گل‌های هر ردیف یکی یکی اضافه می‌شدند و صدمین جمله در دنباله‌ی اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ همان صد است. اگر فرض کنیم مادر بزرگ ۱۰۰ نوه داشته باشد پیدا کردن مقدار پرداختی مادر بزرگ به این صد نوه به این وضوح نیست و اگر روشی برای بدست آوردن آن‌ها داشته باشیم، صد بار جمع کردن این اعداد کار وقت‌گیری است! پس دوباره جمله‌های این دنباله را به طریقی دیگر می‌نویسیم تا روش مناسب را پیدا کنیم:

75			
75			
75	50		
75	50	50	
75	50	50	50

تمرین ۵: جمله‌های پنجم تا دهم را حدس بزنید و سپس با ادامه‌ی نمودار حدس خود را آزمایش کنید.

می‌توانیم این جمله‌ها را به صورت زیر بنویسیم:

$$\text{جمله اول} = 75 + 0 \times 5^{\circ},$$

$$\text{جمله دوم} = 75 + 1 \times 5^{\circ},$$

$$\text{جمله سوم} = 75 + 2 \times 5^{\circ},$$

$$\text{جمله چهارم} = 75 + 3 \times 5^{\circ},$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، کم کم روش مناسب را پیدا می‌کنیم زیرا بین شماره (ترتیب) جمله‌ها و تعداد ۵ توانانی‌های افزوده شده رابطه‌ای دیده می‌شود یعنی در هر جمله، تعداد ۵ توانانی‌های اضافه شده یکی کمتر از شماره‌ی جمله است. با این اطلاعات، می‌توانیم پرداختی مادر بزرگ به  $n$  امین نوه‌ی خود را حدس بزنیم:

$$\text{جمله } n^{\text{ام}} = 75 + (n - 1) \times 5^{\circ}$$

اگر به جای جمله‌ی اول که ۷۵ است حرف  $a$  و به جای  $5^{\circ}$  حرف  $d$ <sup>۱</sup> (اختلاف هر دو جمله) را قرار دهیم، آن وقت دنباله‌ی حسابی را در حالت کلی نشان داده‌ایم؛ یا به بیان دیگر نمایش یک دنباله‌ی

۱-  $d$  اولین حرف کلمه‌ی difference به معنای فاصله یا اختلاف ثابت هر دو جمله‌ی متوالی است.

a				
a	d			
a	d	d		
a	d	d	d	
a	d	d	d	d

حسابی با جمله‌ی اول  $a$  و قدرنسبت  $d$  چنین است :

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d, \dots$$

يعنى  $n^{\text{امین}} \text{ جمله‌ی این دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی}$

$$a+(n-1)d$$

به دست می‌آید و این راه میان‌بری است که ما را از محاسبات کسل‌کننده بی‌نیاز می‌کند.

برای محاسبه‌ی مجموع این جمله‌ها چه می‌توان کرد؟

به نمودار بالا توجه کنید. آنرا تا  $n^{\text{امین}} \text{ جمله ادامه می‌دهیم}$  و بعد به دنبال مجموع  $n^{\text{جمله}} \text{ می‌گردد}$ . می‌بینیم که جمله‌ی اول به تعداد جمله‌ها تکرار شده است، یعنی این مجموع شامل  $n$  تا  $a$  است. از طرف دیگر جملات  $d, 2d, 3d, \dots, (n-1)d$  نیز وجود دارند که بخشی از مجموع ما را تشکیل می‌دهند، درنتیجه

$$\text{مجموع جمله‌ها} = S = na + 1d + 2d + 3d + \dots + (n-1)d$$

اگر به جمله‌های بعد از  $na$  توجه کنید همگی در  $d$  مشترک هستند و می‌توانیم برای سهولت کار از  $d$  فاکتور بگیریم

$$S = na + [1+2+3+\dots+(n-1)] d \quad (1)$$

ضریب  $d$  مجموع اعداد طبیعی از  $1$  تا  $n-1$  است و با استفاده از رابطه‌ی  $(*)$  دریند  $2 - 2$  می‌توان آن را به این صورت نوشت

(جمله‌ی آخر + جمله‌ی اول) تعداد جمله‌ها

$$S_1 = \frac{(n-1)[1+(n-1)]}{2}, \quad (2)$$

یا

$$S_1 = \frac{(n-1)(n)}{2},$$

یا

$$S_1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

این مجموع را در رابطه‌ی (۱) به جای ضریب  $d$  قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$S = na + \left( \frac{(n-1)n}{2} \right) d$$

آیا می‌توانیم این رابطه را به صورت رابطه‌ی (۲) دریاوریم؟ یعنی آیا مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a$  و قدر نسبت  $d$  نیز همان نصف تعداد جملات  $\times$  مجموع جمله‌های اول و آخر می‌شود؟

معمولًاً در ساده کردن عبارت‌ها، علاوه بر عوامل مشترک، از عوامل مشکل آفرین از جمله کسرها نیز تا حد امکان فاکتور می‌گیریم تا رابطه‌ی به دست آمده به ساده‌ترین شکل ممکن درآید. در این مورد هم چنین می‌کنیم

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \quad (3)$$

این رابطه به رابطه‌ی (۲) بسیار نزدیک است. قبلًاً دیده بودیم که جمله‌ی  $a^m$  یک دنباله‌ی حسابی  $a + (n-1)d$  است. با کمی دقت در (۳) متوجه می‌شویم که اگر  $2a$  را به صورت  $a + a$  بنویسیم، در واقع (۲) را به دست آورده‌ایم

تعداد جمله‌ها

$$S = \frac{n}{2} [a + \underbrace{a + (n-1)d}_{\text{جمله‌ی آخر}}] ,$$

جمله‌ی اول

یعنی

$$S = \frac{(a + a + (n-1)d)}{2}$$

$$(a + (n-1)d)$$

$$S = \frac{n}{2} (a + (n-1)d)$$

اگر دوباره به مسئله‌ی گوس و جمع تعداد گل‌ها بازگردیم، می‌بینیم که آن‌ها حالت‌های خاصی از دنباله‌های حسابی بودند که در آن‌ها  $d = 1$ ، یعنی قدر نسبت، عدد ۱ و جمله‌ی اول نیز ۱ بود. با این حال همگی ماهیت یکسان دارند و مجموع چنین دنباله‌هایی با رابطه‌ی یکسانی به دست می‌آیند.

۱- اول کلمه‌ی last است.

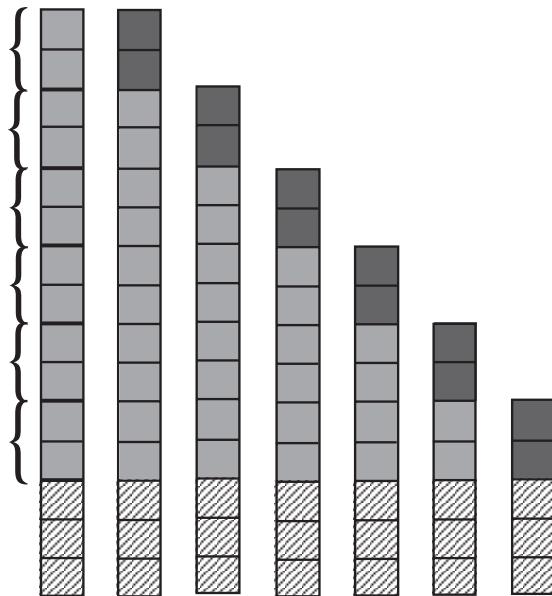
تمرین ۶: با توجه به روشی که گوس، مجموع  $n$  جمله‌ی اول دنباله‌ی طبیعی را به دست آورد، مجموع  $n$  جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت  $d$  و جمله‌ی اول  $a$  را به دست آورید. سپس نتیجه را با رابطه‌ی (۲) مقایسه کنید.

اینجا با دنباله‌های حسابی افزایشی آشنا شدیم، یعنی دنباله‌هایی که قدر نسبت آن‌ها مثبت بود و هر جمله از جمله‌ی قبلی بیشتر می‌شد. اما همیشه چنین نیست و گاهی جمله‌های دنباله‌ی حسابی به میزان ثابتی کاهش می‌یابند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: خواهر گلاره ۱۵ سکه‌ی ۲۵ تومانی دارد و می‌خواهد به هر یک از بچه‌های کوچک‌تر از خود در فامیل دو سکه‌ی عیدی بدهد و سه سکه را نیز برای خودش نگه دارد. وضعیت موجودی خواهر گلاره قبل و بعد از دادن عیدی، دنباله‌ی حسابی زیر را می‌سازند

$$375, 325, 275, 225, 175, 125, 75$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، قدر نسبت این دنباله، عدد  $-50$  است و نمودار آن به صورت زیر است:



در دنباله‌ی حسابی، اگر مقدار ثابت، مثبت باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر مقدار ثابت، منفی باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.

## تمرین

۱- جاهای خالی را در دنباله‌های حسابی زیر پر کنید :

الف ۱۰  $\square$  ۵۰

ب ۱۰  $\square \square$  ۵۰

پ ۱۰  $\square \square \square$  ۵۰

ت ۱۰  $\square \square \square \square$  ۵۰

ث ۱۰  $\square \square \square \square \square$  ۵۰

۲- کدامیک از دنباله‌های زیر حسابی هستند؟ آن‌ها را معلوم کرده و قدر نسبت آن‌ها را پیدا کنید.

الف ۴, ۲۴, ۴۴, ۶۴, ۸۴, ...

ب ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ...

پ ۵, ۵, ۵, ۵, ۵, ...

ت ۱۰, ۱۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰۰, ۱۰۰,۰۰۰, ...

ث ۲۰, ۲۱, ۲۳, ۲۶, ۳۰, ..., ...

ج ۱۵, ۱۴, ۱۳, ۱۲, ۱۱, ...

۳- مجموع ۱۵ جمله‌ی اول دنباله‌های حسابی تمرین ۲ را حساب کنید .

۴- دنباله حسابی روی رو را در نظر بگیرید :

و هر جمله آن را در ۲ ضرب کنید. دنباله‌ی

به دست می‌آید.

الف) آیا دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی حسابی است؟

ب) اگر جمله‌های دنباله‌ی حسابی را در یک عدد ضرب کنیم، آیا دنباله‌ی حاصل همیشه دنباله‌ی حسابی خواهد شد؟ چرا؟

۵- مجموع ۵ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۲۰۰ و مجموع ۵ جمله‌ی بعدی آن ۲۷۰۰ است، جمله‌ی اول این دنباله را پیدا کنید.

۶- در فعالیت ۱، ردیف صفر را به گل‌ها اضافه کنید : یعنی در ردیف صفر هیچ گلی نباشد و در ردیف ۱ یک گل و به همین ترتیب تا در ردیف ۷ که هفت گل قرار می‌گیرد. این بار ترتیب چیدن گل‌ها چه شکلی می‌سازد؟ تعداد گل‌ها را با توجه به مساحت این شکل

به دست آورید.

۷- مجموع<sup>۱</sup> ۵ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۱۰۰ و مجموع سه جمله‌ی بزرگ‌تر هفت برابر مجموع دو جمله‌ی کوچک‌تر است. جمله‌های این دنباله را پیدا کنید. (قدر نسبت مثبت فرض شود)

## ۴-۲- دنباله‌ی هندسی

### ۳-۲- فعالیت

نیما به دنبال شغل مناسبی می‌گشت تا بتواند هم هزینه‌ی تحصیل خود را تأمین کند و هم مهارت‌های شغلی خود را بالا ببرد، در ضمن فرصت کافی برای درس خواندن داشته باشد، او در صفحه‌ی نیازمندی‌های روزنامه، چشمش به یک آگهی درباره‌ی شغل مورد علاقه‌اش افتاد که نوشته بود : «به یک جوان وظیفه شناس و ماهر در زمینه‌ی مورد نظر نیازمندیم. برای کار خوب دستمزد خوب می‌دهیم. روز اول به شما یک ریال و سیپس تا پایان ماه، هر روز دستمزد شما را دوباره‌ی می‌کنیم. مقاضیان با در دست داشتن مدارک و یک معرفی‌نامه‌ی معتبر به آدرس ... مراجعه نمایند.»

نیما اول از دستمزد و عده داده شده خنده‌اش گرفت! اما پس از چند لحظه از روی کنجکاوی و به عنوان سرگرمی، تصمیم گرفت درآمد یک ماه را محاسبه نماید. ما هم به همراه نیما، به بررسی راه‌های مختلف محاسبه‌ی دستمزدهای روزانه و درآمد ماهانه‌ی و عده داده شده می‌پردازیم تا با تأکید پیشنهاد رد یا قبول این شغل را به او بدهیم!

شاید طبیعی‌ترین راهی که به ذهن برسد، دوباره‌ی کردن دستمزد روز قبل برای به دست آوردن دستمزد روز بعد و ادامه آن تا ۲۹، ۳۰ یا ۳۱ روز (تعداد روزهای ماه‌های مختلف سال) باشد<sup>۲</sup>، آیا صرف وقت برای چنین کار یکنواختی معقول به نظر می‌رسد؟ شاید بتوانیم چاره‌ای بیندیشیم و راه میان‌بری برای انجام این محاسبات پیدا کنیم. در تلاش برای یافتن این راه میان<sup>۳</sup>، با قدرت و ظرافت ریاضی بیشتر آشنا می‌شویم، زیرا در هر دو صورت (قبول یا رد پیشنهاد) از وقتی که صرف کرده‌ایم پسیمان نخواهیم شد، چرا که با ساختار مسئله بیشتر آشنا شده‌ایم. در واقع این آگهی بهانه‌ای برای ما

۱- برگرفته از بولیا، ۱۹۶۲ که اصل مسئله از پاپیروس رایند در مصر باستان گرفته شده است.

۲- می‌توانید از مانیشن حساب استفاده کنید.

خواهد شد تا چیزهای جدیدتری یاد بگیریم.

اگر کسی شغلی به شما پیشنهاد کند که دستمزد روز اول آن یک ریال باشد و سپس تا پایان ماه این دستمزد هر روز دو برابر شود، آیا شغل را می‌پذیرید یا رد می‌کنید؟ برای یافتن پاسخ این سؤال می‌توانیم جدولی تهیه کنیم و دستمزدهای روزانه را در آن یادداشت کنیم. الگویی برای ادامه‌ی کار پیدا نماییم و مجبور نباشیم که وقت زیادی را صرف آن کنیم.

(جدول ۱)

روزهای ماه	دستمزد روزانه
۱	۱
$1 \times 2 = 2$	۲
$2 \times 2 = 4$	۳
$4 \times 2 = 8$	۴
$8 \times 2 = 16$	۵
$16 \times 2 = 32$	۶

قبل از آن که جدول را ادامه دهیم به بررسی آن می‌پردازیم، شاید الگوی مناسبی پیدا کنیم و با دنبال کردن آن، از ادامه‌ی این کار بی‌نیاز شویم.

با دقّت در جدول (۱)، متوجه می‌شویم که دستمزدهای روزانه در ستون دوم توان‌های ۲ هستند و رابطه‌ای نیز بین روزهای ماه و توان‌های ۲ در ردیف نظری آن‌ها در آن ستون وجود دارد. بنابراین

جدول (۲) را تشکیل می‌دهیم.

(جدول ۲)

روزهای ماه	دستمزد روزانه
۱	$1 = 2^0$
۲	$2 = 2^1$
۳	$4 = 2^2$
۴	$8 = 2^3$
۵	$16 = 2^4$
۶	$32 = 2^5$

تمرین ۷: دستمزد روز دهم را از روی جدول حدس بزنید. سپس با ادامه‌ی جدول، حدس خود را به آزمایش بگذارید. بعد از اطمینان از درستی حدس خود، دستمزد روزهای بیست و نهم، سی‌ام و سی‌ویکم را پیدا کنید.

حالا که دستمزدهای روزهای بیست و نهم، سی‌ام و سی‌ویکم را هم به دست آورده‌یم، می‌توانیم عدد دلخواه  $n$  کوچک‌تر یا مساوی ۳۱ را به عنوان نماینده‌ی روز انتخاب کنیم و رابطه‌ی به دست آمده از جدول (۲) را دوباره بنویسیم، که جدول (۳) به دست می‌آید.

با دقّت در جدول (۳) حدس ما به یقین تبدیل شد و مطمئن شدیم که دستمزد هر روز از رابطه‌ی «۲ به توان یکی کمتر از آن روز» به دست می‌آید. با ادامه‌ی جدول، دستمزد روز  $n^{\text{ام}}$  (عددی طبیعی) را پیش‌بینی می‌کنیم، که در جدول (۴) آمده است.

(جدول ۳)

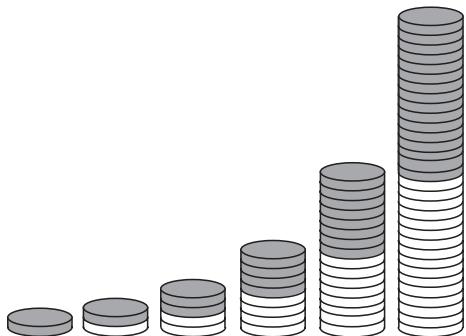
روز	$n$	دستمزد روزانه
۱		$2^0 = 2^{1-1} = 2^{n-1}$
۲		$2^1 = 2^{2-1} = 2^{n-1}$
۳		$2^2 = 2^{3-1} = 2^{n-1}$
۴		$2^3 = 2^{4-1} = 2^{n-1}$
۵		$2^4 = 2^{5-1} = 2^{n-1}$
۶		$2^5 = 2^{6-1} = 2^{n-1}$

(جدول ۴)

روز	$n$	دستمزد روزانه
روز اول	۱	$2^0$
روز دوم	۲	$2^1$
روز سوم	۳	$2^2$
روز چهارم	۴	$2^3$
⋮	⋮	⋮
روز یازدهم	۱۱	$2^{11-1} = 2^0$
⋮	⋮	⋮
روز بیست و نهم	۲۹	$2^{29-1} = 2^8$
روز سی‌ام	۳۰	$2^{30-1} = 2^9$
روز سی‌ویکم	۳۱	$2^{31-1} = 2^{10}$

این مسئله را به صورت نموداری نیز می‌توان شان داد.

دیده می‌شود که با دانستن آخرین رابطه‌ی جدول (۴)، یعنی دستمزد  $n^{\text{ام}}\text{ین روز}$ ، می‌توانیم دستمزد هر روزی را که بخواهیم، به دست آوریم



نکته‌ی جالب اینجاست که با مشاهده‌ی دستمزدهای روزهای مختلف، رابطه‌ی (۱) را نتیجه‌گرفتیم و حالا با استفاده از این نتیجه‌ی کلی، می‌توانیم بدون انجام محاسبات قبلی، دستمزد روزانه را پیدا کنیم. این همان قوت و ظرافت ریاضی بود که به دنبالش می‌گشتبیم!

$$2^{n-1} = \text{دستمزد } n^{\text{امین روز}} \quad (1)$$

**تمرین ۸:** رابطه‌ی بین مراحل مختلف فعالیت (۲-۳) و نتیجه‌گیری نهایی را با استقراری تجربی و استدلال استنتاجی بررسی کنید.

**تمرین ۹:** مقدار تقریبی دستمزد روزهای سیام و سی و یکم را بر حسب ریال و تومان به دست آورید. آیا می‌توانید در تصمیم‌گیری به نیما کمک کنید یا هنوز به دلایل بیشتری نیازمندید؟

## فعالیت ۲-۴

در فعالیت ۲-۳، دستمزد روزانه‌ی شغل پیشنهادی در آگهی روزنامه را بررسی کردیم. با این حال، هنوز از درآمد ماهانه اطلاع درستی در دست نداریم. پس با تکمیل جدول (۱) صفحه‌ی ۳۲، به مطالعه‌ی درآمدها می‌پردازیم تا شاید الگوی مناسبی برای تعیین درآمد در  $n^{\text{امین روز}}$  بیابیم.

با دقت در جدول (۵)، امکان وجود رابطه‌ای بین  $n$  و درآمد تاپایان روز  $n^{\text{ام}}$  را بررسی

می‌کنیم :

(جدول ۵)

درآمد تاپایان روز $n^{\text{ام}}$ (مجموع دستمزدها)	دستمزد روز $n^{\text{ام}}$	$n$	روز
۱	$2^0 = 1$	۱	روز اول
$1+2=3$	$2^1 = 2$	۲	روز دوم
$1+2+4=7$	$2^2 = 4$	۳	روز سوم
$1+2+4+8=15$	$2^3 = 8$	۴	روز چهارم
$1+2+4+8+16=31$	$2^4 = 16$	۵	روز پنجم
$1+2+4+8+16+32=63$	$2^5 = 32$	۶	روز ششم
:	:	:	:

با توجه به جدول (۶) می‌توانیم رابطه‌ی عمومی بینا کردن مجموع دستمزد‌ها (درآمد ماهانه) را

پیش‌بینی کنیم :

$$درآمد ماهانه = 2^n - 1 \quad (2)$$

(جدول ۶)

روز	n	دستمزد روز $n^{\text{ام}}$ (مجموع دستمزد‌ها)	درآمد تا پایان روز $n^{\text{ام}}$ (مجموع دستمزد‌ها)
روز اول	۱	$2^1 - 1$	$2^0 = 0 = 2^1 - 1$
روز دوم	۲	$2^2 - 1$	$2^1 = 2 = 2^2 - 1$
روز سوم	۳	$2^3 - 1$	$4 = 2^2 = 2^3 - 1$
روز چهارم	۴	$2^4 - 1$	$8 = 2^3 = 2^4 - 1$
روز پنجم	۵	$2^5 - 1$	$16 = 2^4 = 2^5 - 1$
روز ششم	۶	$2^6 - 1$	$32 = 2^5 = 2^6 - 1$
⋮	⋮	⋮	⋮
روز سی ام	۳۰	$2^{30} - 1$	$2^{30} - 1$

تمرین ۱۰: درآمد تقریبی را در روز سی ام و سی و یکم به دست آورید و با دلیل، به نیما تصمیم قاطع خود را در مورد قبول یا رد شغل پیشنهادی بگویید!

جدول (۶) به ما کمک کرد که میان بُرزنیم و بدون جمع کردن و تنها با استفاده از رابطه‌ی (۲)، مجموع دستمزدهای روزانه را به دست آوریم.

تمرین ۱۱: آیا از رابطه‌ی (۲) می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$1 - (2 \times \text{دستمزد روز } n^{\text{ام}}) = \text{درآمد تا پایان روز } n^{\text{ام}}$$

درستی نتیجه را با توجه به جدول (۶) و رابطه‌ی (۲) بررسی کنید.

اگر دستمزد هر روز را یک جمله بنامیم و آن‌ها را در یک سطر بنویسیم، می‌بینیم که افزایش آن‌ها نسبت ثابتی دارد، یعنی هر جمله با دو برابر کردن جمله قبلی به دست می‌آید.

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

این جمله‌ها (اعداد) دنباله‌ی توان‌های ۲ را تشکیل می‌دهند.

حال می‌خواهیم از روش پیدا کردن دستمزدها در فعالیت‌های قبلی استفاده کنیم و مسئله را تعمیم دهیم. به همین دلیل، به جای دستمزد پیشنهادی «یک ریال» برای روز اول مقدار  $a$  و به جای

«دوباره شدن»،  $r^1$  برابر شدن با شرط  $r$  بزرگ‌تر از یک و به جای  $3^n$  روز،  $n$  روز را درنظر می‌گیریم. تغییر آگهی استخدام چنین خواهد بود «اگر کسی به شما شغلی پیشنهاد کند که دستمزد روز اوّل آن  $a$  باشد و این دستمزد بدون توقف هر روز  $r$  برابر شود، آیا پیشنهاد استخدام را برای  $n$  روز می‌پذیرید یا رد می‌کنید؟»

با درنظر گرفتن این تغییرات، جدول (۴) را دوباره‌سازی می‌کنیم (جدول ۷).

(جدول ۷)

دستمزد روزانه $a$ ، نسبت افزایش $r$	$n$	روز
$ar^0 = a$	۱	جمله‌ی اول
$ar = ar^1$	۲	جمله‌ی دوم
$(ar)r = ar^2$	۳	جمله‌ی سوم
$(ar^2)r = ar^3$	۴	جمله‌ی چهارم
$(ar^3)r = ar^4$	۵	جمله‌ی پنجم
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
$ar^{n-1}$	$n$	جمله‌ی $n^{\text{ام}}$

به جمله  $n^{\text{ام}}$ ، جمله‌ی عمومی گفته می‌شود و آن را با  $t = ar^{n-1}$  نمایش می‌دهند  
جمله‌ی عمومی :

دستمزدهای جدول (۷) را به ترتیب روزها در یک سطر می‌نویسیم :

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots, ar^{29}, \dots, ar^{n-1} \dots$$

این جمله‌ها تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند و نسبت بین هر دو جمله‌ی متوالی غیرصفر یعنی  $r$ ،  
که ثابت است را قدر نسبت می‌گویند. ( $a \neq 0$ )

هر جمله از یک دنباله‌ی هندسی از ضرب جمله‌ی قبلی در یک مقدار ثابت به دست می‌آید. با فرض مثبت بودن جمله‌ی اول، اگر مقدار ثابت بزرگ‌تر از یک باشد دنباله افزایشی و اگر مقدار ثابت کوچک‌تر از یک باشد، دنباله کاهشی خواهد بود.

۱- اول کلمه‌ی ratio به معنی نسبت است. در کتاب‌های قدیمی، به جای  $r$  از  $q$  که اول کلمه‌ی لاتین quotient است

استفاده می‌کردند.

همان طور که در جدول (۶) دیدیم، برای به دست آوردن کل درآمد در پایان هر روز، مجموع دستمزدهای روز اول تا آن روز را محاسبه کردیم. همان روند را ادامه می‌دهیم و راه میان بُری برای پیدا کردن مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول  $a$  و مقدار ثابت  $r$  جستجو می‌کنیم :

$$\text{مجموع } n \text{ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad (۳)$$

## فعالیت ۲

هر دو شیوه‌ای را که برای به دست آوردن مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی اتخاذ کردید، در مورد پیدا کردن مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی نیز به کار ببرید. آیا به نتیجه‌ای رسیدید؟ آیا آن شیوه‌ها را توانستید به عنوان یک روش در این مورد هم به کار ببرید یا خیر؟ نتیجه به دست آمده را بررسی کنید.

همان طور که در مورد پیدا کردن  $n$  جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی ملاحظه کردید، سعی ما بر این بود که تا حد امکان، تعداد مجهول‌ها را کم بکنیم و رابطه‌ای پیدا کنیم که اجزای کمتر و کلیت بیشتری داشته باشد. با دقّت در رابطه‌ی (۳) می‌بینیم که اگر رابطه‌ی (۴) را از ضرب  $r$  در (۳) نتیجه بگیریم، بسیاری از جمله‌های رابطه‌ی اخیر با (۳) مشابه هستند.

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ S_n r &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \end{aligned} \quad (۴)$$

با کم کردن (۳) از (۴) جمله‌های مشابه حذف می‌شوند و آن‌چه که باقی می‌ماند چنین است

$$S_n r - S_n = ar^n - a \quad (۵)$$

چون مجهول ما،  $S_n$ ، یعنی مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی بود، در نتیجه با فاکتور گیری از عامل مشترک  $S_n$  و  $a$  در دو سمت رابطه‌ی (۵)، مقدار  $S_n$  را به دست می‌آوریم

$$S_n(r-1) = a(r^n - 1)$$

با

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}} \text{ یا } \boxed{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}} \quad (۶)$$

تمرین ۱۲: مجموع  $5^{\circ}$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۴ و قدر نسبت ۳ را به دست آورید.

تمرین ۱۳: با توجه به اینکه جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی  $a^n$  یک دنباله‌ی هندسی برابر است با  $ar^{n-1}$ ، رابطه‌ی (۶) را بر حسب جمله‌ی عمومی بنویسید.

## فعالیت ۲-۶

الف - قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی ...، ۴، ۴، ۴، ۴ را پیدا کنید؛  
ب - با استفاده از رابطه‌ی (۶) سعی کنید مجموع  $n$  جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید.  
به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

همان طور که در فعالیت ۴ دیدید، اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی یک باشد، رابطه‌ی (۶)

به صورت کسر  $\frac{1}{r}$  درمی‌آید، در نتیجه لازم است که رابطه‌ی (۶) را محدود به دنباله‌های هندسی با  
قدر نسبت  $r \neq 1$  بکنیم

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} ; \quad r \neq 1 \quad (7)$$

تمرین ۱۴: چگونگی رابطه (7) را برای حالتی که  $r$  بزرگتر از صفر و کوچکتر از یک است بررسی کنید. اگر تعداد جمله‌های دنباله‌ی هندسی بیشتر و بیشتر شود، چه تغییراتی در مجموع فوق پیش می‌آید؟ درباره‌ی آن فکر کنید!

## فعالیت ۷-۲

مُدّت ۷۰ سال طول می‌کشد تا تعداد اتم‌های تجزیه شده‌ی اورانیوم ۲۳۲ به نصف برسد و

۱ - کسر  $\frac{1}{2}$  تعریف نشده است.

دوباره ۷۰ سال دیگر طول می‌کشد تا نیمی از اتم‌های باقی‌مانده، یعنی نیمی از نصف تجزیه شوند و این روند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند. فرض کنید که نمونه‌ای از این نوع اورانیوم شامل ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ اتم در سال ۱۰۰۰ میلادی بوده است. در نتیجه، مقدار باقی‌مانده اورانیوم در پایان هر هفتاد سال که آن را یک دوره‌ی زمانی می‌نامیم، به نصف مقدار قبلی کاهش می‌باید

$$\dots \text{ و } \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{2} \times (1,000,000,000) \right), \quad 1,000,000,000$$

با دقّت در سطر بالا، متوجه می‌شویم که این اعداد نمایشگر یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول  $a = 1,000,000,000$  و قدر نسبت  $r = \frac{1}{2}$  هستند. مقدار اورانیوم باقی‌مانده در سال‌های ۱۰۷۰، ۱۱۴۰، ۱۲۱۰، ۱۲۸۰ و ۱۳۵۰ یعنی در یک، دو، سه، چهار و پنج دوره‌ی زمانی را محاسبه می‌کنیم :

(جدول ۸)

مرتبه‌ی جمله	سال میلادی	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقی‌مانده	نتیجه
جمله‌ی اول	۱۰۰۰	۰×۷۰	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰
جمله‌ی دوم	۱۰۷۰	۱×۷۰	$1,000,000,000 \times \frac{1}{2}$	$1,000,000,000 \times \frac{1}{2}$
جمله‌ی سوم	۱۱۴۰	۲×۷۰	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$
جمله‌ی چهارم	۱۲۱۰	۳×۷۰	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$
جمله‌ی پنجم	۱۲۸۰	۴×۷۰	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$
جمله‌ی ششم	۱۳۵۰	۵×۷۰	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$

در جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که

الف) مقدار اورانیوم باقی‌مانده به سرعت رو به زوال می‌رود؛

ب) بین دوره‌های زمانی، تعداد ضریب‌های  $r = \frac{1}{2}$  و مرتبه‌ی جمله‌های این تصاعد هندسی رابطه‌ای برقرار است؛

با توجه به مشاهده‌ی فوق، جدول (۸) را دوباره می‌نویسیم که جدول (۹) حاصل می‌شود.

(جدول ۹)

سال	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقیمانده	مرتبه‌ی جمله‌های دنباله
۱۰۰۰	۰	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$	جمله‌ی اول
۱۰۷۰	۱	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1$	جمله‌ی دوم
۱۱۴۰	۲	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$	جمله‌ی سوم
۱۲۱۰	۳	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$	جمله‌ی چهارم
۱۲۸۰	۴	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$	جمله‌ی پنجم
۱۳۵۰	۵	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$	جمله‌ی ششم

تمرین ۱۵: مقدار اورانیوم باقیمانده در سال‌های ۱۷۰° و ۱۹۸° را اول حدس بزنید و سپس محاسبه کنید.

شاید از خود بپرسید که چه زمانی مقدار اورانیوم به صفر نزدیک می‌شود؟ برای یافتن پاسخ، جدول (۹) را ادامه می‌دهیم که نتایج در جدول ۱° ثبت شده است.

(جدول ۱۰)

سال	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقیمانده	مرتبه‌ی جمله‌های دنباله
۱۰۰۰	۰	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$	جمله‌ی اول
۱۰۷۰	۱	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1$	جمله‌ی دوم
۱۱۴۰	۲	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$	جمله‌ی سوم
۱۲۱۰	۳	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$	جمله‌ی چهارم
۱۲۸۰	۴	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$	جمله‌ی پنجم
۱۳۵۰	۵	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$	جمله‌ی ششم
⋮	⋮	⋮	⋮
۱۹۸۰	۱۴	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$	جمله‌ی پانزدهم
⋮	⋮	⋮	⋮
	n-1	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	جمله‌ی n <sup>ام</sup>
	n	$1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$	جمله‌ی (n+1) <sup>ام</sup>

همان طور که در تمرین ۱۵ دیدید، هر قدر تعداد دوره‌های زمانی ( $n$ ) بیشتر می‌شود، مقدار  $\left(\frac{1}{r}\right)^n$  و مقدار باقیمانده اورانیوم کم کم به صفر نزدیک شود.

تمرین ۱۶: به کمک ماشین حساب، مقدار اورانیوم باقیمانده را برای  $n$  های بزرگتر از ۱۴ و کوچکتر از ۲۰ به دست آورید ( $n$  عدد طبیعی است) و نتیجه را گزارش کنید. سپس تا آنجایی که می‌توانید، پیش بروید و سالی که مقدار اورانیوم باقیمانده بسیار نزدیک به صفر می‌شود را پیدا کنید.

همان طور که در تمرین ۱۴ حدس زدید، با افزایش تعداد دوره‌های زمانی، مقدار اورانیوم کم و کمتر می‌شود. پس از گذشت ۳۰۰ دوره‌ی زمانی ( $300 = 21000 \times 70 = 300 \times 70 = 21000$ ) یعنی در سال ۲۲۰۰۰ میلادی، مقدار اورانیوم را حساب می‌کنیم

$$41909 \times 10^{-82} = 41909 \times \left(\frac{1}{r}\right)^{300} = 41909 \times 1,000,000,000 = \text{جمله‌ی سیصد و یکم}$$

می‌بینیم که این مقدار خیلی نزدیک به صفر است. اگر محاسبه را ادامه دهیم، جمله‌ی سیصد و بیست و نهم یعنی  $\left(\frac{1}{r}\right)^{328} \times 1,000,000,000$  را ماشین حساب صفر نشان می‌دهد.

الف - در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت بزرگ‌تر از صفر و کوچک‌تر از یک، هر قدر تعداد جمله‌ها ( $n$ ) بیشتر و بیشتر شود، جمله‌ی  $a_n$  به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به زبان نمادین، اگر تعداد جمله‌ها یعنی  $n$  به سمت بی‌نهایت میل کند، حد  $a_n$  صفر می‌شود (از نماد  $\infty$  برای نشان دادن بی‌نهایت استفاده می‌شود و Limit به معنای حد است).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ب - در فعالیت ۱، دیدیم که چون مقدار قدر نسبت بزرگ‌تر از یک بود  $(r = 2 > 1)$  در نتیجه ...  $r^3 < r^2 < r$ ، اما در فعالیت ۲ چون قدر نسبت کوچک‌تر از یک بود  $(\frac{1}{r} < r < 1)$  در نتیجه ...  $r^3 > r^2 > r$ . با بیشتر شدن  $n$ ،  $r^n$  کوچک و کوچک‌تر می‌شود و به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به زبان نمادین، حد  $r^n$  وقتی که  $n$  به سمت بی‌نهایت میل می‌کند برابر صفر می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

تمرین ۱۷ — مجموع یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول  $a$  و قدر نسبت  $r < 1$  را بررسی کنید.

## فعالیت ۲ — ۸



به سوی بی‌نهایت [۱] باطل‌نمای زنون نیاز به پیدایش یک نظریه برای فرایندهای نامتناهی داشت. همچنین نظریه‌ی چنین فرایندی، نیوتن ولاپ نیتر را به سوی کشف حسابان راهبری کرد.

شاید داستان باطل‌نمای<sup>۱</sup> زنون را شنیده باشد! ماجرا از این قرار است که در زمان‌های دور، دونده‌ای قصد پیمودن یک مسیر را داشته است. زنون مسأله را چنین می‌دید که دونده در مرحله‌ی اول نصف مسافت را می‌پیماید، سپس نصف مسافت باقی‌مانده — یعنی نصف نصف مسافت — را می‌دود، بعداً نصف نصف نصف مسافت را طی می‌کند و به همین ترتیب تا به پایان مسیر برسد. با کمی دقّت، متوجه می‌شویم که مسافت‌های طی شده در هر مرحله، یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت

$$r = \frac{1}{2} \text{ و جمله‌ی اول } a = \frac{1}{2} \text{ تشکیل می‌دهند}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}, \dots$$

در آن زمان، زنون به دلیل عدم آشنایی با نتایجی که در فعالیت ۲-۷ به آن رسیدیم، دچار یک سردرگمی شده بود. علت این بود که از یک طرف، توانایی محاسبه‌ی مجموع یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت مثبت و کوچک‌تر از یک، که تعداد جمله‌های آن روبه افزایش دائمی (تا بی‌نهایت) بودند را نداشت، یعنی نمی‌توانست به وسیله‌ی نمادها و ابزار ریاضی نشان دهد که مجموع مسافت‌های

<sup>۱</sup>— Zeno's paradox

پیموده شده توسط دونده، بالاخره او را به انتهای مسیر می‌رساند! از طرف دیگر، در دنیای واقعی می‌دید که دونده بالاخره مسیر را تمام و کمال طی می‌کند و این جا بود که زنون این داستان را «باطل‌نما» نامید و جامعه‌ی ریاضی مدت‌ها دچار بحرانی بود که این باطل‌نما به وجود آورده بود. با توجه به نتایجی که به دست آورده‌ایم، مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی فوق را دوباره بررسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots$$

دنباله‌ی فوق را به دو طریق زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \dots \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots \quad \text{(ب)}$$

تمرین ۱۸: با توجه به رابطه‌ی (۶) مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی یعنی  $S_n$  را در قسمت (ب) حساب کنید.

تمرین ۱۹: با توجه به نتیجه‌ی تمرین ۱۶، بررسی کنید که با افزایش تعداد  $n$ ‌ها تا بینهایت، وضعیت  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  چگونه می‌شود؟ مقدار  $S_n$  چه قدر می‌شود؟ نتیجه‌ی کار را یادداشت کنید.

نتیجه‌گیری‌های شما را می‌توان به صورت حد مجموع این دنباله نوشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

در حالت کلی، حد مجموع یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت  $1 < r < 0$  و جمله‌ی اول  $a$ ، با توجه به نتایج به دست آمده چنین است:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

یا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$$

## مسائل

۱- کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی هستند؟ قدر نسبت را برای دنباله‌های هندسی پیدا کنید :

- الف) ۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵ ...  
ب) ۷ ۱۴ ۲۱ ۲۸ ۳۵ ...  
پ) ۶۰ ۳۰ ۱۵ ۷/۵ ۳/۷۵ ...

۲- نمودار سمت چپ، چهار جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی را نشان می‌دهد

- (الف) جمله‌ها را مشخص کنید ؛  
ب) قدر نسبت را پیدا کنید ؛  
پ) سه جمله‌ی بعدی را به دست آورید ؛  
ت) مجموع ۱۲ جمله‌ی اول آن را محاسبه کنید .



۳- جاهای خالی را در دنباله‌های هندسی زیر پرکنید :

- الف)  $4, 20, \square, 500, \square$   
ب)  $\square, \square, 63, 189$   
پ)  $1, \square, 1000000$   
ت)  $1, \square, \square, 1000000$   
ث)  $1, \square, 64$   
ج)  $1, \square, \square, 64$   
چ)  $1, \square, 6400000$   
ح)  $1, \square, \square, 64000000$

۴- اگر هر جمله‌ی دنباله‌ی هندسی

$1, 3, 9, 27, \dots$

واحد بیشتر شود، دنباله‌ی به وجود آمده چنین خواهد بود :

$5, 7, 13, 21, \dots$

الف) آیا دنباله‌ی به دست آمده نیز یک دنباله‌ی هندسی است؟

ب) اگر هر جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی افزایش یکسانی داشته باشد، آیا دنباله‌ی جدید می‌تواند

یک دنباله‌ی هندسی باشد؟

۵- اگر هر جمله‌ی دنباله‌ی هندسی

$1, 3, 9, 27, \dots$

در عدد ۴ ضرب شود، حاصل چنین خواهد بود :

$4, 12, 36, 108, \dots$

الف) آیا دنباله‌ی به دست آمده یک دنباله‌ی هندسی است؟

ب) اگر هر جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی در عدد ثابتی ضرب شود، آیا دنباله‌ی به دست آمده

همیشه یک دنباله‌ی هندسی است؟

۶- یک دنباله‌ی هندسی دارای چهار جمله است : مجموع جمله‌های اول و دوم ۴ و مجموع دو جمله‌ی آخر ۳۶ است. جمله‌های این دنباله را بباید.

## ۲ - ۵ - دنباله‌ی مربعی

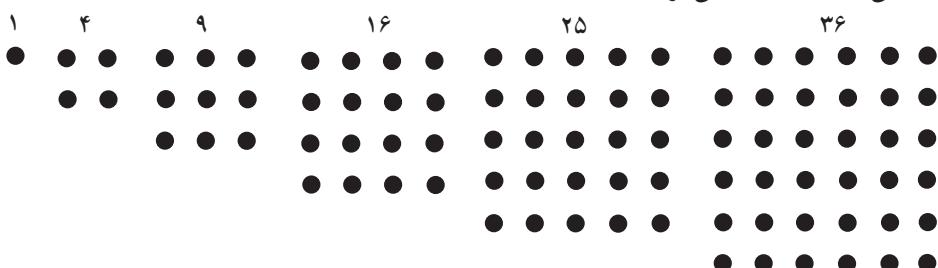
در میان لوحه‌های گلی و سفالی که به‌وسیله‌ی بابلیان در ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح ساخته شده‌اند، دنباله‌های اعداد دیده می‌شوند. اضافه بر لوحه‌هایی که شامل دنباله‌های حسابی و هندسی هستند، یک لوحه یافت شده است که ۶۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی زیر را نشان می‌دهد

$$\dots, 49, 36, 25, 16, 9, 4, 1,$$

همان طور که می‌بینید، جمله‌های دنباله‌ی فوق از ضرب هر عدد طبیعی متوالی در خودش به وجود آمده است و به همین دلیل به آن دنباله‌ی مربعی می‌گویند. دنباله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر هم بازنویسی کرد

$$\dots, 7^2, 6^2, 5^2, 4^2, 3^2, 2^2, 1^2,$$

در حدود ۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، ریاضیدان‌های یونانی غالباً از نقطه‌ها برای نمایش هندسی اعداد استفاده می‌کردند:



در واقع، شکل‌های بالا دلیل نام‌گذاری اعداد مربعی هستند.

اعداد مربعی اعدادی هستند که می‌توان آنها را در یک آرایه‌ی مربعی شکل نمایش داد.

اگر به شکل‌ها دقّت کنید، می‌بینید که طول ضلع‌های مربع‌هایی که به ترتیب از ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵ و ۳۶ نقطه تشکیل شده‌اند به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، یعنی ریشه‌ی مربع‌های فوق هستند. دنباله‌ی مربع‌ها رابطه‌ی جالبی با دنباله‌ی حسابی اعداد فرد دارد. در واقع، مجموع اعداد فرد متوالی که از یک شروع می‌شوند، اعداد مربعی هستند

$$1 = 1 = 1^2$$

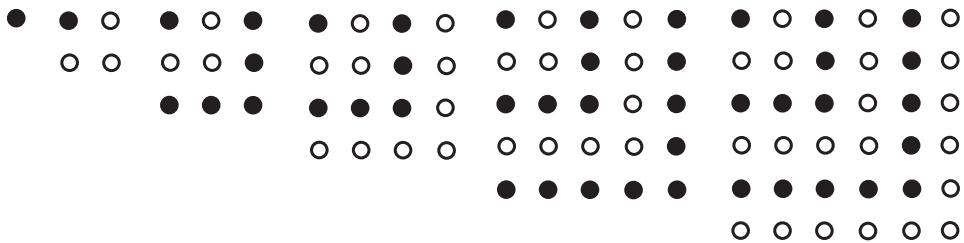
$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

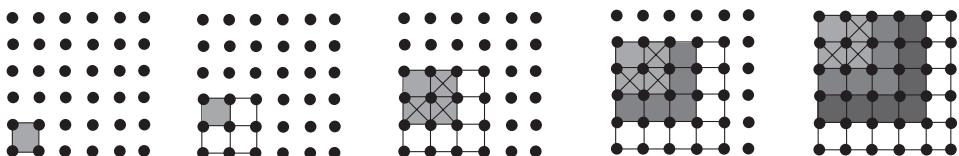
$$1+3+5+7=16=4^2$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

اساس این رابطه در شکل‌های زیر دیده می‌شود:



آرایه‌ی این الگوها به دو صورت عددی و هندسی، به بهتر دیدن روابط موجود در الگوها کمک می‌کند. به شکل دیگری از آرایه فوق توجه کنید:



## ۹\_۲ فعالیت

مربع‌های با ضلع‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را در نظر بگیرید. آنگاه محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها را به ترتیب و جداگانه یادداشت کنید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، محیط‌ها و مساحت‌ها، هریک تشکیل یک دنباله‌ی عددی می‌دهند:

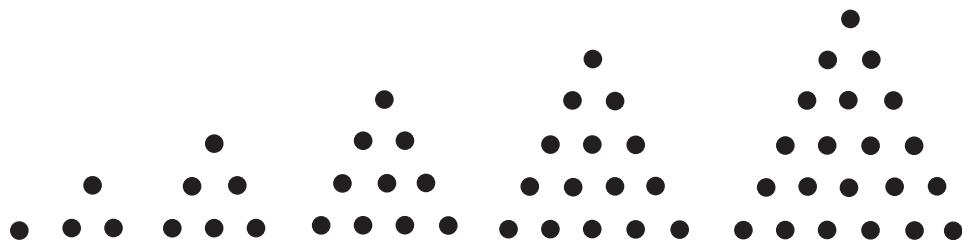
الف) نوع دنباله‌ها را مشخص کنید؛

- ب) اگر طول ضلع مربعی دو برابر شود، محیط آن چه تغییری می‌کند؟  
پ) اگر طول ضلع مربعی دو برابر شود، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟

## ۶-۲- دنباله‌ی مثلثی

اعداد دنباله‌ی  $1, 3, 6, 10, 15, \dots$  مثلثی نامیده شوند زیرا آن‌ها نمایندهٔ تعداد نقطه‌ها در یک

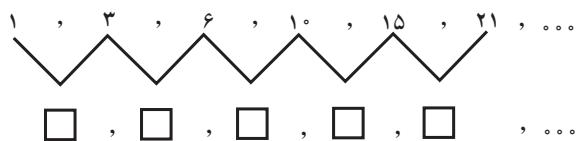
آرایه‌ی مثلثی هستند:



### ۱۰- فعالیت

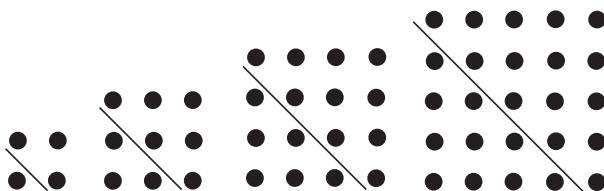
الف) شش جمله‌ی دنباله‌ی مثلثی بالا را عیناً یادداشت کنید. سپس پنج جمله‌ی بعدی این دنباله را با نقطه‌ها نشان دهید؛

ب) هر چفت از جمله‌های متولی این دنباله را باهم جمع کنید تا یک دنباله‌ی جدید ساخته شود. به نمونه‌ی زیر توجه کنید:



ویرگی دنباله‌ی نتیجه شده چیست؟

شکل زیر جواب شما را به تصویر می‌کشد:

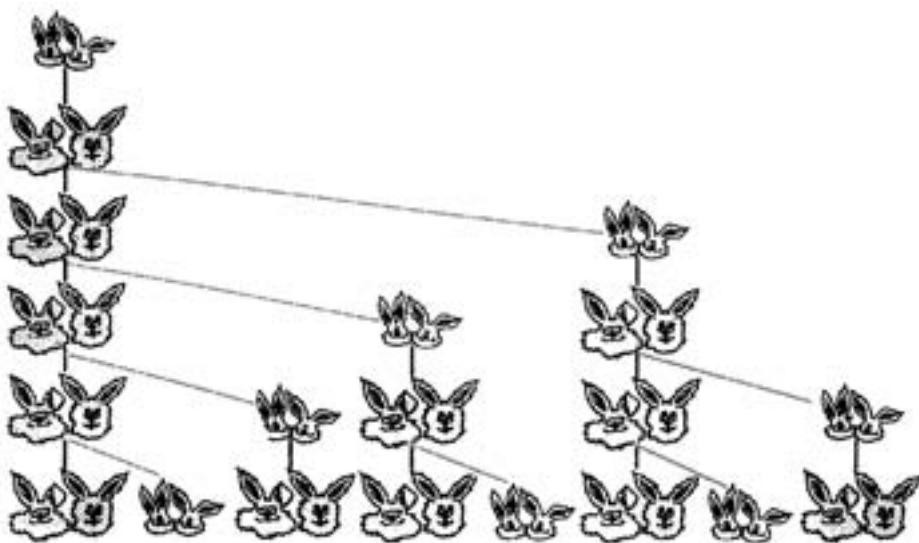


تمرین ۲۰: توان‌های ۳، ۴، الی آخر اعداد طبیعی، هریک تشکیل یک دنباله‌ی عددی می‌دهند که همگی در نوع خود جالب هستند. شما به عنوان تمرین دنباله‌ی عددی اعداد طبیعی مکعبی را بنویسید. آنگاه آن را با دنباله‌ی مساحت‌ها و محیط‌های مربع‌هایی با اضلاع متفاوت مقایسه کنید و نتیجه را یادداشت نمایید.

## ۷-۲ دنباله‌ی فیبوناتچی

یک جفت خرگوش نر و ماده‌ی یک ماهه، برای تولید مثل بسیار جوان هستند. اما فرض کنید که این جفت خرگوش در ماه دوم تولد خود و ماه‌های پس از آن، هر ماه یک جفت خرگوش نر و ماده به دنیا بیاورند. اگر هر جفت خرگوش متولد شده به همین روال تولید مثل کند و اگر هیچ کدام از خرگوش‌ها نمیرند، در شروع هر ماه چند جفت خرگوش وجود خواهد داشت؟ شکل زیر تعداد جفت خرگوش‌ها را در شش ماهه‌ی اول نشان می‌دهد:

فیبوناتچی



## ۱۱-۲ فعالیت

الف) جدول زیر با توجه به شکل تنظیم شده است. باقی جدول را کامل کنید :

ماه	جفت خرگوش‌های نوزاد	مجموع جفت خرگوش‌ها	جفت خرگوش‌های بزرگ	۱
اول	۰	۱	۱	۱
دوم	۰	۱	۱	۱
سوم	۱	۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
چهارم	۱	۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
پنجم	۱	۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ششم	۱	۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

ب) رابطه‌ی بین مجموع جفت خرگوش‌ها و جفت خرگوش‌های بزرگ و نوزاد را بنویسید.

پ) چه رابطه‌ای بین تعداد جفت خرگوش‌های بزرگ در یک ماه و تعداد کل جفت خرگوش‌ها

در ماه قبل وجود دارد؟

همان‌طور که مشاهده کردید، تعداد جفت خرگوش‌ها طی شش ماه، دنباله‌ی زیر را تشکیل می‌دهند :

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸

با کمی دقت می‌بینیم که جمله‌ی سوم مجموع دو جمله‌ی اول و دوم، جمله‌ی چهارم مجموع

جمله‌ی دوم و سوم و الی آخر است. دنباله‌ی بالا را ادامه می‌دهیم :

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ...

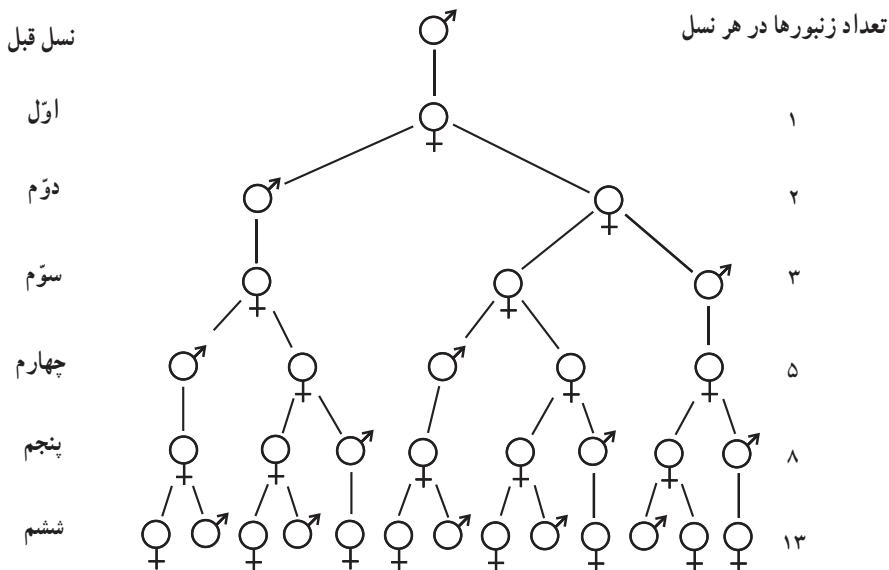
این دنباله منسوب به **فیبوناتچی**<sup>۱</sup> ریاضیدان معروف ایتالیایی قرن سیزدهم میلادی است.

دنباله‌ی فیبوناتچی یک دنباله عددی است که دو جمله‌ی اول آن ۱ و هر جمله‌ی پس از

آن‌ها مجموع دو جمله‌ی قبل است. به زبان نمادین، برای  $n$ ‌های بزرگ‌تر یا مساوی دو

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

دنباله‌ی فیبوناتچی به طور اعجاب‌آوری در پدیده‌های طبیعی و مصنوعی ظاهر می‌شود. چگونگی تکثیر خرگوش‌ها در طبیعت مثال جالبی از دنباله‌های فیبوناتچی است. چگونگی زاد و ولد زنبور عسل نر هم بطبق قانون‌مندی این دنباله است. همان‌طور که می‌دانید، زنبور عسل نر تنها یک والد (مادر) دارد در حالی که زنبور عسل ماده، هم پدر و هم مادر دارد. در نتیجه شجره‌ی زنبور عسل نر الگوی عجیبی دارد. با این حال، تعداد زنبورها در نسل‌های متوالی تشکیل یک دنباله‌ی فیبوناتچی می‌دهند.<sup>۱</sup>



تمرین ۲۱: جمله‌های دنباله‌ی فیبوناتچی دو در میان بر دو بخش پذیر است :

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ۱۴۴, ۲۳۳, ۳۷۷,

۶۱۰, ۹۸۷, ۱۵۹۷, ۲۵۸۴, ۴۱۸۱, ۶۷۶۵, ۱۰۹۴۶, ...

کدامین جمله‌ها بر اعداد زیر بخش‌پذیرند؟

(الف) سه :

(ب) پنج :

(پ) هشت :

(ت) سیزده :

ث) به نظر شما، کدامین جمله‌ها بر پنجاه و پنج بخش‌پذیر هستند؟

۱- ♂ علامت زنبور عسل نر و ♀ علامت زنبور عسل ماده است.

دنباله‌ی فیبوناتچی خواص جالبی دارد. به مجموع متوالی هشت جمله‌ی اول این دنباله توجه

کنید:

(جدول ۱۱)

مجموع جمله‌ها	حاصل جمع
$1+1$	= ۲
$1+1+2$	= ۴
$1+1+2+3$	= ۷
$1+1+2+3+5$	= ۱۲
$1+1+2+3+5+8$	= ۲۰
$1+1+2+3+5+8+13$	= ۳۳
$1+1+2+3+5+8+13+21$	= ۵۴

برای پیدا کردن الگو به بررسی دقیق جدول می‌پردازیم تا ما را در پیدا کردن مجموع  $n$  جمله، بدون نیاز به محاسبه‌ی تکراری بالا، یاری کند. به همین منظور، جدول فوق را بازنویسی می‌کنیم و توسعه می‌دهیم تا شاید الگوی مناسب را پیدا کنیم (جدول ۱۲).

(جدول ۱۲)

مجموع جمله‌ها	حاصل جمع	الگوی پیشنهادی
$1+1$	۲	$2 \times 1 + (1-1)$
$1+1+2$	۴	$2 \times 2 + (1-1)$
$1+1+2+3$	۷	$2 \times 3 + (2-1)$
$1+1+2+3+5$	۱۲	$2 \times 5 + (3-1)$
$1+1+2+3+5+8$	۲۰	$2 \times 8 + (5-1)$
$1+1+2+3+5+8+13$	۳۳	$2 \times 13 + (8-1)$
$1+1+2+3+5+8+13+21$	۵۴	$2 \times 21 + (13-1)$

با توجه به الگوی بالا و بدون محاسبه، مجموع ۱۲ جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناتچی را حدس بزنید. سپس حدس خود را با محاسبه‌ی مجموع جمله‌ها به آزمایش بگذارید. آیا الگوی پیشنهادی تعمیم‌پذیر است؟

با توجه به الگوی فوق، مجموع  $n$  جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناتچی را برای  $n > 1$  حدس می‌زنیم :

$$[1] - \text{جمله‌ی } (n-1) \text{ ام} + (\text{جمله‌ی } n \text{ ام}) \times 2 = \text{مجموع } n \text{ جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناتچی]$$

در این بخش، با جلوه‌هایی از نظم طبیعت در رابطه با رشد پدیده‌های طبیعی آشنا شدیم. دنباله‌ی فیبوناتچی ابزاری برای بیشتر شناختن قانونمندی بعضی از الگوهای رشد در طبیعت به ما می‌دهد. به عنوان مثال، ترتیب قرار گرفتن برگ‌های بسیاری از درختان بر روی ساقه‌هایشان به طرز جالبی با دنباله‌ی فیبوناتچی در رابطه هستند.



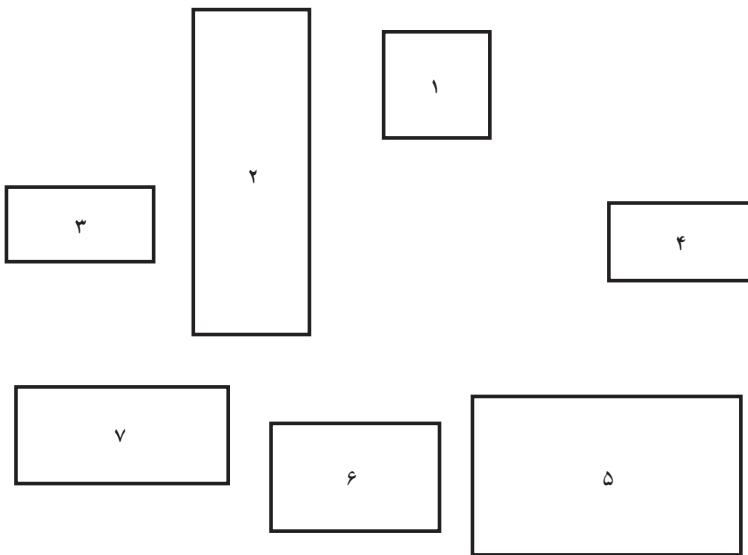
## ۲-۸- نسبت طلایی

### ۱۲-۲ فعالیت

الف) به مستطیل‌های موجود نگاه کنید :

 ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

کدامیک به چشم شما خوشایندتر می‌آید؟  
ب) حال به مستطیل‌های زیر نگاه کنید:



کدامیک به نظر مناسب‌تر می‌آید؟  
پ) ابعاد تمام مستطیل‌ها را در قسمت‌های (الف) و (ب) تا نزدیک‌ترین میلی‌متر ممکن اندازه بگیرید.  
ت) نسبت طول به عرض هریک از مستطیل‌ها را پیدا کنید و نتیجه را یادداشت کنید.  
ث) چه رابطه‌ای بین خوشایندترین مستطیل‌ها در قسمت‌های قبل و نسبت به دست آمده می‌بینید؟

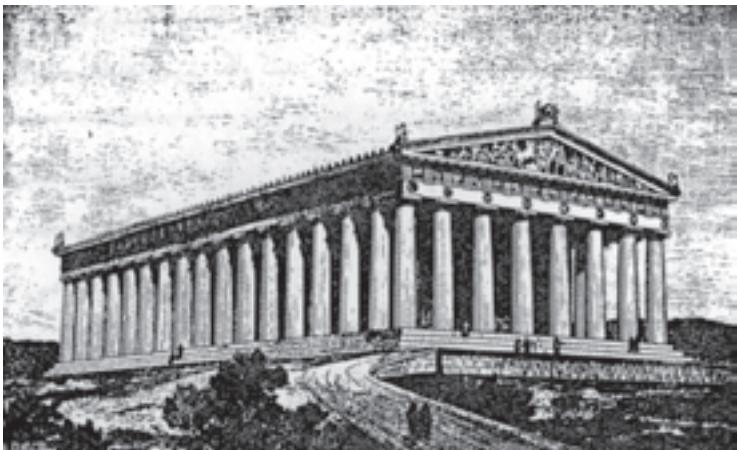
همان‌طور که در فعالیت ۱۲-۲ دیدید، نسبت طول به عرض مستطیل ۳ در قسمت (الف) و مستطیل ۵ در قسمت (ب) مساوی و تقریباً برابر با  $1/\sqrt{5}$  است. هنرمندان یونان قدیم احساس می‌کردند که مستطیل‌هایی با این نسبت ابعاد، به چشم خوشایندتر هستند و به همین دلیل، در خلق آثار هنری معروفی از جمله ساختمان پارthenon<sup>۱</sup> در آتن و مجسمه معروف آپولو<sup>۲</sup> در بلودیر<sup>۳</sup>، از این نسبت استفاده شده است. به این نسبت، نسبت طلایی<sup>۴</sup> می‌گویند.

۱—Parthenon

۲—Apollo

۳—Belvedere

۴—Golden ratio



## ۱۳-۲ فعالیت

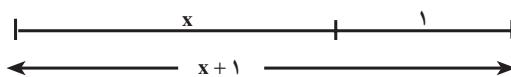
دنباله‌ی فیبوناتچی را تا  $2^{\circ}$  جمله‌ی اول آن بنویسید و به کمک ماشین حساب نسبت بین هر دو جمله را در جدولی یادداشت کنید. آیا نظمی در نسبت‌های به دست آمده مشاهده کردید؟ نتیجه‌ی مشاهدات خود را توضیح دهید.

همچنان که در فعالیت ۱۳-۲ دیدید، هرچه مرتبه‌ی جمله‌های دنباله‌ی فیبوناتچی بالاتر می‌رود، نسبت بین دو جمله‌ی دنباله به عدد  $\frac{1}{\phi} \approx 1.618$  نزدیک و تزدیک‌تر می‌شود که این همان نسبت طلایی است. در حالت کلی، اگر جمله‌ی  $n^{\text{ام}}$  دنباله‌ی فیبوناتچی را با  $F_n$  نمایش دهیم، مشاهده می‌کنیم که با افزایش  $n$ ، نسبت هر دو جمله‌ی متولی دنباله‌ی فیبوناتچی یعنی

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

به نسبت طلایی یعنی  $\frac{1}{\phi} \approx 1.618$ ، نزدیک و تزدیک‌تر می‌شود. اقليدس در کتاب پنجم اصول به این نسبت اشاره کرده است.

نسبت طلایی را از تقسیم یک پاره خط به دو قسمت به روشن دیگری به دست می‌آوریم به طوری که نسبت طول تمام خط به قسمت بلندتر برابر با نسبت قسمت بلندتر به قسمت کوتاه‌تر می‌شود.



تساوی فوق را می‌توانیم به صورت جبری نیز نمایش دهیم:

$$\frac{\text{طول تمام پاره خط}}{\text{طول قسمت بلندتر}} = \frac{\text{طول قسمت بلندتر}}{\text{طول قسمت کوتاه‌تر}}$$

با توجه به نمودار ۱، مقادیر نسبت‌های فوق را جایگزین می‌کنیم

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1},$$

رابطه‌ی فوق را برای  $x$  حل می‌کنیم

$$x^2 = x + 1,$$

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

یا

ریشه‌ی مثبت معادله برابر است با

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

مقدار تقریبی این عدد گنگ، همان نسبت طلایی است که تقریباً برابر با  $\frac{1}{1+1/\sqrt{5}}$  است.  
یکی دیگر از نمایش‌های جالب توجه نسبت طلایی، کسری است که برای همیشه تکرار می‌شود:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\vdots}}}$$

هنمندان ایرانی نیز از نسبت طلایی در هنرهای سنتی از جمله خط نستعلیق و خط شکسته نستعلیق<sup>۱</sup> استفاده کرده‌اند. شما نیز در آفرینش کارهای هنری خود، این نسبت را فراموش نکنید!

## مسائل

۱- به الگوی زیر توجه کنید:

$$1^2 + 1^2 = 2 = 1 \times 2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \times 3$$

۱- «جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق»، نوشه‌ی جواد بختیاری

$$1^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 15 = 3 \times 5$$

$$1^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 5^3 = 40 = 5 \times 8$$

الف) دو سطر بعدی الگوی بالا را بنویسید :

ب) با استفاده از الگوی فوق، مجموع مربع های ده جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناتچی را بدون محاسبه حدس بزنید.

۲- الگوی زیر را در نظر بگیرید :

$$1^3 + 2^3 - 1^3 = 8$$

$$2^3 + 3^3 - 1^3 = 34$$

$$3^3 + 5^3 - 2^3 = \boxed{\phantom{00}}$$

$$5^3 + 8^3 - 3^3 = \boxed{\phantom{00}}$$

الف) جاهای خالی را در الگوی بالا پُر کنید :

ب) دو سطر بعدی الگو را بنویسید :

پ) متوجه چه نظمی شدید؟ توضیح دهید.

## مجله‌ی ریاضی

یکی از مشهورترین مسائل حل نشده‌ی ریاضی، آخرین قضیه‌ی فرمای<sup>۱</sup> بوده است.

این قضیه درباره‌ی معادله‌ای به شکل  $x^n + y^n = z^n$  است که در آن  $x, y, z$  و  $n$  اعداد طبیعی با فرض  $xyz \neq 0$  هستند. مثال‌های زیر نمونه‌هایی از چنین معادله‌ای هستند:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2, \quad 20^2 + 21^2 = 29^2$$

پی‌بر فرما، ریاضیدان معروف فرانسوی در قرن هفدهم میلادی، در حاشیه‌ی

یکی از کتاب‌هایش یادداشتی نوشت حاکی از این که معادله‌هایی به این شکل فقط برای

$n=2$  دارای جواب هستند. فرمای در



یادداشت‌هایش یادآور شد که برای این قضیه اثباتی کشف کرده است اما حاشیه‌ی کتاب باریک است و جای نوشتن اثبات را ندارد! طی سالیان متعددی، ریاضیدان‌های برجسته‌ای برای اثبات این قضیه تلاش کرده‌اند. هر چند وقت یک بار، جامعه‌ی ریاضی

امیدوار از حل این مسأله، نتایجی را اعلام می‌کرد ولی پس از مدت کوتاهی، متوجه نارسا بودن اثبات

می‌شد. بالاخره، در سال ۱۹۹۴، آندره‌وایلز<sup>۲</sup> استاد

ریاضی دانشگاه پرینستون آمریکا موفق به ارائه‌ی اثبات درست و کامل این قضیه شد و این تلاش ۳۰ ساله به نتیجه رسید.

۱—Fermat's last theorem

۲—Andrew Wiles