

احتمال: اندازه گیری شانس

با توجه به آشنایی که با مفاهیم پدیده‌های تصادفی، فضاهاى نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی پیدا کردیم، اکنون می‌توانیم احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی را مورد مطالعه قرار دهیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم شانس وقوع یک پیشامد تصادفی را اندازه‌گیری کنیم. برای این منظور احتمال وقوع پیشامدهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در تمام فضای نمونه‌ای به‌طور یکسان در نظر گرفته می‌شوند مانند پرتاب سکه که در آن احتمال آمدن پشت یا رو یکسان است.

۴-۱- احتمال هم‌شانس در فضاهای گسسته

فضای گسسته را فضایی گرفتیم که تعداد عناصر آن متناهی باشند، و بنابراین هر زیرمجموعه آن دارای تعداد معینی عضو است که قابل شمارش می‌باشد و چون هر زیرمجموعه یک فضای نمونه‌ای، یک پیشامد می‌باشد، بنابراین، با تعیین تعداد اعضای متناظر با هر پیشامد خاص و تقسیم آن بر تعداد کل عناصر فضای نمونه‌ای، می‌توان شانس وقوع آن پیشامد یا احتمال وقوع آن را اندازه گرفت. به زبان ریاضی برای به‌دست آوردن $P(A)$ ، احتمال وقوع پیشامد A ، رابطه زیر را به کار می‌بریم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

که $n(A)$ تعداد عضوهای A و $n(S)$ تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای S است. احتمال در فضاهای گسسته هم‌شانس، احتمال کلاسیک نیز نامیده می‌شود.

مثال ۱: در ریختن یک تاس سالم^۱، احتمال آمدن عدد ۴ چقدر است؟

حل: فضای نمونه آزمایش مورد بحث عبارت است از:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

۱- تاس سالم تاسی است که متقارن بوده و شانس آمدن هر وجه آن یکسان باشد.

احتمال ظاهر شدن عدد ۴ یا به عبارت دیگر احتمال وقوع پیشامد $A = \{4\}$ عبارت است از :

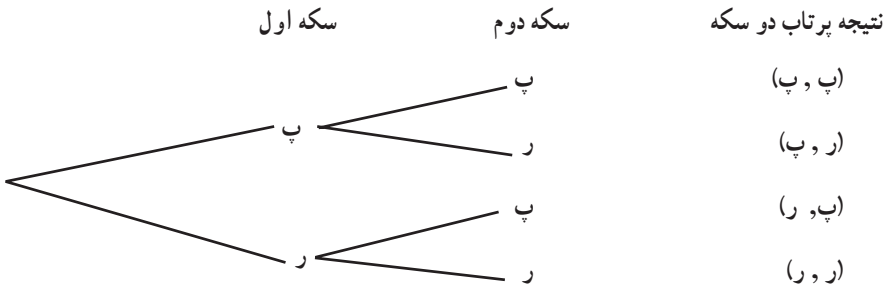
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

مثال ۲: دو سکه سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال وقوع پدیده‌های زیر را محاسبه کنید.
الف - هر دو سکه به پشت بیفتند.

ب - یکی از دو سکه به پشت، و دیگری به رو بیفتند.

پ - حداقل یکی از سکه‌ها به پشت بیفتند.

حل: فضای نمونه‌ای آزمایش مورد بحث با استفاده از نمودار درختی به قرار زیر است :



به عبارت دیگر فضای نمونه‌ای عبارت است از $S = \{(پ, پ), (پ, ر), (ر, پ), (ر, ر)\}$ پیشامد وقوع دو سکه به پشت زیرمجموعه $A_1 = \{(پ, پ)\}$ از S است، پس :

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

پیشامد این که یکی از دو سکه به پشت و دیگری به رو بیفتند زیرمجموعه

$A_2 = \{(پ, ر), (ر, پ)\}$ از S می‌باشد، در نتیجه :

$$P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

و بالاخره پیشامد این که حداقل یک سکه به پشت بیفتند زیرمجموعه A_3 از S است که

$A_3 = \{(پ, پ), (پ, ر), (ر, پ), (ر, ر)\}$ ، زیرا کافی است یکی از سکه‌ها به پشت بیفتند یا هر دو سکه

به پشت بیفتند، پس :

$$P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

مثال ۳: در ریختن یک جفت تاس قرمز و سبز، احتمال این که مجموع ارقام ظاهر شده برابر ۷

باشد را محاسبه کنید.

حل: در این آزمایش، فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S = \{(a, b) \mid a, b \in K\} = K \times K$$

که $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، پس S دارای ۳۶ عضو می‌باشد. پیشامد مورد نظر عبارت است از:

$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال ۴: تمام ترکیبات دو رقمی مجموعه اعداد $\{1, 2, 3\}$ را روی کارت‌های مختلف نوشته (هر ترکیب روی یک کارت) و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یک کارت را به‌طور تصادفی برمی‌داریم احتمال آن که روی این کارت عدد ۲ باشد چیست؟

حل: فضای نمونه آزمایش مورد نظر عبارت است از:

$$S = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$$

و پیشامد مطلوب زیرمجموعه A از فضای نمونه است:

$$A = \{12, 21, 23, 32\}$$

در نتیجه احتمال آن برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال ۵: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که

عدد انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد چقدر است؟

حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی شامل هزار عضو است. پس $n(S) = 1000$.

فرض می‌کنیم A مجموعه همه اعدادی باشد که بین ۱ تا ۱۰۰۰ هستند و بر ۳ نیز بخش پذیرند، پس:

$$A = \{3m : 1 \leq m \leq 333\}$$

و $n(A) = 333$. در نتیجه احتمال این که عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد برابر $\frac{333}{1000}$ است.

مثال ۶: از مجموعه اعداد طبیعی $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال

این که عدد انتخابی بر عدد k ، $(1 \leq k \leq N)$ بخش پذیر باشد چقدر است؟

حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی شامل N عضو است. فرض کنید A پیشامد بخش پذیر

بودن عدد انتخابی بر عدد k باشد، در این صورت:

$$A = \left\{ km: 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor \right\}$$

که در آن، $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x است. پس

$$n(A) = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$$

$$P(A) = \frac{\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor}{N}$$

مثال ۷: از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۵ سیب فاسد، ۲ سیب به طور تصادفی بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آن که هر دو سیب سالم باشند.

حل: در بسیاری از موارد اصولاً نوشتن پیشامدهای مطلوب و فضای نمونه‌ای به صورت فهرست‌وار، کاری وقت‌گیر و دشوار است و باید از راه دیگری تعداد عناصر مورد نیاز را شمارش کنیم. در این مثال فضای نمونه عبارت است از همه ترکیبات دوتایی از سیب‌ها که می‌توان آن‌ها را از یک سبد محتوی ۹ سیب خارج کرد. با استفاده از آنالیز ترکیبی از ریاضی (۲) می‌دانیم که تعداد این ترکیبات چنین به دست می‌آید:

$$n(S) = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$

پیشامد مطلوب A ، آن است که هر دو سیبی که خارج کرده‌ایم سالم باشند، ۴ سیب سالم داریم، با توجه به این که سیب‌های خروجی باید حتماً یک جفت از این ۴ سیب باشند، داریم:

$$n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال ۸: از بین ۲۲ دانش‌آموز قرار است به طور تصادفی ۸ نفر برای تشکیل تیم کوهنوردی دبیرستان انتخاب شوند. اگر ۱۰ نفر از این دانش‌آموزان در سال اول و ۱۲ نفر دیگر در سال دوم مشغول به تحصیل باشند، مطلوب است احتمال آن که ۴ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند.

حل: در اینجا فضای نمونه‌ای عبارت است از تمام حالات ممکن برای انتخاب ۸ نفر از ۲۲

نفر، یعنی $\binom{22}{8}$. پیشامد مطلوب حالت‌هایی است که ۴ نفر از دانش‌آموزان سال اول (که تعداد آن‌ها ۱۰ نفر است) و ۴ نفر از دانش‌آموزان سال دوم (که تعداد آن‌ها ۱۲ نفر است) انتخاب شوند. تعداد حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۱۰ نفر عبارت است از $\binom{10}{4}$ و تعداد انتخاب‌های ممکن ۴ نفر از ۱۲ نفر مساوی است با $\binom{12}{4}$. طبق اصل اساسی شمارش (یا اصل ضرب که در ریاضی (۲) خوانده‌اید)، تعداد تمام حالت‌های این پیشامد مساوی با حاصلضرب این دو عدد $\binom{12}{4}$ و $\binom{10}{4}$ می‌باشد. پس:

$$n(A) = \binom{10}{4} \binom{12}{4}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{4} \times \binom{12}{4}}{\binom{22}{8}} = \frac{210}{323}$$

مثال ۹: n نفر را در نظر می‌گیریم احتمال این که روز تولد هیچ دو نفری از آن‌ها یک روز نباشد را مشخص کنید (برای سادگی کار، از احتمال وقوع تولد افراد در روز آخر سال‌های کبیسه صرف نظر می‌کنیم).

حل: چون تعداد افراد مورد بررسی n است و هر یک از آن‌ها ممکن است در ۳۶۵ روز مختلف سال به دنیا آمده باشد، بنابراین در این مسأله با یک فضای نمونه‌ای 365^n عضوی روبه‌رو هستیم، (با استدلالی مشابه وقتی که دو تاس را با هم می‌اندازیم و فضای نمونه‌ای ما 6^2 عضو دارد) پس داریم $n(S) = 365^n$ ، از میان n نفر مورد نظر، نفر اول احتمال دارد که در یکی از ۳۶۵ روز سال به دنیا آمده باشد. چون فرض بر یکسان نبودن روز تولد افراد است پس نفر دوم ممکن است در یکی از ۳۶۴ روز باقیمانده سال متولد شده باشد و به همین ترتیب نفر سوم در یکی از ۳۶۳ روز باقیمانده و بالاخره نفر n ام در یکی از $365 - n + 1$ روز ممکن است متولد شده باشد. بدین ترتیب، با توجه به اصل اساسی شمارش، n نفر ممکن است $(365 - n + 1) \times \dots \times 364 \times 365$ روز تولد متفاوت داشته باشند. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد داریم:

$$n(A) = 365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)$$

پس:

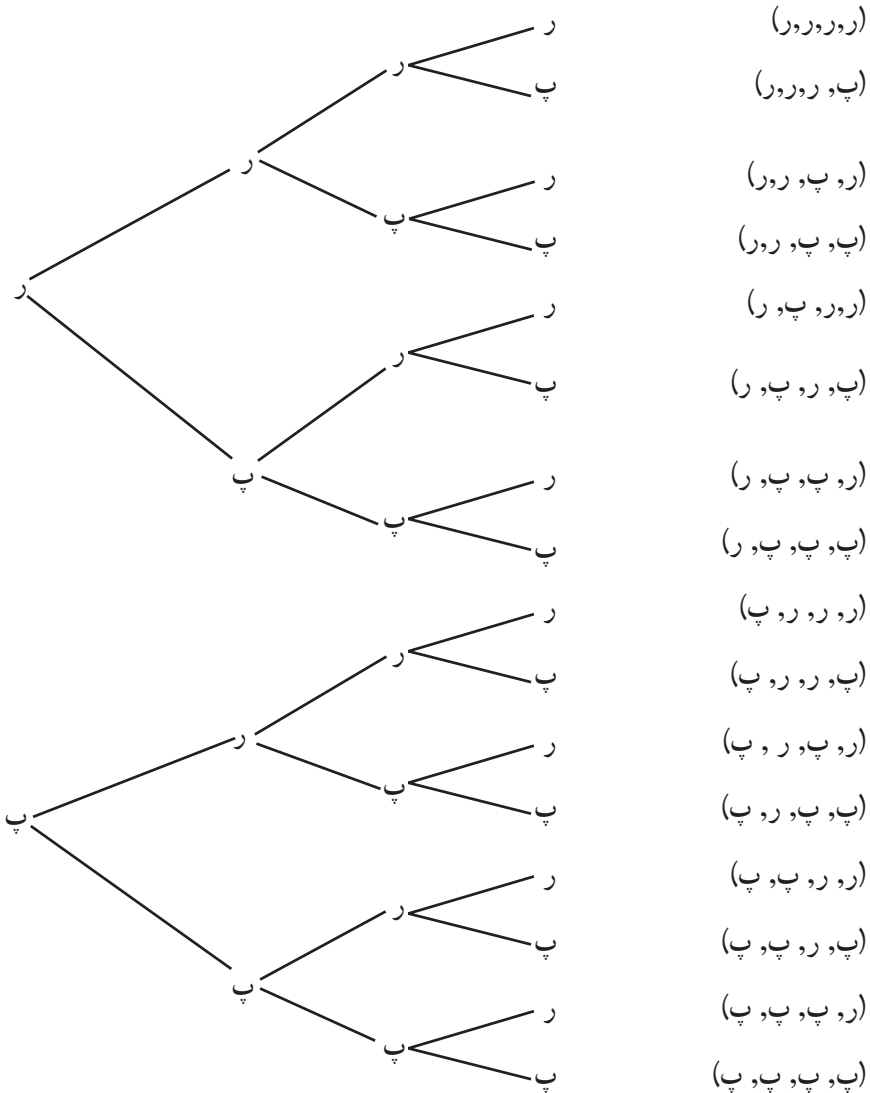
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

دقت کنید که اگر $n > 365$ آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حتماً دو نفر در یک روز متولد

شده‌اند، که در این حالت $P(A) = 0$.

۴-۲- احتمال دو جمله‌ای

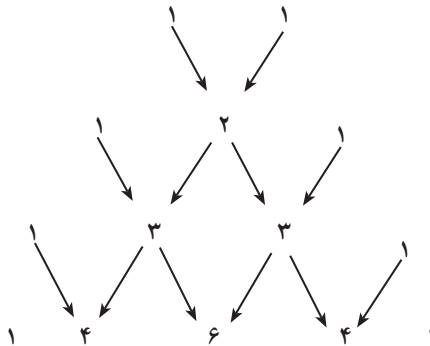
اگر یک سکه سالم یک بار پرتاب شود هر کدام از برآمدها دارای احتمال $\frac{1}{2}$ است. اگر سکه را دو، سه یا چهار بار پرتاب کنیم، به ترتیب چهار، هشت یا شانزده حالت هم شانس وجود دارد که در نمودار درختی زیر نشان داده شده است:



بدین ترتیب جدول زیر را برای پرتاب ۱، ۲، ۳ و ۴ سکه به دست می آوریم.

پرتاب ... سکه	تعداد رو آمدن ها	احتمال
یک سکه	۰	$\frac{1}{2}$
	۱	$\frac{1}{2}$
دو سکه	۰	$\frac{1}{4}$
	۱	$\frac{2}{4}$
	۲	$\frac{1}{4}$
سه سکه	۰	$\frac{1}{8}$
	۱	$\frac{3}{8}$
	۲	$\frac{3}{8}$
	۳	$\frac{1}{8}$
چهار سکه	۰	$\frac{1}{16}$
	۱	$\frac{4}{16}$
	۲	$\frac{6}{16}$
	۳	$\frac{4}{16}$
	۴	$\frac{1}{16}$

حال صورت کسرهای احتمال در جدول فوق را به صورت نمودار زیر درمی آوریم :



این اعداد یک مثلث تشکیل می دهند که به مثلث خیام – پاسکال موسوم است. هر عدد در یک سطر مثلث از جمع کردن جفت اعداد چپ و راست آن در سطر بالایی به دست می آید. این مثلث را تا بی نهایت می توان ادامه داد. اگر به ضرایب حاصل از بسط توان های طبیعی دوجمله ای $a + b$ نگاه کنیم، همین اعداد موجود در مثلث فوق را می یابیم:

$$(a + b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

و در حالت کلی از آنالیز ترکیبی در ریاضی (۲) می دانیم که:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

بنابراین:

$$P(\text{آمدن } k \text{ رو}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال ۱۰: تاس سالمی را ۱۵ بار می ریزیم. احتمال این که ۶ بار برآمد تاس یک عدد فرد باشد،

چيست؟ احتمال این که ۱۰ بار برآمد تاس یک عدد زوج باشد، چقدر است؟

حل: چون در ریختن یک تاس سالم، برآمد مشاهده شده یا زوج است و یا فرد، بنابراین می توان

گفت $S = \{\text{فرد و زوج}\}$ و $\frac{1}{2} = P(\text{فرد آمدن تاس}) = P(\text{زوج آمدن تاس})$ و مانند مثال پرتاب سکه

سالم، خواهیم داشت

$$P(6 \text{ بار مشاهده عدد فرد}) = \frac{\binom{15}{6}}{2^{15}} = 0/15$$

$$P(10 \text{ بار مشاهده عدد زوج}) = \frac{\binom{15}{10}}{2^{15}} = 0/09$$



۱- در یک خانواده با دو فرزند احتمال این که بچه‌ها از دو جنس مخالف و یا هر دو دختر باشند را پیدا کنید.

۲- رمز یک قفل، عددی سه رقمی است که تنها با تنظیم سه رقم آن به طور صحیح می‌توان قفل را باز کرد. با علم به تکراری نبودن ارقام رمز، احتمال کشف کردن تصادفی رمز قفل فقط با یک بار تنظیم ارقام را پیدا کنید.

۳- مسأله فوق را با فرض وجود یک رمز پنج رقمی حل کنید.

۴- اگر یک عدد ۴ رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ترکیب ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ به وجود آید، احتمال این که عدد ساخته شده بر ۵ بخش پذیر باشد را پیدا کنید.

۵- یک کلمه چهار حرفی به طور تصادفی با استفاده از حروف کلمه «خوارزمی» ساخته شده است. احتمال این که این کلمه دارای حرف نقطه‌دار نباشد را پیدا کنید. مسأله را با فرض تکراری بودن حروف و نیز بدون این فرض حل کنید.

۶- یک جفت تاس مخصوص داریم که در هر کدام از آن‌ها به جای ارقام ۱ تا ۶ دو عدد ۱، دو عدد ۲ و دو عدد ۳ نمایش داده شده است. این دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال وقوع مجموع‌های زیر را پیدا کنید:

الف) ۵ (ب) عددی فرد

۷- ۵ نفر زن و ۶ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند. با این حال، امکان استخدام تنها برای ۵ نفر از آن‌ها وجود دارد احتمال انتخاب ۵ نفر را در حالت‌های زیر پیدا کنید:

الف) ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

ب) ۵ زن انتخاب شوند.

پ) حداقل ۴ مرد انتخاب شوند.

۸- یک تاس و یک سکه با هم انداخته می‌شوند، مطلوب است:

الف) احتمال آن که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

ب) احتمال آن که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

۹- یک کیسه محتوی ۲۰ مهره قرمز، ۱۰ مهره سفید و ۱۵ مهره سبز است. یک مهره را

به طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم. مطلوب است:

الف) احتمال آن که این مهره سفید باشد.

این مهره را به کیسه برگردانده ۲ مهره را به طور تصادفی بیرون می آوریم.

ب) احتمال آن که یک مهره قرمز و یک مهره سفید باشد.

۱۰- نمودار درختی زیر راه های پاسخ دادن به سه سؤال در یک آزمون دو گزینه ای (درست -

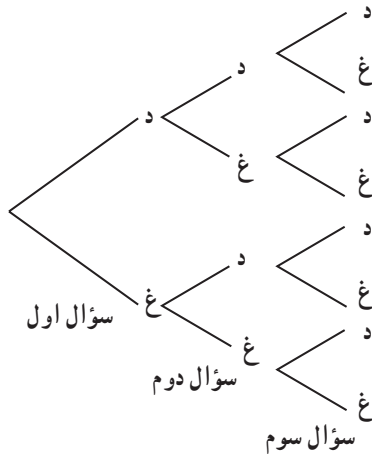
غلط) را نشان می دهد. حرف «د» یعنی درست و حرف «غ» یعنی غلط. اگر سؤالها به تصادف انتخاب

شوند، مطلوب است احتمال :

الف) این که هر سه سؤال صحیح جواب داده شده باشند؛

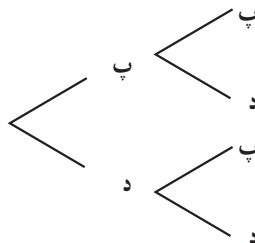
ب) هیچ یک از سؤالات صحیح جواب داده نشده باشند؛

پ) تعداد سؤالات صحیح پاسخ داده شده بیشتر باشند.



۱۱- نمودار درختی زیر حالات ممکن تولد پسر و دختر را در یک خانواده دو فرزندی نشان

می دهد. فرض می کنیم احتمال پسر بودن فرزند $\frac{1}{3}$ باشد.



الف) با توجه به نمودار درختی جدول زیر را کامل کنید :

تعداد پسرها ۰ ۱ ۲

تعداد حالات ۱ ۲ ۱

احتمال $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

درصد احتمال 25% 50% 25%

ب) احتمال این که دو فرزند هم جنس باشند چیست؟

پ) احتمال این که دست کم یک فرزند پسر باشد چیست؟

۱۲- نمودار درختی زیر احتمال‌های باریدن برف را طی چهار روز متوالی در یک محوطهٔ اسکی نشان می‌دهد. («ن» یعنی نباریدن برف و «ب» یعنی باریدن برف) فرض می‌کنیم احتمال آمدن برف در یک روز مفروض $\frac{1}{3}$ باشد.

الف) با توجه به نمودار درختی جدول زیر را کامل کنید :

تعداد روزهای باریدن برف ۰ ۱ ۲ ۳ ۴

تعداد امکان‌های مختلف ۱ ۴ ۶ ۴ ۱

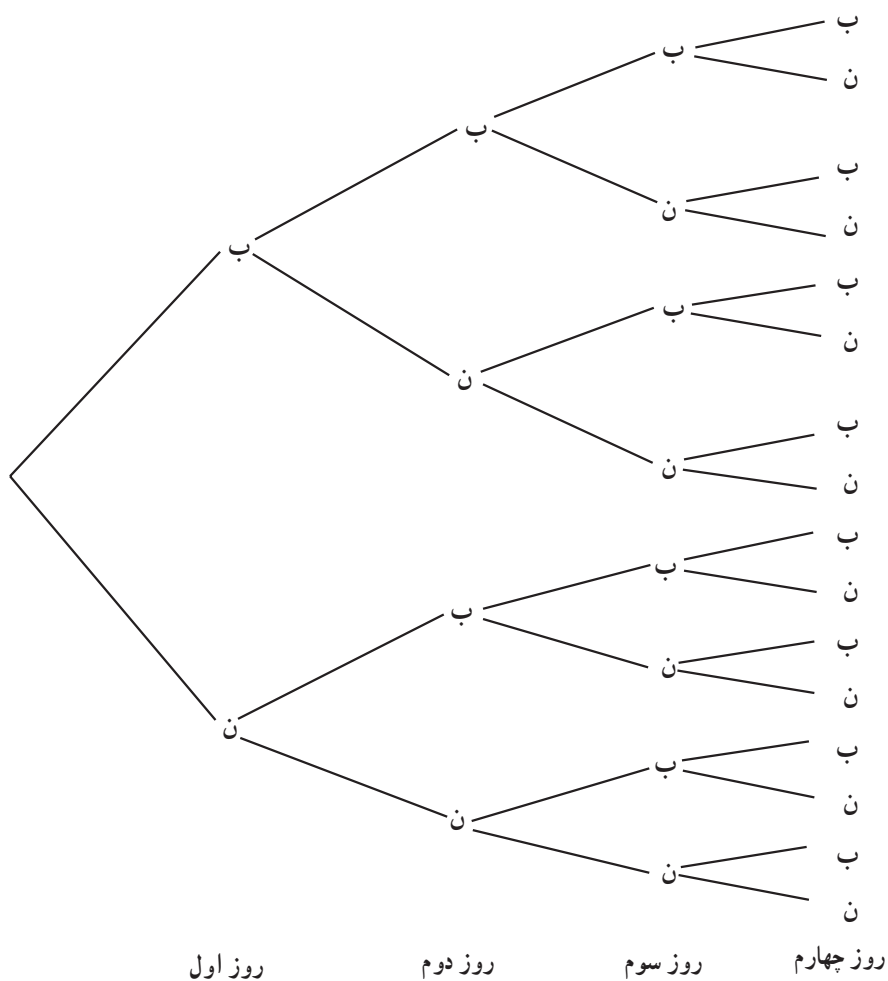
احتمال $\frac{1}{16}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{6}{16}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{1}{16}$

درصد احتمال $6\frac{25}{100}\%$ 25% $37\frac{5}{100}\%$ 25% $6\frac{25}{100}\%$

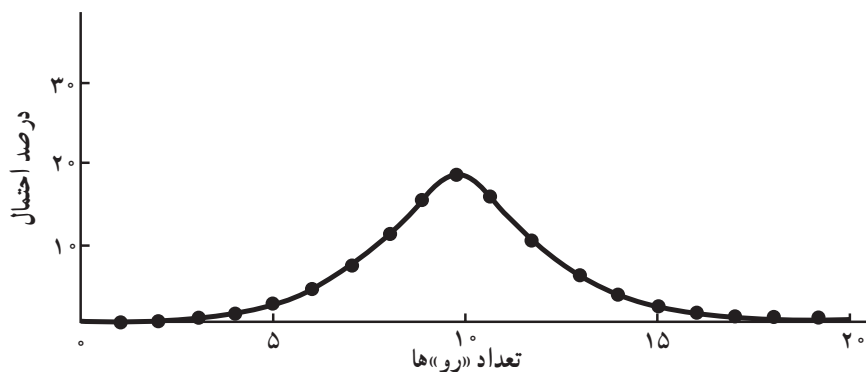
ب) درصد احتمال این که طی چهار روز متوالی دست کم دو روز برف بیارد چیست؟ $\frac{1}{16} = 6\frac{25}{100}\%$

پ) کدام محتملتر است؟ دقیقاً یک روز برف بیارد یا دقیقاً سه روز.

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \text{دقیقاً سه روز} \quad \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \text{دقیقاً یک روز}$$



۱۳- نمودار زیر احتمال‌های رخ دادن پیشامد «رو» در پرتاب 20° سکه را نشان می‌دهد.



به نمودار صفحه قبل رجوع کنید و به این سوالات پاسخ دهید :

الف) اگر هر بیست سکه پرتاب شوند آمدن چند «رو» محتملتر است؟

ب) با توجه به فرض الف احتمال آن که آن تعداد «رو» بیاید چقدر است؟ (به کمک نمودار تقریب بزنید)

پ) کدامیک عجیبتر است؟ این که در پرتاب 10° سکه تعداد «رو»ها و «پشت»ها مساوی باشد یا در پرتاب 20° سکه؟

ت) اگر تعداد سکه‌هایی که پرتاب می شود را افزایش دهیم، احتمال مساوی بودن تعداد «ر» و «پ»ها چه تغییری می کند؟

۳-۴- احتمال غیر هم‌شانس در فضاهای گسسته

در بخش قبل فرض کرده بودیم احتمال وقوع پیشامدهای مورد بررسی در تمام نقاط فضای نمونه‌ای یکسان باشد. مثلاً در پرتاب سکه، احتمال آمدن «پشت» یا «رو» هر دو $\frac{1}{2}$ بود. اما این فرض همیشه یک فرض واقع‌بینانه نیست و برای سادگی مطلب در بندهای قبل گذاشته شده بود. یکی از راه‌های محاسبه احتمال، استفاده کردن از محاسبه فراوانی است.

مثال ۱: در مورد مثال بالا اگر یک سکه را 100 بار پرتاب کنیم و در این 100 بار، 45 بار «رو» بیاید، طبیعی است که کسر $\frac{45}{100}$ و یا 45% و یا $0/45$ را احتمال آمدن «رو» در نظر بگیریم. واضح است با این استدلال احتمال آمدن پشت 55% می باشد. بنابراین در فضای $S = \{ر, پ\}$ داریم

$$P(\{ر\}) = 0/45 \quad \text{و} \quad P(\{پ\}) = 0/55$$

مجموعه‌های تک عضوی $\{پ\}$ و $\{ر\}$ را مجموعه‌های ساده می‌گوییم. و احتمال هر مجموعه تک عنصری $\{x\}$ را با $P(x)$ یا $P(\{x\})$ نشان می‌دهیم.

هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم.

می‌بینیم که :

$$P(ر) + P(پ) = 0/45 + 0/55 = 1$$

یعنی احتمال پیشامدهای ساده بزرگتر یا مساوی صفر و کوچکتر یا مساوی یک می‌باشد و مجموع احتمال‌های پیشامدهای ساده ۱ می‌باشد.

مثال ۲: در مسأله پرتاب سه سکه بخش قبل، اگر فضای نمونه‌ای را $\{0, 1, 2, 3\}$ بگیریم که در آن هر عضو این فضا تعداد «رو» آمدن‌های سه سکه باشد، آن گاه با استفاده از احتمال دو جمله‌ای می‌دانیم که:

$$P(0) = P(\{\text{هیچ رو نیاید}\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(1) = P(\{\text{یک بار رو آمده باشد}\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(2) = P(\{\text{دو بار رو آمده باشد}\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = P(\{\text{سه بار رو آمده باشد}\}) = \frac{1}{8}$$

ملاحظه می‌کنیم که:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

در حالت کلی فرض کنیم فضای نمونه‌ای ما $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ شامل n عضو باشد. به هر پیشامد ساده $\{e_k\}$ یک عدد حقیقی $P(\{e_k\})$ که احتمال پیشامد $\{e_k\}$ است را نسبت می‌دهیم. این عدد باید تحت شرایط زیر انتخاب گردد:

(۱) احتمال یک پیشامد ساده عددی بین ۰ و ۱ است؛ یعنی

$$0 \leq P(e_k) \leq 1$$

(۲) مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای برابر ۱ است؛ یعنی:

$$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$$

اعداد $P(e_1), P(e_2), \dots, P(e_n)$ را که در شرط بالا صدق می‌کنند «تخصیص احتمال مقبول» می‌نامیم.

فرض کنیم یک تخصیص احتمال مقبول به پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای S داده شده باشد. چگونه می‌توان یک احتمال برای پیشامد دلخواه A در S تعریف نمود؟

۴-۴ احتمال یک پیشامد اختیاری

اگر یک تخصیص احتمال مقبول به پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای S داده شده باشد، به پیشامد A احتمالی را که با $P(A)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر نسبت می‌دهیم:

الف) اگر A پیشامد غیرممکن (یعنی مجموعه \emptyset) باشد آنگاه

$$P(A) = 0$$

ب) اگر A یک پیشامد ساده باشد $P(A)$ خود به خود تعریف شده است.

ج) اگر A پیشامد مرکب باشد، یعنی A اجتماعی از پیشامدهای ساده باشد، آنگاه $P(A)$ مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در A می‌باشد.

د) اگر A خود فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه:

$$P(A) = P(S) = 1$$

در واقع این قسمت حالت خاصی از (ج) است.

حال اگر حالت هم‌شانس بخش قبل را در نظر بگیریم، یعنی:

$$P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n)$$

آنگاه چون $1 = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n)$ داریم:

$$P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n) = \frac{1}{n}$$

حال اگر مجموعه A دارای m عضو $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ باشد طبق تعریف فوق

$$P(\{f_1, f_2, \dots, f_m\}) = P\{f_1\} + \dots + P\{f_m\} = \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{\text{بار } m} = \frac{m}{n}$$

یعنی:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S}$$

که همان فرمول بخش قبل است. یعنی ملاحظه می‌کنیم که مطالب این بخش در واقع تعمیم بخش قبل است.

مثال ۳: فرض کنیم فضای نمونه‌ای ما $S = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد. در هر دو حالت زیر به پیشامدهای ساده S اعدادی را نسبت داده‌ایم. بررسی کنید که آیا این نسبت‌ها که آن‌ها را تخصیص

دادن احتمال می‌نامیم مجاز هستند و یا نه، دلیل پاسخ خود را بیان کنید.

$$P(1) = 0/12, P(2) = 0/63, P(3) = 0/45, P(4) = 0/20 \quad (\text{الف})$$

$$P(1) = \frac{9}{120}, P(2) = \frac{45}{120}, P(3) = \frac{27}{120}, P(4) = \frac{46}{120} \quad (\text{ب})$$

حل: در مورد (الف) چون $P(4) = 0/20$ ناقض فرض (۱) در مورد پیشامدهای ساده است، یعنی احتمال باید نامنفی باشد، بنابراین تخصیص احتمال مجاز نیست. اما در مورد (ب) داریم

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{9}{120} + \frac{45}{120} + \frac{27}{120} + \frac{46}{120} = \frac{127}{120} > 1$$

و این خاصیت (۲) در مورد پیشامدهای ساده را نقض می‌کند بنابراین، این تخصیص احتمال هم مجاز نیست.

مثال ۴: تاسی به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی بزرگتر از ۳ باشد، $P(A)$ را بیابید.

حل: فضای نمونه‌ای عبارت است از $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. حال اگر به هر عدد زوج احتمال

w نسبت دهیم، آنگاه احتمال عدد فرد برابر $2w$ است؛ یعنی:

$$P(1) = P(3) = P(5) = 2w \quad \text{و} \quad P(2) = P(4) = P(6) = w$$

و چون مجموع این پیشامدهای ساده باید ۱ باشد، بنابراین:

$$2w + w + 2w + w + 2w + w = 9w = 1$$

و از آنجا $w = \frac{1}{9}$ ، حال قرار می‌دهیم $A = \{4, 5, 6\}$ طبق خاصیت (ج) داریم:

$$P(A) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

مثال ۵: سه اسب a ، b و c با هم مسابقه می‌دهند. فرض کنیم احتمال برد a دو برابر احتمال

برد b و احتمال برد b دو برابر احتمال c است.

(الف) مطلوب است احتمال برد هر کدام از اسب‌ها.

(ب) مطلوب است احتمال این که a یا b ببرند.

حل: گیریم $P(c) = p$ ، چون شانس برد b دو برابر شانس برد c است. پس: $P(b) = 2p$ و

چون شانس برد a دو برابر شانس برد b است پس: $P(a) = 2(2p) = 4p$. حال چون مجموع

احتمال‌های فوق باید برابر ۱ باشد پس :

$$p + 2p + 4p = 1$$

یا $7p = 1$. در نتیجه $p = \frac{1}{7}$ و از آنجا داریم :

$$P(a) = 4p = \frac{4}{7}$$

$$P(b) = 2p = \frac{2}{7}$$

$$P(c) = p = \frac{1}{7}$$

پیشامد این که یا a ببرد یا b ، مجموعه $\{a, b\}$ است. طبق تعریف :

$$P(\{a, b\}) = P(a) + P(b) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

مثال ۶: گیریم $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ، مطلوب است محاسبه

الف) $P(a_1)$ ، اگر $P(a_2) = \frac{1}{3}$ ، $P(a_3) = \frac{1}{6}$ ، $P(a_4) = \frac{1}{9}$

ب) $P(a_1)$ و $P(a_2)$ اگر $P(a_3) = P(a_4) = \frac{1}{4}$ و $P(a_1) = 2P(a_2)$

ج) $P(a_1)$ اگر $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{a_2, a_4\}) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a_3, a_4\}) = \frac{1}{3}$

حل: الف) فرض کنیم $p = P(a_1)$. آنگاه چون P تخصیص احتمال مقبول به فضای S است

بنابراین :

$$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = 1$$

و از آنجا :

$$p + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow p = \frac{7}{18}$$

ب) گیریم $p = P(a_2)$. آنگاه $P(a_1) = 2p$ و از آنجا :

$$2p + p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

و یا $p = \frac{1}{6}$. بنابراین $P(a_2) = \frac{1}{6}$ و $P(a_1) = \frac{1}{3}$.

ج) گیریم $P(a_1) = p$. آنگاه چون

$$P(a_3) = P(\{a_2, a_3\}) - P(a_2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

و

$$P(a_4) = P(\{a_2, a_4\}) - P(a_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

در نتیجه :

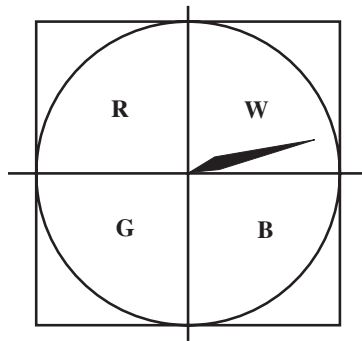
$$p + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\text{و یا } p = \frac{1}{6} \text{ یعنی } P(a_1) = \frac{1}{6}$$

تمرین



۱- در دستگاه زیر دایره را به چهار رنگ سبز (G)، قرمز (R)، آبی (B)، سفید (W) رنگ آمیزی کرده‌ایم. عقربه را به چرخش درمی‌آوریم. اگر احتمال‌های ایستادن عقربه روی رنگ‌های مختلف، متفاوت باشند، کدامیک از تخصیص احتمال‌های زیر غیرمجازند؟



الف) $P(B) = 0/30$ و $P(W) = 0/24$ و $P(G) = 0/28$ و $P(R) = 0/32$

ب) $P(B) = 0/30$ و $P(W) = 0/30$ و $P(G) = 0/14$ و $P(R) = 0/26$

۲- یک سکه ناسالم را پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم شانس آمدن «رو» دو برابر شانس آمدن «پشت» باشد. مطلوب است محاسبه $P(r)$ و $P(p)$.

۳- سه شناگر a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. a و b دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس بردن هر کدام از آن‌ها دو برابر c است. مطلوب است احتمال این که b یا c ببرد.

۴-۵ - احتمال در فضاهای پیوسته

در این بخش به محاسبهٔ احتمال در فضاهای پیوسته می‌پردازیم. فضاهای پیوسته، برخلاف فضاهای گسسته که از تعدادی منتهای نقطه تشکیل شده‌اند، مجموعه‌هایی نامتناهی می‌باشند نظیر بازه‌ها در محور اعداد حقیقی یا سطوح در صفحه و غیره. واضح است که در این حالت دیگر شمارش تعداد عناصر فضای نمونه‌ای یا پیشامد میسر نیست ولی آنچه که می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد «اندازه» طول بازه‌ها، مساحت سطوح، و حجم شکل‌های فضایی است. در این حالت نسبت «اندازه» فضای پیشامد به «اندازه» فضای نمونه‌ای، احتمال وقوع پیشامد را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر اگر پیشامد مطلوب را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{A \text{ طول}}{S \text{ طول}} = \frac{I_A}{I_S} \quad \text{اگر } S \subset \mathbb{R} \text{ و } A \text{ داریم:}$$

$$P(A) = \frac{A \text{ مساحت}}{S \text{ مساحت}} = \frac{a_A}{a_S} \quad \text{اگر } S \subset \mathbb{R}^2 \text{ و } A \text{ داریم:}$$

$$P(A) = \frac{A \text{ حجم}}{S \text{ حجم}} = \frac{v_A}{v_S} \quad \text{اگر } S \subset \mathbb{R}^3 \text{ و } A \text{ داریم:}$$

حال به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱: در مثال تیراندازی به هدف دایره‌ای شکل فرض می‌کنیم شعاع صفحهٔ هدف ۲۰ سانتیمتر و شعاع دایرهٔ کوچکتر ۱۰ سانتیمتر است. فرض می‌کنیم تیر حتماً به صفحهٔ هدف برخورد می‌کند، احتمال برخورد تیر به دایرهٔ کوچکتر را محاسبه کنید.
حل: فضای نمونه، مساحت دایرهٔ بزرگتر و پیشامد A مساحت دایرهٔ کوچکتر است، بنابراین:

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\pi \cdot 10^2}{\pi \cdot 20^2} = \frac{1}{4}$$

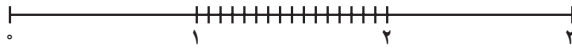
مثال ۲: از بین اعداد حقیقی بین 0 و ۳ یک عدد به تصادف انتخاب می‌شود، مطلوب است

محاسبهٔ احتمال آن که این عدد بین ۱ و ۲ انتخاب شده باشد.

۱- در این قسمت فرض بر این است که احتمال روی طول، سطح و حجم یکسان توزیع شده است.

حل: فضای نمونه بازه $S = [0, 3]$ و پیشامد مطلوب بازه $A = [1, 2]$ است، پس:

$$P(A) = \frac{I_A}{I_S} = \frac{1}{3}$$



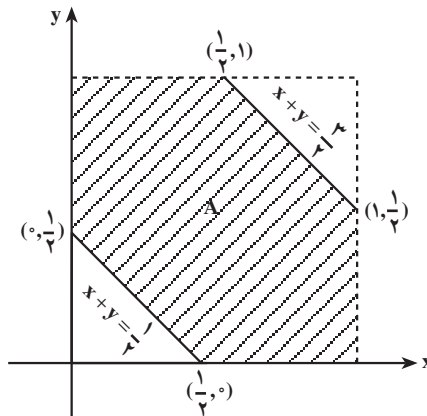
مثال ۳: فرض می‌کنیم دو عدد حقیقی بین 0 و 1 به تصادف انتخاب شوند، مطلوب است احتمال آن که مجموع این دو عدد بین $0/5$ و $1/5$ باشد.

حل: فضای نمونه‌ای مناسب عبارت است از:

$$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

و پیشامد مطلوب مجموعه زیر است:

$$A = \{(x, y) \mid \frac{1}{4} < x + y < \frac{3}{4}\}$$



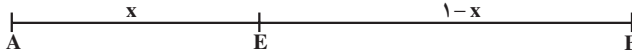
بنابراین:

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$$

مثال ۴: فرض می‌کنیم دو قطعه چوب داریم که طول‌های آن‌ها به ترتیب 1 و $0/5$ متر می‌باشند. قطعه بزرگتر را با آره دو قسمت می‌کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می‌شود، احتمال این که سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث را بدهند، چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم قطعه چوب یک متری، در نقطه E بریده شود که به فاصله x از یک سر

چوب قرار دارد.



بنابراین فضای نمونه‌ای را می‌توان خط AB به طول ۱ متر در نظر گرفت، در این جا پیشامد مطلوب آن است که پاره‌خط‌های AE و EB و پاره‌خط دیگر که آن را CD می‌نامیم (همان چوب به طول $\frac{1}{4}$ متر) مثلثی تشکیل دهند. ولی اگر سه پاره خط بخواهند تشکیل مثلث بدهند باید طول هر پاره خط از مجموع طول‌های دو پاره‌خط دیگر کمتر باشد یعنی:

$$AE + EB > CD$$

$$AE + CD > EB$$

$$EB + CD > AE$$

چون $CD = \frac{1}{4}$ و $AE = x$ و $EB = 1 - x$ ، پس داریم:

$$x + (1 - x) > \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{4} > 1 - x$$

$$(1 - x) + \frac{1}{4} > x$$

با ساده کردن سه نامساوی بالا:

$$1 > \frac{1}{4} \quad (\text{به طور بدیهی درست است})$$

$$x > \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{3}{4}$$

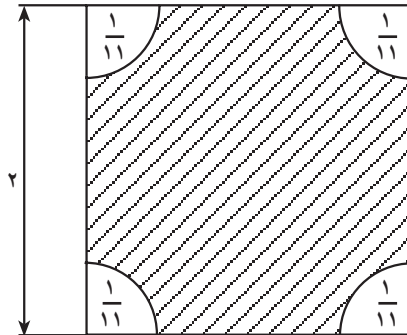
در نتیجه پیشامد مطلوب به صورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$A = \left\{ x \mid \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right\}$$

$$P(A) = \frac{I_A}{I_S} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

مثال ۵: یک چتر باز از داخل هواپیما بر روی زمین مربع شکلی به طول ضلع ۲ کیلومتر می‌پرد. در چهار گوشه زمین، مناطقی پوشیده از درخت وجود دارند که می‌توان آن‌ها را به صورت ربع دایره‌هایی به شعاع $\frac{1}{4}$ کیلومتر و به مرکز رأس‌های مربع تصور کرد. (به شکل صفحه بعد نگاه کنید.) اگر چتر باز در یکی از مناطق مزبور فرود بیاید چتر او به درختان گیر خواهد کرد. اگر فرض کنیم

که چترباز حتماً در نقطه‌ای از قطعه زمین مورد بحث فرود آید و با فرض این که مختصات مکان فرود نیز تصادفی باشد، مطلوب است محاسبه احتمال این که فرود او بدون گیر کردن به درخت‌ها انجام بگیرد.



حل: فضای نمونه‌ای مربعی به ضلع ۲ کیلومتر می‌شود و بیشامد مورد نظر مجموعه هاشور زده شده است. بنابراین احتمال برابر است با :

$$\frac{4 - \frac{\pi}{11}}{4} \approx 0.99$$

(\approx علامت تقریب است.)

یادداشت: در این مسأله احتمال این که چترباز در یک نقطه فرود آید صفر است حتی احتمال این که چترباز روی یک خط فرود آید صفر است، زیرا سطح این نوع مجموعه‌ها صفر می‌باشد.

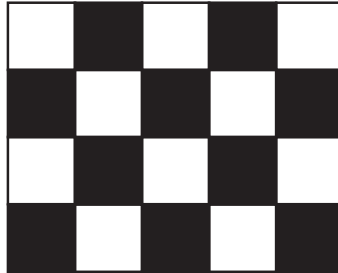
بیشامدهایی که احتمال وقوع آن‌ها صفر است را بیشامدهای تقریباً غیرممکن می‌نامیم.

مثال ۶: در مثال (۱۴) فصل قبل احتمال برنده شدن چقدر است؟

حل: در مثال (۱۴) فصل قبل فضای نمونه‌ای و بیشامد مطلوب را مشخص کردیم. فضای نمونه‌ای مربعی به طول ۲۵ و بیشامد مطلوب مربع کوچکی در داخل آن به طول ۵ بود. اگر A بیشامد مورد نظر باشد، احتمال برابر است با :

$$P(A) = \frac{a_A}{a_s} = \frac{(5)^2}{(25)^2} = \frac{1}{25}$$

یادداشت: اگر سکه را به جای مربع مطرح شده در مسأله بر روی صفحه‌ای شطرنجی شکل متشکل از مربع‌های بسیار نیز پرتاب کنیم، باز احتمال آن که سکه بر روی مرز مشترک بین هیچ دو مربعی نیفتد، برابر با مقداری خواهد بود که به دست آوردیم.



توجیه این مطلب با توجه به شکل فوق بدیهی به نظر می‌رسد. مرکز سکه پرتاب شده ممکن است در داخل هر کدام از مربع‌های هم اندازه با مربع Q واقع شود و در آن صورت همان‌طور که در مسأله مشاهده کردید، پیشامد ما مربع Q' خواهد بود (شکل صفحه ۸۱). بنابراین در داخل هر یک از مربع‌های بزرگتر مجموعه‌ای به اندازه مربع هاشور خورده داخل آن وجود دارد که اگر سکه داخل آن بیفتد، بازی را خواهیم برد. در نتیجه اگر پیشامد آن که سکه بر روی محیط هیچ کدام از مربع‌ها نیفتد را A بنامیم، داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت مربع‌های هاشور خورده}}{\text{مساحت کل صفحه}} = \frac{1}{25}$$

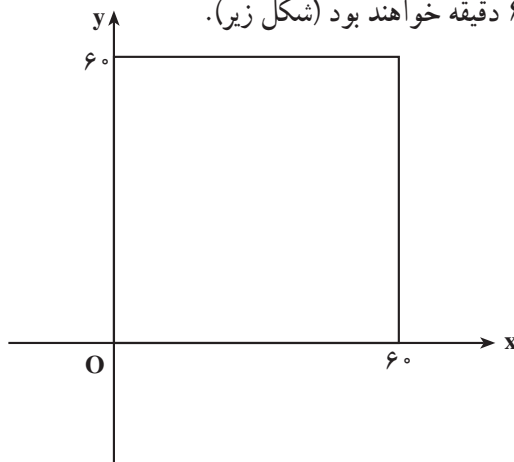
مثال ۷: اتوبوس‌های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کنند و هر ۱۵ دقیقه یک‌بار به ایستگاه می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت ۷ تا ۷:۳۰ به یک ایستگاه وارد شود، احتمال این که کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند چقدر است؟ احتمال این که بیشتر از ۱۰ دقیقه معطل بماند تا اتوبوس برسد چقدر است؟

حل: چون شخص در لحظه‌ای بین ۷ تا ۷:۳۰ به ایستگاه می‌رسد، فضای نمونه‌ای مربوط به آزمایش تصادفی رسیدن به ایستگاه اتوبوس فاصله (۷:۳۰ و ۷) است. برای این که شخص کمتر از ۵ دقیقه منتظر اتوبوس شود باید در یکی از لحظات بین ۷:۱۰ تا ۷:۱۵ یا ۷:۲۵ تا ۷:۳۰ به ایستگاه برسد. بنابراین پیشامد مورد نظر از دو فاصله زمانی (۷:۱۵ و ۷:۱۰) و (۷:۳۰ و ۷:۲۵) تشکیل

یافته است. لذا احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{5+5}{30}$. برای این که شخص بیشتر از 10° دقیقه منتظر اتوبوس بماند، باید در یکی از لحظات بین $7:05$ تا $7:15$ یا $7:20$ تا $7:30$ به ایستگاه برسد، لذا در این حالت پیشامد مطلوب عبارت است از اجتماع دو فاصله $(7:05 \text{ و } 7:20)$ و $(7:15 \text{ و } 7:30)$ ، در نتیجه، احتمال آن برابر است با $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{5+5}{30}$. ملاحظه می کنید که احتمال های هر دو پیشامد مساوی هستند. این مطلب عجیب نیست؟

مثال ۸: مسئله‌ی رویه‌رو شدن دو دوست: حسن و احمد قرار گذاشتند که هنگام بازدید از نمایشگاه کتاب یکدیگر را بین ساعت ۴ تا ۵ بعد از ظهر در بخش کتاب‌های مرجع ببینند. قرار آن‌ها به این صورت بود که هر کدام زودتر سر قرار حاضر شد ۱۵ دقیقه منتظر دیگری بماند و بعد از آن، به بازدید از نمایشگاه ادامه دهد. با فرض این که زمان سر قرار رسیدن هریک به طور تصادفی بین ۴ تا ۵ بعد از ظهر است، احتمال این که این دو یکدیگر را ملاقات کنند، چقدر است؟

حل: فرض کنیم حسن x دقیقه بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر و احمد y دقیقه بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر سر قرار حاضر شوند. می توانیم زمان‌های رسیدن هریک را به صورت زوج‌های مرتب (x, y) در نظر بگیریم به طوری که $0 < x < 60$ و $0 < y < 60$. عضوهای فضای نمونه‌ای، نقاط داخل مربعی به ضلع 60 دقیقه خواهند بود (شکل زیر).



برای این که حسن و احمد بتوانند یکدیگر را ملاقات کنند، باید موقع سر قرار رسیدنشان در فاصله‌ی زمانی ۱۵ دقیقه از یکدیگر رُخ دهد. زیرا قرار گذاشته بودند که فقط ۱۵ دقیقه برای یکدیگر صبر کنند. این شرط را می توان با نامساوی قدر مطلق

$$|x - y| < 15$$

بیان کرد. برای مثال، اگر احمد ۱۴ دقیقه بعد از حسن برسد هم دیگر را ملاقات می‌کنند. یعنی

$$y - x = 14$$

یا

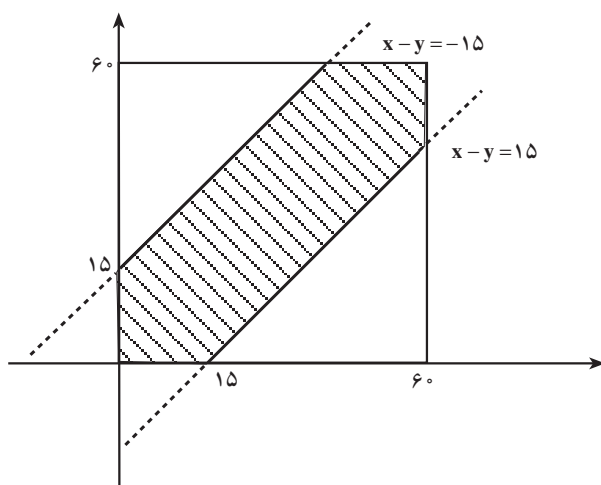
$$x - y = -14$$

$$|x - y| = 14$$

در نتیجه

بنابراین، نامساوی برقرار است.

نمودار $|x - y| < 15$ که در داخل فضای نمونه‌ای محصور است، ناحیهٔ موفقیت را نشان



می‌دهد.

اگر ناحیهٔ موفقیت (ناحیهٔ هاشور خورده) را با Γ و فضای نمونه‌ای را با R نشان دهیم، آنگاه

احتمال مطلوب یعنی $P(\Gamma)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(\Gamma) = \frac{\text{مساحت ناحیهٔ } \Gamma}{\text{مساحت مربع}}$$

$$= \frac{\left(\text{مساحت مربع} \right) - \left(\text{دو مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین} \right)}{60^2}$$

به ضلع قائمه ۴۵

$$= \frac{60^2 - \left[\frac{1}{2}(45)^2 + \frac{1}{2}(45)^2 \right]}{60^2}$$

$$\cong 0.44$$

تمرین



۱- نقطه‌ای مانند x را به طور تصادفی در بازه $(0, 3)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که داشته باشیم $1 < x < 2/5$ را تعیین کنید.

۲- بر روی مربع $Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ یک نقطه را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال این که داشته باشیم $x \leq y \leq 1-x$ را تعیین کنید.

۳- دو نقطه را به طور تصادفی در بازه $(0, 1)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که $|x - y| < \frac{1}{3}$ را پیدا کنید.

۴- در بازه $[0, 1]$ دو نقطه به طور تصادفی طوری انتخاب می‌شوند که بازه را به سه پاره‌خط تقسیم کنند. احتمال این را پیدا کنید که سه پاره‌خط تشکیل یک مثلث بدهند.

۵- یک نقطه (x, y) را به طور تصادفی بر روی مثلثی به رئوسهای $(0, 0)$ ، $(0, 4)$ و $(3, 2)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر چیست؟

(الف) $x < 2$ (ب) $x < 2y$

(پ) (x, y) درون یک مستطیل به رئوسهای $(0, 0)$ ، $(1, 2)$ ، $(1, 2)$ و $(2, 0)$ ، قرار داشته باشد.

۶- یک نقطه به طور تصادفی درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌شود، مطلوب است احتمال آن که فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از ۱ باشد.

۷- روی محور اعداد حقیقی، \mathbb{R} ، نقاط a و b به طور تصادفی انتخاب شده‌اند به طوری که: $0 \leq b \leq 2$ و $0 \leq a \leq 3$ ، مطلوب است محاسبه احتمال آن که فاصله بین a و b بزرگتر از ۳ باشد.

۸- دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین 0 و 2 انتخاب می‌شوند. مطلوب است احتمال آن که:

(الف) مجموع دو عدد کمتر از ۲ باشد.

(ب) مجموع دو عدد بیشتر از ۱ باشد.

(پ) مجموع دو عدد بین ۱ و ۲ باشد.

۹- دو عدد به طور تصادفی بین 0 و 2 انتخاب می‌شوند.

(الف) مطلوب است احتمال آن که نسبت دو عدد مساوی ۱ باشد.

(ب) مطلوب است احتمال آن که نسبت دو عدد کمتر از ۱ باشد.
 (پ) مطلوب است احتمال آن که نسبت دو عدد بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ باشد.
 ۱۰- در مثال ۴ این بخش فرض می‌کنیم پاره‌خط بزرگتر AB برابر ۲۱ و پاره‌خط کوچکتر CD مساوی ۱ باشد. نقطه E را به طور تصادفی روی AB انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که AE، EB و CD تشکیل یک مثلث بدهند.

۱۱- مسأله ۱۰ را در حالات زیر حل کنید.

(الف) اگر $AB = 41$ و $CD = 1$.

(ب) اگر $AB = n1$ و $CD = 1$ ، که در آن n یک عدد طبیعی است.

۱۲- در عبارت $2p - q$ مقدار ضریب p را به طور تصادفی بین ۱ و ۲ و مقدار ضریب q را به طور تصادفی بین -۱ و ۳ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این که حاصل عبارت بالا کمتر از $\frac{1}{4}$ باشد.

۱۳- در مثال (۵) مسألهٔ چتر باز، به جای شعاع $\frac{1}{11}$ ، عدد $\frac{1}{9}$ قرار دهید و مسأله را حل کنید. در حالت کلی مسأله را برای مربعی به ضلع ۱ و شعاع R حل کنید.

۱۴- اتوبوس‌های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کنند و هر ۱۵ دقیقه یکبار به ایستگاه خاصی می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت ۸ تا ۸:۳۰ به این ایستگاه وارد شود، احتمال این که کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند چقدر است؟ احتمال این که بیشتر از ۱۰ دقیقه صبر کند تا اتوبوس برسد چقدر است؟

۱۵- تجربه قبلی نشان می‌دهد که هر کتاب جدید از ناشر خاصی می‌تواند بین ۴ تا ۱۲ درصد بازار کتاب را به خود اختصاص دهد. مطلوب است محاسبه احتمال این که کتاب بعدی این ناشر حداکثر $\frac{6}{35}$ درصد بازار کتاب را به خود اختصاص دهد.

۱۶- زمان تصادفی برحسب دقیقه که حیوان خاصی نسبت به داروی خاصی عکس‌العمل نشان دهد بین ۲ و $\frac{4}{3}$ دقیقه می‌باشد مطلوب است احتمال این که عکس‌العمل این حیوان نسبت به آن دارو کمتر از $\frac{3}{25}$ دقیقه طول بکشد.

۱۷- بار دیگر مسألهٔ ملاقات حسن و احمد را در نظر بگیرید. احتمال این که زمان رسیدن احمد به زمان رسیدن حسن نزدیکتر از ساعت ۴ بعد از ظهر باشد، چقدر است؟

۱۸- در معادله $ax + b = 0$ ، ضریب a به طور تصادفی عددی در بازه $[1, 2]$ و ضریب b نیز به طور تصادفی عددی از بازه $[-1, 1]$ انتخاب شده است. احتمال این که جواب معادله بزرگتر از $2/25$ باشد چقدر است؟

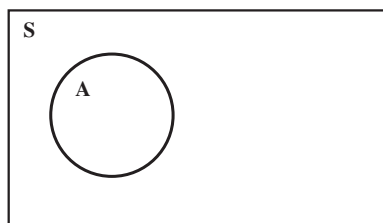
۱۹- یک تاجر منتظر دو تماس تلفنی از علی و رضا است. احتمال این که علی در فاصله زمانی بین ۲ تا ۴ بعد از ظهر با او تماس بگیرد به اندازه احتمال تماس تلفنی رضا در فاصله زمانی بین ساعت ۳:۳۰ تا ۳:۳۰ بعد از ظهر است. احتمال در حالت های زیر را محاسبه نمایید:

الف) علی قبل از رضا تلفن بزند؛
 ب) فاصله دو تماس تلفنی کمتر از ۱۰ دقیقه باشد؛
 پ) علی اول تماس بگیرد، فاصله تلفن ها کمتر از ۱۰ دقیقه باشد و هر دو تلفن قبل از ساعت ۳ بعد از ظهر باشد.

۴-۶- قوانین احتمال

می دانیم که از تقسیم کردن اندازه پیشامد؛ یعنی طول، سطح و حجم پیشامد بر اندازه فضای نمونه ای در حالت پیوسته، احتمال به دست می آید. با توجه به این که فضای پیشامد A همواره زیر مجموعه فضای نمونه ای S است، پس اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A باشد، همیشه داریم:

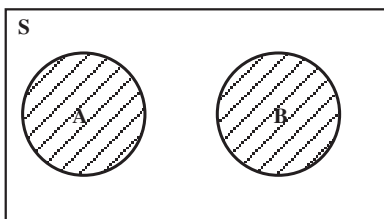
$0 \leq P(A) \leq 1$	اصل ۱
----------------------	-------



در این جا در واقع چون A زیر مجموعه S است پس نسبت «اندازه» A به «اندازه» S ، کوچکتر یا مساوی ۱ می باشد و واضح است که وقتی مساوی ۱ است که $A = S$ ، پس:

$P(S) = 1$	اصل ۲
------------	-------

حال اگر A و B را پیشامدهایی در فضای نمونه ای S بگیریم که هر دو با هم اتفاق نمی افتند



یعنی در واقع $A \cap B = \emptyset$ ، که در این صورت دو پیشامد را ناسازگار می‌نامیم، می‌خواهیم احتمال وقوع هر دو پیشامد A و B یعنی $A \cup B$ را بررسی کنیم.

در واقع برای پیدا کردن $P(A \cup B)$ می‌توانیم مجموع «اندازه‌های» A و B را بر «اندازه» S تقسیم کنیم

که در نتیجه در این حالت احتمال $A \cup B$ برابر حاصل جمع احتمال A و احتمال B خواهد بود.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $A \cap B = \emptyset$	اصل ۳
--	-------

برای حالت گسسته با احتمال کلی نیز می‌توان سه اصل بالا را ثابت کرد. (این مطلب به عنوان تمرین آورده شده است.) سه اصل فوق در واقع اصول علم احتمالات هستند که نخستین بار ریاضیدان برجسته آندره کولموگروف^۱ در سال ۱۹۳۳ آن‌ها را بیان کرد و علم احتمالات را مبتنی بر یک دستگاه اصولی بدون ساخت. حال می‌توان به کمک این سه اصل بقیه قوانین احتمال را استنتاج نمود.

قضیه ۱: اگر A، B و C سه پیشامد دو بدو مجزا باشند، یعنی اشتراک هر جفت از آن‌ها تهی باشد، آنگاه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

برهان: با استفاده از خاصیت شرکت پذیری مجموعه‌ها داریم:

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) \quad (۱)$$

در رابطه فوق $A \cup B$ و C مجموعه‌های از هم جدا هستند زیرا:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset \cup \emptyset$$

بنابراین رابطه (۱) را به این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] \\ &= P(A \cup B) + P(C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) \end{aligned}$$

رابطه اخیر به واسطه $A \cap B = \emptyset$ برقرار است. ▣

^۱ - A.Kolmogorov

قضیه ۲: اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ ، آنگاه

$$P(A) \leq P(B) \quad (\text{الف})$$

$$P(B-A) = P(B) - P(A) \quad (\text{ب})$$

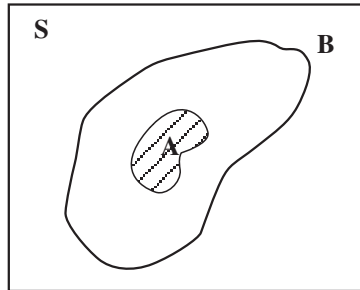
پرهان: می‌دانیم که $B = (B-A) \cup A$. (به شکل زیر رجوع کنید). همچنین A و $B-A$ از هم جدا هستند، زیرا $A \cap (B-A) = \emptyset$. بنابراین طبق اصل ۳ احتمال

$$P(B) = P(B-A) + P(A) \quad \text{حال}$$

اثبات الف) چون $P(B-A) \geq 0$ بنابراین $P(A) \leq P(B)$ ؛

اثبات ب) $P(A) - P(B)$ را به دو طرف تساوی فوق اضافه می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\square \quad P(B-A) = P(B) - P(A)$$



توجه: در قضیه ۲، شرط $A \subseteq B$ لازم است و بدون آن نتایج الف) و ب) در حالت کلی برقرار نیستند. مثلاً تاس سالمی را می‌ریزیم. پیشامدهای

$$A = \text{«عدد تاس بیشتر از ۵ نباشد»}$$

$$B = \text{«عدد تاس زوج باشد»}$$

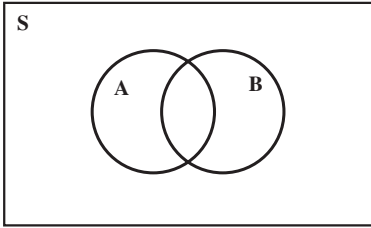
را در نظر می‌گیریم. در این صورت $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ می‌باشد. روشن است که $A \not\subseteq B$ ، $A - B = \{1, 3, 5\}$ و داریم:

$$P(A) = \frac{5}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A-B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$P(A) - P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = P(A-B)$$

و ب) برقرار نیست. همچنین نامساوی الف) نیز در این حالت برقرار نیست. به‌طور کلی دلیلی ندارد که برای دو پیشامد داده شده A و B ، همواره $P(A)$ کوچکتر یا مساوی $P(B)$ باشد.



حال اگر A و B دو پیشامدی باشند که $A \cap B \neq \emptyset$ یعنی مجزا از یکدیگر نباشند، احتمال وقوع $A \cup B$ چقدر خواهد بود؟ با توجه به رابطه زیر

$$A \cup B = (A - A \cap B) \cup (B - A \cap B) \cup (A \cap B)$$

که به کمک نمودار و قابل بررسی است. و از طرف دیگر

چون $(A - A \cap B)$ ، $(B - A \cap B)$ و $(A \cap B)$ مجزا از یکدیگرند در نتیجه:

$$P(A \cup B) = P(A - A \cap B) + P(B - A \cap B) + P(A \cap B)$$

ولی چون $A \cap B \subset B$ و $A \cap B \subset A$ پس:

$$P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$

حال با جایگذاری دو رابطه اخیر در رابطه قبلی نتیجه می شود:
قضیه ۳: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حال به دو مثال توجه می کنیم:

مثال ۱: اگر احتمال وجود تلویزیون رنگی در یک خانه ۴۱٪، سیاه و سفید ۸۵٪ و از هر دو نوع ۳۲٪ باشد، احتمال این که در این خانه لااقل یکی از دو نوع تلویزیون موجود باشد، چقدر است؟
حل: اگر A پیشامد وجود تلویزیون رنگی، B وجود تلویزیون سیاه و سفید و C وجود هر دو نوع تلویزیون باشد، طبق فرض داریم:

$$P(A) = 0/41, P(B) = 0/85, P(C) = 0/32$$

حال با استفاده از قضیه (۳) می نویسیم:

$$P(A \cup B) = 0/85 + 0/41 - 0/32$$

$$= 1/26 - 0/32 = 0/94$$

مثال ۲: احتمال این که شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد، ۲۳٪، ناراحتی قلبی داشته باشد ۲۴٪ و دست کم یکی از این دو نوع بیماری را داشته باشد ۳۸٪ است. احتمال این که هر دو نوع بیماری را دارا باشد چقدر است؟

حل: اگر A پیشامد بیماری کلیوی داشتن و B پیشامد بیماری قلبی داشتن باشد، طبق فرض

داریم:

$$P(A) = 0/23$$

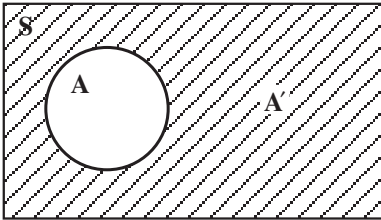
$$P(B) = 0/24$$

$$P(A \cup B) = 0/38$$

بنابراین:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0/09$$

فرض کنید A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد، یعنی $A \subset S$ ، مکمل A نسبت به S را که با A' نشان می‌دهیم پیشامد مکمل A می‌نامیم. در واقع رخ دادن A' به معنای رخ ندادن پیشامد A است.



اجتماع A و A' برابر فضای نمونه‌ای S است ولی از طرف دیگر A و A' مجزا از یکدیگرند یعنی $A \cap A' = \emptyset$ ، پس داریم:

$$P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(S) = 1$$

در نتیجه:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

مثال ۳: قبلاً احتمال این که n نفر در یک میهمانی روز تولد متفاوتی داشته باشند را محاسبه

کرده‌ایم:

$$P(A) = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

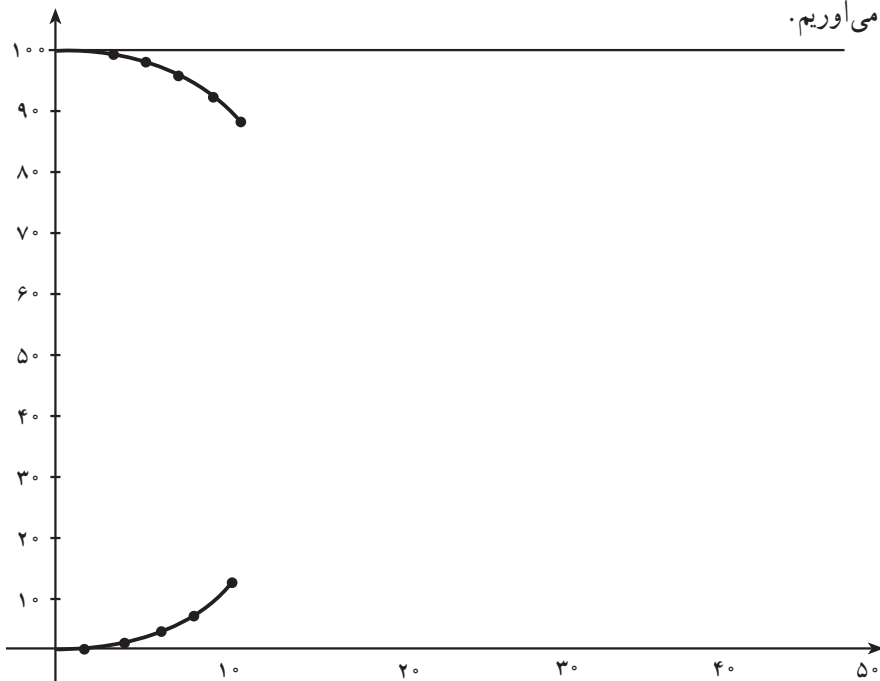
که همان پیشامد روزهای تولد متفاوت برای n نفر بود. حال اگر بخواهیم احتمال این که حداقل دو نفر روز تولد یکسانی داشته باشند را پیدا کنیم چون پیشامد یکسان بودن روز تولد حداقل دو نفر، متمم پیشامد A است، پس

$$P(A') = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

احتمال‌های این که حداقل دو نفر در یک گروه موجود باشند که روز تولدشان یکسان باشد و نیز این که هیچ دو نفری روز تولد یکسان نداشته باشند در صفحه بعد آورده شده است. هر کدام از این احتمال‌ها به نزدیکترین درصد گرد شده است.

تعداد افراد در گروه	احتمال متفاوت بودن همه روز تولدها	احتمال وجود دو نفر با روز تولد یکسان
۲	%۱۰۰	%۰
۴	%۹۸	%۲
۶	%۹۶	%۴
۸	%۹۳	%۷
۱۰	%۸۸	%۱۲
۱۲	%۸۳	%۱۷
۱۴	%۷۸	%۲۲
۱۶	%۷۲	%۲۸
۱۸	%۶۵	%۳۵
۲۰	%۵۹	%۴۱
۲۲	%۵۲	%۴۸
۲۴	%۴۶	%۵۴
۲۶	%۴۰	%۶۰
۲۸	%۳۵	%۶۵
۳۰	%۲۹	%۷۱
۳۲	%۲۵	%۷۵
۳۴	%۲۰	%۸۰
۳۶	%۱۷	%۸۳
۳۸	%۱۴	%۸۶
۴۰	%۱۱	%۸۹
۴۲	%۹	%۹۱
۴۴	%۷	%۹۳
۴۶	%۵	%۹۵
۴۸	%۴	%۹۶
۵۰	%۳	%۹۷

حال اگر این جدول را روی نموداری که محور x های آن نماینده تعداد اعضای موجود در گروه و محور y های آن درصد احتمال های مزبور به ترتیب مشخصی باشد، پیاده کنیم نمودار زیر را به دست می آوریم.



لازم به تذکر است که با توجه به مثال ۷ بخش ۹-۱. وقتی $n > ۳۶۵$ است $P(A) = ۰$ خواهد بود.

در مورد جدول و نمودار بالا یک تمرین در تمرین ها آورده شده است.

مثال ۴: از مجموعه اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال

این که عدد انتخابی بر ۳ یا بر ۵ یا هر دو بخش پذیر باشد چقدر است؟

حل: تعداد اعداد صحیح بین ۱ و N که بر k بخش پذیرند از تقسیم N بر k و سپس $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$

به دست می آید (به مثال ۶ در قسمت ۴-۱ مراجعه کنید). بنابراین اگر A پیشامد بخش پذیر بودن عدد

انتخابی بر ۳ و B پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر ۵ باشد، آنگاه

$$P(A) = \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$$

$$P(B) = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}$$

و $A \cap B$ پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر هر دو عدد ۳ و ۵ است. برای محاسبه احتمال پیشامد $A \cap B$ ، چون ۳ و ۵ نسبت به هم اول هستند پس اگر عددی بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، بر ۱۵ نیز بخش‌پذیر است. برعکس، اگر عددی بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد، همزمان بر ۳ و ۵ نیز بخش‌پذیر است.

$$P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{1000}{15} \right]}{1000} = \frac{66}{1000} \quad \text{بنابراین}$$

در نتیجه بنا به قضیه ۳، احتمال مطلوب برابر است با:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} \\ &= \frac{467}{1000} \end{aligned}$$

مثال ۵: با توجه به مثال ۴ و قضیه ۳، برای محاسبه احتمال سه پیشامد یعنی $P(A \cup B \cup C)$ فرمولی پیدا کنید.

حل: بر اساس خواص مجموعه‌ها داریم

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] \quad \text{و در نتیجه}$$

اگر $A \cup B$ را یک مجموعه فرض کنیم، آنگاه از قضیه ۳ خواهیم داشت:

$$P[(A \cup B) \cup C] = P[(A \cup B)] + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] \quad (1)$$

اما مجدداً از قضیه ۳ به دست می‌آوریم

$$P[(A \cup B)] = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (2)$$

و طبق خاصیت بخش‌پذیری اشتراک نسبت بر اجتماع

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

اما طبق قضیه ۳

$$\begin{aligned} P[(A \cup B) \cap C] &= P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)] \end{aligned}$$

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \quad \text{چون}$$

پس

$$P[(A \cup B) \cap C] = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \quad (۳)$$

از جایگذاری رابطه‌های (۲) و (۳) در رابطه (۱) نتیجه می‌شود

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

در این مثال و قضیه ۳ می‌بینید که بعضی از احتمال‌ها جمع می‌شوند و بعضی دیگر، از مجموع احتمال‌ها، کم می‌شوند. جمع و تفریق احتمال‌ها اصل شمول و عدم شمول نامیده می‌شود. در واقع، «شمول» مربوط به احتمال‌هایی است که جمع می‌شوند و عدم شمول مربوط به احتمال‌هایی است که کم می‌شوند.

با استفاده از قضیه ۳ و مثال ۵ می‌توان اصل شمول و عدم شمول را در حالت کلی (برای n پیشامد) یعنی $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ به دست آورد.

برای این کار، ابتدا همه اشتراک‌های ممکن پیشامدهای A_1, A_2, \dots, A_n را پیدا کرده و احتمال آن‌ها را به دست می‌آوریم. پس از آن، احتمال اشتراک‌هایی که دارای تعداد فردی از پیشامدها هستند را با علامت مثبت و احتمال اشتراک‌هایی که دارای تعداد زوجی از پیشامدها هستند را با علامت منفی به آن‌ها اضافه می‌کنیم که به این فرآیند، اصل شمول و عدم شمول می‌گوییم.

تمرین زیر، به پیدا کردن این الگو کمک می‌کند.

تمرین: اصل شمول و عدم شمول را برای ۴ پیشامد اثبات کنید.

مثال ۶: فرض کنید ۲۰٪ مردم یک شهر روزنامه الف، ۲۵٪ روزنامه ب، ۱۳٪ روزنامه پ، ۱۰٪ روزنامه‌های الف و ب، ۸٪ روزنامه‌های الف و پ، ۵٪ روزنامه‌های ب و پ و بالاخره ۴٪ هر سه روزنامه را می‌خوانند.

احتمال این که شخصی به تصادف از اهالی این شهر انتخاب شود که هیچ‌یک از این روزنامه‌ها را نخواند، چقدر است؟

حل: اگر E, F, G به ترتیب پیشامدهای خواندن روزنامه‌های الف، ب و پ باشند، پیشامد این که فرد انتخاب شده دست کم یکی از روزنامه‌های الف، ب و پ را بخواند، $E \cup F \cup G$ است. در نتیجه احتمال این که فرد انتخاب شده هیچ‌یک از روزنامه‌ها را نخواند، برابر $1 - P(E \cup F \cup G)$ است. پس طبق اصل شمول و عدم شمول

$$\begin{aligned}
 P(E \cup F \cup G) &= P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) \\
 &\quad - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G) \\
 &= 0/25 + 0/20 + 0/13 - 0/10 \\
 &\quad - 0/08 - 0/05 + 0/04 \\
 &= 0/39
 \end{aligned}$$

بنابراین، احتمال مطلوب برابر است با :

$$1 - 0/39 = 0/61$$



۱- برای انتخاب یک نفر جهت عضویت در انجمن خانه و مدرسه یک دبیرستان، چهار نفر کاندید شده‌اند. اگر احتمال انتخاب شدن A دو برابر احتمال انتخاب شدن B باشد و C و D برابر در انتخاب شدن داشته باشند، ولی احتمال انتخاب شدن C دو برابر احتمال انتخاب شدن D باشد، مطلوب است :

(الف) احتمال این که C موفق به انتخاب شود ؛

(ب) A موفق به انتخاب نشود.

۲- یک شرکت بازرگانی فقط به یک کارمند نیاز دارد. از بین متقاضیان خانم اکبری، خانم معینی و خانم حیدری واجد شرایط هستند. به دلیل مهارت‌های حرفه‌ای خانم معینی، احتمال این که ایشان استخدام شوند ۲۰٪ بیشتر از خانم اکبری و ۲۰٪ بیشتر از خانم حیدری است. احتمال این که خانم معینی استخدام شود چقدر است؟

۳- آمار نشان می‌دهد که در یکی از شهرهای بزرگ، ۲۵٪ جرائم در طول روز و ۲۰٪ جرائم در درون شهر صورت می‌گیرد. اگر تنها ۲۰٪ جرائم در حومه شهر و در طول روز اتفاق بیفتند، در این صورت چند درصد جرم‌ها درون شهر و در طول شب رخ می‌دهند؟ چند درصد جرم‌ها در حومه شهر و در طول شب اتفاق می‌افتد؟

۴- سه خاصیت احتمالات را برای احتمال غیرهم شانس ثابت کنید.

۵- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ثابت کنید :

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad (\text{الف})$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \quad (\text{ب})$$

۶- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S داریم: $P(A) = P(B) = 1/2$ ، نشان دهید:

$$P(A \cap B) = 1/4$$

۷- فرض کنیم که شخصی از شهر اصفهان دیدن کند، احتمال این که از عالی قاپو بازدید کند $1/4$ ، احتمال این که از بازار اصفهان بازدید کند $1/7$ ، احتمال این که از مسجد جامع بازدید کند $1/6$ ، احتمال این که از عالی قاپو و بازار هر دو دیدن کند $1/46$ ، احتمال این که بازار اصفهان و مسجد جامع را ببیند $1/44$ و احتمال این که از عالی قاپو و مسجد جامع دیدن کند $1/72$ است. احتمال این که به بازدید هر سه مکان برود $1/34$ است. احتمال این که این شخص لااقل یکی از این سه مکان را دیدن کند چقدر است؟

۸- نشان دهید که:

$$P(A) \geq P(A \cap B) \quad (\text{الف})$$

$$P(A) \leq P(A \cup B) \quad (\text{ب})$$

۹- با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید اگر A_1, A_2, \dots, A_n ، پیشامد دو به دو مجزا

باشند، آنگاه:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

۱۰- با استفاده از قضیه ۳ ثابت کنید که برای دو پیشامد دلخواه A و B

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

۱۱- جدول و نمودار مربوط به روز تولد را به یاد بیاورید و به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) نقطه برخورد دو نمودار بالا و پایین چه اهمیتی دارد؟

اگر نمودار را به راست ادامه دهیم:

ب) نمودار مربوط به وجود دو نفر با روز تولد یکسان چه تغییری می‌کند؟

پ) نمودار مربوط به عدم وجود دو نفر با روز تولد یکسان چه تغییری می‌کند؟

۱۲- عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که:

الف) عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، اما بر ۵ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟

ب) عدد انتخابی نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چقدر است؟

۱۳- از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر و بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟

۱۴- رابطه‌های زیر همیشه درست نیستند. برای اثبات این ادعا، برای هر حالت یک مثال نقض بزنید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{الف)}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \text{ب)}$$

۱۵- تعداد بیماران یک بیمارستان ۶۳ نفر است که از این افراد، ۳۷ نفر مرد و ۲۰ نفر برای عمل جراحی بستری شده‌اند. اگر ۱۲ نفر از بین بستری شدگان برای عمل جراحی مرد باشند، در این صورت چند نفر از ۶۳ بیمار نه مرد هستند و نه برای عمل جراحی بستری شده‌اند.

۱۶- A, B و C سه پیشامد هستند. ثابت کنید رابطه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

درست است اگر و تنها اگر رابطه زیر درست باشد؛

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0$$

۱۷- ثابت کنید

$$P(A \cap B \cap C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

۱۸- به کمک استقرای ریاضی، نامساوی تمرین ۱۷ را برای n پیشامد ثابت کنید.

منابع

- ۱- شووینگ تی - لین ویو - فنگ لین. نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن، (ترجمه: حمید رسولیان). مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ ۱۳۶۸.
- ۲- ایان استیوارت - دیوید تال. مبانی ریاضیات (ترجمه: محمدمهدی ابراهیمی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ ۱۳۶۵.
- ۳- مصاحب، غلامحسین. آنالیز ریاضی، جلد اول، مؤسسه انتشارات فرانکلین، تهران، ۱۳۴۸.
- ۴- ظهوری زنگنه، بیژن، گویا، مریم؛ گویا، زهرا؛ دوره‌های کوتاه مدت عملی یا کارگاهی آموزش ریاضی، اداره کل آموزش‌های ضمن خدمت، تهران، ۱۳۷۲.
- ۵- پولیا، جورج. چگونه مسأله را حل کنیم. (ترجمه: احمد آرام). انتشارات کیهان، تهران، چاپ دوم، ۱۳۶۹.
- ۶- چانک، کای، لای. نظریه مقدماتی احتمال و فرآیندهای تصادفی، (ترجمه: ابوالقاسم میامی، قاسم وحیدی)، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵.
- ۷- فروند، جان. و. والپول، رونالد. آمار ریاضی، (ترجمه: علی عمیدی و محمد قاسم وحید اصل) مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۱.
- ۸- بلایس، تی. اس. رابرتسون، ای. اف. جبر به روش تمرین، (ترجمه: حسین دوستی) ناشر مبتکران، تهران، ۱۳۷۰.
- ۹- لیانگ شین هان، اعداد مختلط و هندسه، (ترجمه: محمد بهفروزی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۶.
- ۱۰- جهانی پور، روح‌الله. احتمال (جلد دوم)، از سری کتاب‌های موضوعی انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۹.
- ۱۱- قهرمانی، سعید. مبانی احتمال (ترجمه: غلامحسن شاهکار و ابوالقاسم بزرگ‌نیا)، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۷.
- ۱۲- راس، شلدون، مبانی احتمال، (ترجمه: علی همدانی و احمد پارسیان)، انتشارات شیخ بهایی، ۱۳۷۵.

- 13- Albert D.polimeni H.Joseph. **Straight Foundations. of Discrete. Mathematics.** State University of New York-Fredonia 1990.
- 14- Billstein R.,Libeskind, S., Lott J., **A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers,** (2nd ed.) Benjamin-Cummings Publish.Co. 1904.
- 15- Churchill R .V . , Brown J .W . , Verhey R . F . , **Complex Variables and Applications,** Mc-Graw Hill 1990.
- 16- Feller,W. **An Introduction to Probability Theory and its Applications,** John Wiley & Sons, 1968.
- 17- Graham R., Knuth D., Pathshinik O., **Concrete Mathematics,** Addison-Wesley 1989.
- 18- Jacob.H.R.**Mathematics,a human endeavor,** W.H.Freeman, (1982 2nd ed.)
- 19- Larson L.C., **Problem Solving Through Problems,** Springer Verlag, 1983.
- 20- Ghahramani,S. **Fundamentals of probability,** Prentic-Hall, Inc,(2000 2nd ed.)
- 21- Grimmett G., Stirzaker D., **Probability and random processes.** Clarendon press. Oxford, 1982.

معلمان محترم صاحب نظران . دانش آموزان عزیز و اولیای آمان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره دی مطالب
 این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۳۶۳ ۱۵۸۵۵ گروه رسی مربوط و یا پیام نگار Email:
 talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.
 دفتر نامه ریزی دبایف کتاب دی پستی

