مسائل

۱ــ در معادلهٔ $2x^2-8x+m=0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۲ــ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^3-4x$ ب) $g(x)=(x+\frac{1}{x})^2+(x+\frac{1}{x})$

۳ــ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x^3+x^2+3x=0$ ب) $\frac{3x^2-11}{8}+\frac{74-2x^2}{12}=10$

۴ــ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

الف) جواب‌های آن $\frac{1}{5}$ و $\frac{4}{5}$ باشد.

ب) جواب‌های آن $1\pm\sqrt{3}$ باشد.

۵ــ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=9x^2+6x+3$ ب) $f(x)=4+8x-x^2$

۶ــ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $4x^2-5x-5=0$ باشد معادله‌ای بنویسید که جواب‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

۷ــ بدون حل معادله، و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت جواب‌های معادلهٔ $5x^2-7x-5=0$ بحث کنید.

۸ــ از دبیر ریاضی کلاس حسابان سنش را پرسیدند. پاسخ داد : ۲۱ سال بعد، سن من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. این دبیر چند سال سن دارد؟

۹ــ (مسأله‌ای از کتاب جبر و مقابله خوارزمی) کدام عدد (مثبت) است که چون یک سوم آن را با یک و همچنین یک چهارم آن را با یک جمع کنیم و دو حاصل جمع را در هم ضرب کنیم، برابر ۲۰ شود؟

۱۰ــ در ضرب دو عدد طبیعی که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است؛ اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می‌شود. برای آزمایش، حاصلضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می‌کنند. خارج قسمت ۳۹ و باقی‌مانده آن ۲۲ می‌شود آن دو عدد را پیدا کنید.

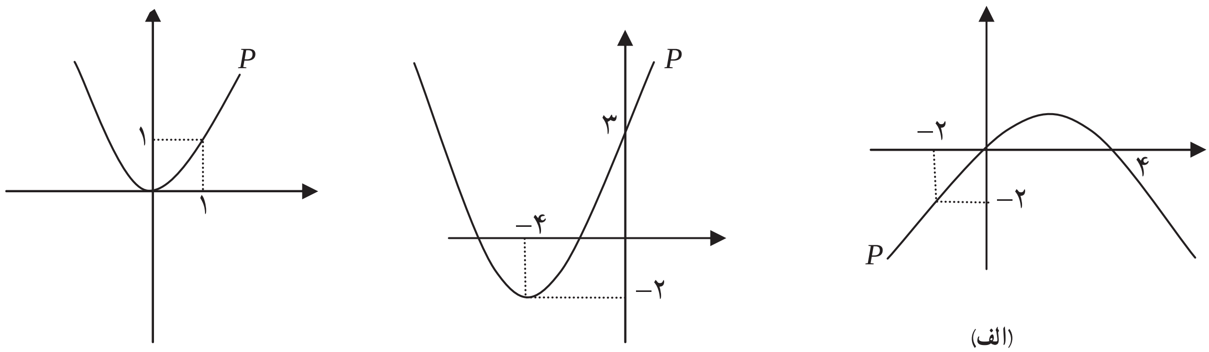
۱۱ــ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4-3x^2+2=0$ ب) $(\frac{x^2}{3}-2)^2-7(\frac{x^2}{3}-2)+6=0$

ج) $(4-x^2)^2-2(4-x^2)-15=0$

۱۲ــ کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{۲}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x پیدا کنید.

۱۳ــ در تابع درجه دوم $P(x) = ax^{۲}+ bx + c$ در هر یک از حالت‌های زیر اولاً ضرایب a و b و c ثانیاً علامت $P(x)$ را تعیین کنید.



(الف) (ب) (ج)

۱۴ــ محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ مترمربع است. اندازهٔ طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

معادلات شامل عبارات گویا

حل یک مسئله

در یک مزرعه شالیکاری دو کارگر که با هم کار می‌کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به‌تنهایی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کرد. هر کدام از این دو کارگر به‌تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کنند؟

خانم تقوی دبیر دبیرستان ایمان است. او معمولاً درس خود را با طرح یک مسئله آغاز می‌کند. او امروز مسئله بالا را طرح کرد و به‌دانش‌آموزان فرصت داد تا روی مسئله کار کنند. سپس از آن‌ها خواست راه حل خود را مطرح کنند.

زهرا : فکر می‌کنم مسئله با تشکیل یک معادله حل می‌شود. فرض می‌کنیم کارگر اول در x روز کار را تمام کند، پس کارگر دوم همین کار را در $x+۱۵$ روز تمام می‌کند. باید مفروضات مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم، اما من نتوانستم این کار را انجام دهم.

خانم تقوی : این دو کارگر با هم در یک روز چه کسری از کار را انجام می‌دهند؟

دانش‌آموزان : معلوم است $\frac{۱}{۱۸}$ کار را.

خانم تقوی : حال شما مشخص کنید در یک روز هر کارگر چه میزان از کار را انجام می‌دهد و ببینید چگونه بین این نسبت‌ها می‌توانید ارتباط برقرار کنید.

سارا : فکر کنم بتوانم ارتباط بین این نسبت‌ها را بنویسم سپس از معلم اجازه خواست و پای تابلو نوشت :

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}$$

و توضیح داد که $\frac{۱}{x}$ میزان کار کارگر اول در یک روز و $\frac{۱}{x+۱۵}$ میزان کار کارگر دوم در یک روز است و مجموع آن‌ها مجموع کار هر دو کارگر در یک روز است که برابر $\frac{۱}{۱۸}$ است.

خانم تقوی : شما معادله موردنظر را پیدا کردید و برای حل مسئله کافی است این معادله را حل کنید. برای حل این معادله باید عبارت متناظر آن را ساده کنیم.

مینا : ما قبلاً برای جمع کسرها از روش هم مخرج کردن استفاده می‌کردیم این‌جا هم می‌توانیم از روش کلی هم مخرج کردن کسرها استفاده کنیم. یک راه که امسال با آن آشنا شدیم استفاده از کوچکترین مضرب مشترک مخرج هاست، که در این جا همان حاصل‌ضرب مخرج‌ها می‌شود.

$$\frac{x+۱۵+x}{x(x+۱۵)}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow\frac{۲x+۱۵}{x^۲+۱۵x}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow۱۸(۲x+۱۵)=x^۲+۱۵x$$

$$\Rightarrow x^۲-۲۱x-۲۷۰=۰\Rightarrow(x-۳۰)(x+۹)=۰\ \Rightarrow x=۳۰\,,\,x=-۹$$

جواب $x=-۹$ قابل قبول نیست(چرا؟) و جواب معادله ۳۰ روز است. یعنی کارگر اول به تنهایی در ۳۰ روز و کارگر دوم به تنهایی در ۴۵ روز کار را تمام می‌کند.

حل یک مسئله

در یک مغازهٔ ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می‌شوند. به‌علت تازه کار بودن کارگرها، ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می‌توان این محلول را به‌غلظت موردنظر رساند؟

حالت اول : فرض می‌کنیم نمک به‌اندازهٔ کافی موجود باشد و بتوانیم با اضافه کردن نمک کافی، محلول با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می‌کنیم که در محلول فعلی چند کیلوگرم نمک وجود دارد.

$$\frac{۴}{۱۰۰}\times۲۰۰=۸$$ کیلو

اگر x کیلوگرم نمک به این محلول بیفزاییم، میزان نمک آب $x+۸$ کیلوگرم می‌شود و وزن کل محلول $x+۲۰۰$ کیلو می‌شود،

پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم :

$$\frac{۸+x}{۲۰۰+x}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

با حل این معادله نتیجه می‌شود $x=\frac{۶۰۰}{۹۳}$. یعنی تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۲ گرم نمک باید به‌محلول اضافه شود.

حالت دوم : اگر نمک موجود نباشد و بخواهیم با تبخیر y کیلوگرم از آب، محلول ۷ درصد نمک بسازیم، باید داشته باشیم :

$$\frac{۸}{۲۰۰-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

با حل این معادله داریم $y=\frac{۶۰۰}{۷}$. یعنی تقریباً ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم آب را باید تبخیر کنیم.

تذکر :

برای حل معادلات شامل عبارات گویا با ضرب طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده، معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند. (چرا؟) همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله که از واقعیت می‌آیند مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز قابل قبول نیستند.

بحث در کلاس

در حل مسئله محلول آب نمک، اگر مقدار نمک موجود در مغازه ۵ کیلوگرم باشد و آن را به‌محلول اضافه کنیم، چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کنیم تا به‌هدف موردنظر برسیم؟

مثال

مجموعه جواب معادلهٔ $\frac{۲x-۳}{۲x+۲}=\frac{۵}{x^۲-۱}-\frac{۲x+۳}{۲x-۲}$ را به‌دست آورید.

ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها را به‌دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲x-۲=۲(x-۱) \\ x^۲-۱=(x-۱)(x+۱) \\ ۲x+۲=۲(x+۱) \end{cases}$$

$۲(x-۱)(x+۱)=$ک.م.م. مخرج ها

طرفین معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم.

$$(x+1)(2x+3)-5\times 2=(x-1)(2x-3)$$

$$2x^2+3x+2x+3-10=2x^2-3x-2x+3$$

$$10x-10=0$$

$$x=1$$

اما $x=1$ مخرج یکی از کسرهای معادله را صفر می‌کند. پس معادله جواب ندارد.

تمرین در کلاس

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{t-1}{t+4}-\frac{2}{t-4}=\frac{7}{6}$

ب) $\frac{x+2}{x^2-3x}=\frac{3}{2x}$

ج) $\frac{x-4}{x-2}=\frac{5}{x}-\frac{4}{x(x-2)}$

مسائل

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{6}{p}=2+\frac{p}{p+1}$

۲) $\frac{k}{2-k}+\frac{2}{k}=5$

۳) $2+\frac{5}{3k-1}=\frac{-2}{(3k-1)^2}$

۴) $\frac{3y+5}{y^2+5y}+\frac{y+4}{y+5}=\frac{y+1}{y}$

۵) $\frac{3}{m+2}+\frac{2}{m}=\frac{4m-4}{m^2-4}$

۶) $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x+3}=\frac{12}{x^2-9}$

۷ــ معلم سؤال کرد مجموعه جواب معادلهٔ $\frac{x+3}{x+3}=1$ چیست؟ برخی از دانش‌آموزان گفتند : همه اعداد. معلم گفت این جواب صحیح نمی‌باشد؟ جواب صحیح چیست؟

۸ــ آقای عماد چند اسباب بازی یکسان برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آن‌ها ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می‌داد او با همان پول ۴ اسباب‌بازی بیشتر می‌توانست بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی را قبل از تخفیف به‌دست آورید.

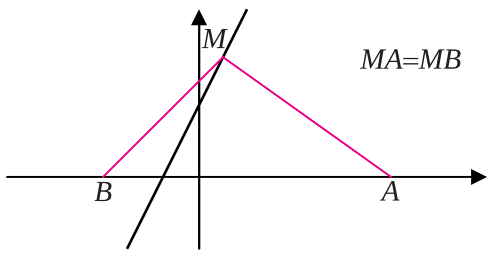
معادلات شامل عبارات گنگ

حل یک مسئله

نقطه‌ای روی خط $y=2x+1$ بیابید که از دو نقطهٔ $A(3,0)$ و $B(-1,0)$ به یک فاصله باشد.

سجاد و صادق دو دانش‌آموز علاقمند هستند که روی این مسئله کار کرده‌اند.

سجاد : مناسب است برای درک بهتر مسئله شکلی رسم کنیم که مشخصات مسئله در آن دیده شود.



صادق : ما می‌توانیم نقطه دلخواهی روی خط $y=2x+1$ در نظر بگیریم و فاصله آن را تا A و B حساب کنیم و ببینیم تحت چه شرایطی این فاصله‌ها مساوی می‌شوند.

سجاد : بسیار خوب. اگر این نقطه را M بنامیم چون روی خط $y=2x+1$ قرار دارد مختصات آن باید به شکل $M(a,2a+1)$ باشد.

صادق : همچنین باید داشته باشیم $MA=MB$، یعنی

$$MA=\sqrt{(a-3)^2+(2a+1-0)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(2a+1-0)^2}=MB$$

با به‌توان دو رساندن طرفین این رابطه خواهیم داشت :

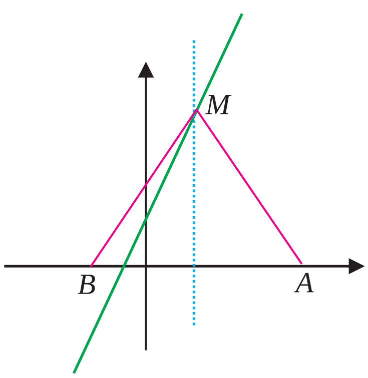
$$(a-3)^2+(2a+1)^2=(a+1)^2+(2a+1)^2$$

$$a^2-6a+9=a^2+2a+1$$

$$a=1$$

سجاد : پس جواب مسئله نقطه $M(1,3)$ است.

صادق : این مسئله را می‌توانیم به‌صورت هندسی نیز حل کنیم. نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند روی عمودمنصف پاره‌خط واصل آن دو نقطه قرار دارند. پس نقطه M روی عمودمنصف AB است؛ ازطرف دیگر M روی خط $y=2x+1$ است، پس M محل برخورد این دو خط است.



تذکر :

برخی معادلات دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند که آن‌ها را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آن‌ها با توان رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم تکرار آن و ساده کردن، معادله‌ای بدون عبارت گنگ به‌دست می‌آید که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادلهٔ اصلی آزمایش شوند زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کنند.

مثال

معادلهٔ $\sqrt{15+\sqrt{2x+80}}=5$ را حل می‌کنیم.

با به‌توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت :

$$15+\sqrt{2x+80}=25$$
$$\sqrt{2x+80}=10$$

دوباره طرفین معادلهٔ اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم. خواهیم داشت :

$$2x+80=100 \Rightarrow x=10$$

جواب به‌دست آمده را در معادلهٔ اصلی قرار می‌دهیم :

$$\sqrt{15+\sqrt{20+80}}=\sqrt{15+10}=\sqrt{25}=5$$

تساوی برقرار است و $x=10$ جواب معادله می‌باشد.

مثال

آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد.

اگر عدد مورد نظر را x بنامیم باید تساوی $x+\sqrt{x}=6$ برقرار شود. یعنی

$$\sqrt{x}=6-x$$

با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت :

$$x=36+x^2-12x$$

با حل این معادله خواهیم داشت :

$$x=9 \quad , \quad x=4$$

با آزمایش جواب‌ها در معادلهٔ اصلی دیده می‌شود، $x=۹$ نمی‌تواند مورد قبول واقع شود و تنها جواب معادله $x=۴$ می‌باشد.

$$x=۴:\quad ۴+\sqrt{۴}\overset{?}{=}۶ \qquad ۴+۲\overset{?}{=}۶ \qquad ۶=۶ \quad \checkmark$$

$$x=۹:\quad ۹+\sqrt{۹}\overset{?}{=}۶ \qquad ۹+۳\overset{?}{=}۶ \qquad ۱۲=۶ \quad \times$$

بحث در کلاس

چرا یکی از جواب‌های معادلهٔ اخیر در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند؟ این جواب اضافه به چه دلیل ایجاد شده است؟

تمرین در کلاس

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{۵q-۱}+۳=۰$

ب) $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴}$

ج) $\sqrt{۳-۳p}=۳+\sqrt{۳p+۲}$

مسائل

۱ــ معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{۱-x^۲}=x$

ب) $\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$

ج) $۲+\sqrt{۱+x}=\sqrt{x}$

۲ــ بدون حل معادلهٔ $\sqrt{۱-x}+\sqrt{۲-x}+۳=۰$ توضیح دهید چرا مجموعهٔ جواب تهی است؟

۳ــ در هر یک از فرمول‌های زیر متغیر خواسته شده را بر حسب سایر متغیرها بیابید.

الف) $V=\sqrt{\dfrac{۲k}{m}}$, $k=?$

ب) $F=\dfrac{۱}{۲\pi}\sqrt{LC}$, $L=?$

د) $\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}$, $T_1=?$

ج) $I=\frac{nE}{R+nr}$, $n=?$

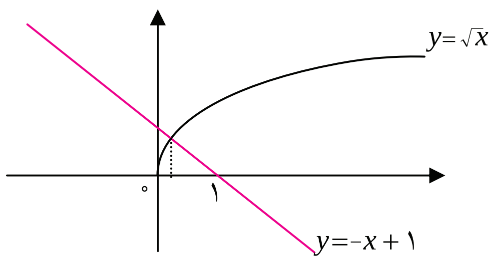
ه) $A=p(1+i)^2$, $i=?$

حل معادلات به روش هندسی

تاکنون با حل انواعی از معادلات با روش‌های جبری آشنا شده‌ایم. در اینجا می‌خواهیم با روش دیگری از حل معادلات آشنا شویم که از برخی لحاظ بر روش جبری ارجحیت دارد. دراین روش مقدار تقریبی جواب‌ها و تعداد جواب‌ها آسان‌تر مشخص می‌شوند. حتی در برخی مثال‌ها حل جبری امکان‌پذیر نیست ولی حل با روش هندسی امکان‌پذیر است.

فعالیت ۸

نمودار دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=-x+1$ در روبرو رسم شده است.



۱ــ اگر طول نقطه تلاقی این دو نمودار a باشد، نشان دهید a یک جواب معادله $-x+1=\sqrt{x}$ است.

۲ــ برعکس اگر بدانیم عددی مانند a یک جواب معادله $-x+1=\sqrt{x}$ است، آیا a طول یکی از نقاط تلاقی دو نمودار است؟

۳ــ از طریق شکل بالا استدلال کنید که معادله $\sqrt{x}=-x+1$ فقط یک جواب دارد که درفاصله $[0, 1]$ قرار دارد.

۴ــ مقدار دقیق جواب معادله $\sqrt{x}=-x+1$ چیست؟

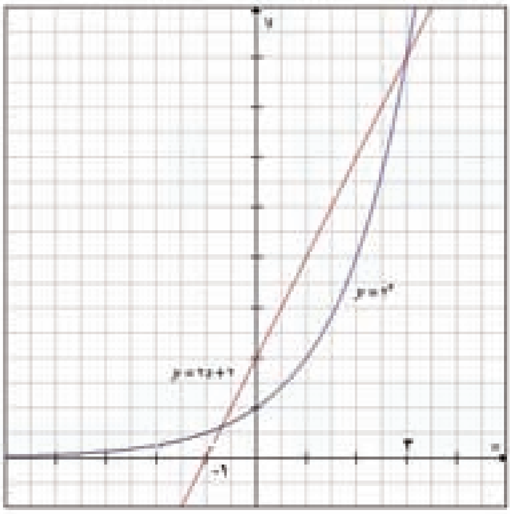
به کمک فعالیت بالا قضیه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه :

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند؛ طول نقاط محل تلاقی نمودار این دو تابع جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط محل تلاقی نمودار این دو تابع است.

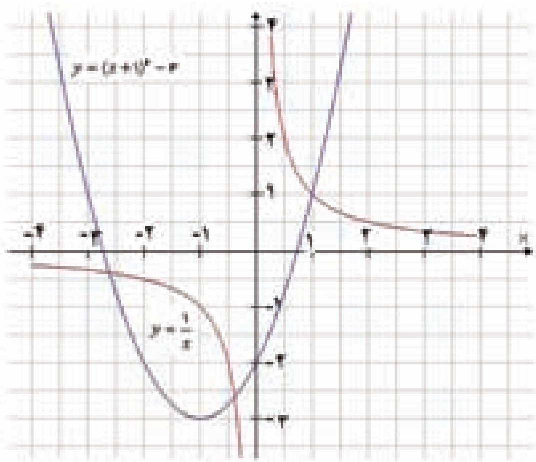
این شیوهٔ حل معادلات را که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی جواب‌ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامند.

مثال



معادلهٔ $۲^x = ۲x + ۲$ را به روش هندسی حل می‌کنیم.
کافی است نمودار توابع $y = ۲^x$ و $y = ۲x + ۲$ را رسم کنیم و محل تلاقی نمودارها را به‌دست آوریم.
از روی نمودار واضح است که معادله دارای جوابی بین ۱− و صفر و یک جواب مثبت است و معادله فقط همین دو جواب را دارد.
جواب مثبت این معادله ۳ است ولی جواب دیگر را به‌طور دقیق نمی‌توانیم به‌دست آوریم اما با روش آزمون و خطا که در سال‌های قبل آموخته‌اید می‌توانید تقریبات اعشار جواب را با دقت مورد نظر به‌دست آورید.

مثال



تعداد جواب‌های معادلهٔ $x^۲ + ۲x - ۲ = \frac{۱}{x}$ را از طریق هندسی می‌یابیم، سپس با استفاده از روش جبری جواب‌های معادله را به‌طور دقیق تعیین می‌کنیم.

نمودار تابع $y = \frac{۱}{x}$ را می‌شناسید. توجه داریم که این تابع در $x = ۰$ تعریف نمی‌شود و شامل دو شاخه در ربع اول و سوم می‌باشد. با استفاده از رسم تابع $y = x^۲$ و انتقال نمودار آن، تابع $y = x^۲ + ۲x - ۲$ را رسم می‌کنیم. توجه داریم که

$$y = x^۲ + ۲x - ۲ = (x+۱)^۲ - ۳$$

از روی شکل می‌توان حدس زد که یکی از جواب‌ها ۱ خواهد شد و با جای‌گذاری $x = ۱$ در معادله، درستی این حدس تأیید می‌شود. شکل نشان می‌دهد که این معادله دو جواب دیگر هم دارد که منفی هستند. اگر مقدار دقیق جواب‌ها را بخواهیم ابتدا با ضرب طرفین معادله در x آن را به‌صورت $x^۳ + ۲x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$ می‌نویسیم. چون چندجمله‌ای $x^۳ + ۲x^۲ - ۲x - ۱$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$x^۳ + ۲x^۲ - ۲x - ۱ = (x-۱)(x^۲ + ۳x + ۱) = ۰$$

در نتیجه $x = ۱$ ، $x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

تمرین در کلاس

۱ــ معادله $\sqrt{x+1}-x^2=2x+1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید و جواب‌های به‌دست آمده را مقایسه کنید.

۲ــ تعداد جواب‌های معادله $x-2\sin x=0$ را مشخص کنید.

۳ــ از طریق جبری و هندسی نشان دهید معادله $\sqrt{x}=x+1$ جواب ندارد.

مسائل

۱ــ با روش هندسی به‌طور تقریبی هر یک از معادلات زیر را حل کنید و در صورت امکان جواب‌های دقیق را با روش جبری به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{x-1}=x-3$ ب) $\dfrac{2x-1}{x}=5-x$

ج) $2^x=x^2$ د) $\sqrt{x}+2x=x^2+2$

۲ــ به‌روش نقطه یابی نمودار تابع $y=x^3$ را رسم کنید. سپس با استفاده از انتقال نمودار تابع $y=(x+1)^3$ را رسم کنید و جواب‌های معادلهٔ $(x+1)^3=-3x+5$ را با روش هندسی به‌طور تقریبی به‌دست آورید.

قدرمطلق و ویژگی‌های آن

در سال‌های قبل با مفهوم قدرمطلق و تابع قدرمطلق آشنا شدید. اگر a عددی حقیقی باشد، قدرمطلق a را با $|a|$ نشان می‌دهیم. اگر a مثبت یا صفر باشد، $|a|$ برابر خود عدد a و اگر a منفی باشد، $|a|$ برابر قرینه a است. این مطلب را به‌صورت زیر می‌توان خلاصه کرد.

$$|a|=\begin{cases} a & a\geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

تمرین در کلاس

۱ــ حاصل هریک از عبارات زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-2-(-3)|$ ب) $|1-\sqrt{2}|$ ج) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|$

۲ــ عبارات زیر را به‌ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ ب) $\sqrt{x^4+2x^2+1}$

۳ــ عبارت «فاصلهٔ بین دو عدد x و a کمتر از ۰/۰۱ است» را با استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

با توجه به‌تعریف قدرمطلق می‌توان عبارات قدرمطلقی را ساده نمود.

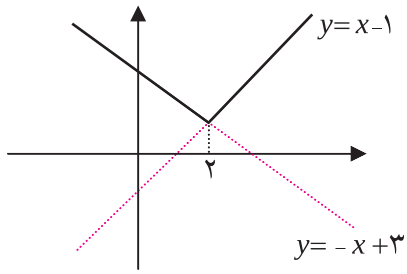
مثال

نمودار $y=|x-۲|+۱$ را رسم می‌کنیم.

با رسم نمودار این تابع از طریق انتقال‌های مناسب نمودار $y=|x|$ آشنا هستید، ولی در اینجا می‌خواهیم با استفاده از مفهوم قدرمطلق و ساده کردن عبارت این کار را انجام دهیم.

ابتدا جدول تعیین علامت $x-۲$ را تشکیل می‌دهیم و از طریق آن علامت $x-۲$ را تشخیص می‌دهیم.

x		۲	
$x-۲$	$-$	۰	$+$
$\lvert x-۲\rvert$	$-x+۲$		$x-۲$
$\lvert x-۲\rvert+۱$	$-x+۳$		$x-۱$



$$y=|x-۲|+۱=\begin{cases}-x+۳ & x\le ۲\\ x-۱ & ۲<x\end{cases}$$

تمرین در کلاس

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند:

۱ــ با توجه به این که $\sqrt{a^۲}=|a|$ نشان دهید $|ab|=|a||b|$

۲ــ با فرض $b\neq ۰$ و استفاده از قسمت قبل ثابت کنید: $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

۳ــ اگر $|x|\le c$ $(c\ge ۰)$ با استفاده از استدلال زیر توضیح دهید چگونه می‌توان نتیجه گرفت: $-c\le x\le c$.

$$|x|\le c\Rightarrow |x|^۲\le c^۲\Rightarrow x^۲\le c^۲\Rightarrow x^۲-c^۲\le ۰\Rightarrow (x-c)(x+c)\le ۰$$

x		$-c$		c	
$(x-c)(x+c)$	$+$	0	$-$	0	$+$

۴ــ اگر $c \geq 0$ و $-c \leq a \leq c$ ثابت کنید $|a| \leq c$.

مسائل

۱ــ برای هر عدد حقیقی a ثابت کنید $|-a| = |a|$ و $|a|^2 = a^2$ و $-|a| \leq a \leq |a|$

۲ــ برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید : $-|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$ و نتیجه بگیرید :

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

(خاصیت بالا را خاصیت نامساوی مثلث می‌نامند.)

۳ــ برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید : $|y| \leq |x| + |y-x|$ و نتیجه بگیرید :

$$|y| - |x| \leq |y-x|$$

۴ــ اگر $c > 0$ و $|a| > c$ نشان دهید $a > c$ یا $a < -c$.

۵ــ به کمک تعیین علامتِ عبارت‌های داخل قدر مطلق، ضابطهٔ توابع زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید.

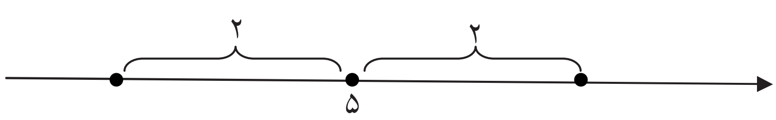
الف) $f(x) = x|x|$ ب) $f(x) = |x+1| - 2$ ج) $y = |x-1| + |x+2|$

معادلات قدرمطلقی

حل یک مسئله

فاصله چه نقاطی روی محور اعداد از نقطه متناظر ۵ برابر ۲ است؟

برای حل این مسئله ابتدا شکل زیر را رسم می‌کنیم.



اگر طول نقطه جواب را x بنامیم شرط مسئله به‌معنای آن است که $|x-5| = 2$. این یک معادله بر حسب مجهول x است. شرط $|x-5| = 2$ به‌معنای آن است که $x-5 = 2$ یا $x-5 = -2$. جواب‌های هر کدام از این دو معادله، جواب معادله $|x-5| = 2$ می‌باشند. در نتیجه $x = 7$ و $x = 3$ دو جواب آن معادله هستند.

به‌طور کلی قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

جواب‌های یک معادله به‌صورت $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ روی هم هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارات قدرمطلق هستند معادلات قدرمطلقی گویند.

برای یافتن جواب این معادلات با استفاده از خواص قدرمطلق و حذف علامت قدرمطلق معادلهٔ ساده شده را حل می‌کنیم.

مثال

۱ : معادلهٔ $|x|=|۲x-۳|$ را حل می‌کنیم. جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادله $۲x-۳=\pm x$ هستند که نتیجه می‌شود ۳ و ۱ جواب‌های آن هستند.

۲ : معادلهٔ $|x+۱|=۲x+۴$ را حل می‌کنیم.

توجه داریم که سمت چپ عبارت متناظر معادله نامنفی است پس باید داشته باشیم : $۲x+۴\geq ۰$ در نتیجه $x\geq -۲$. حال دو معادله $x+۱=\pm(۴+۲x)$ را حل می‌کنیم.

$$x+۱=۴+۲x \Rightarrow x=-۳$$

این جواب قابل قبول نیست، زیرا باید $x\geq -۲$.

$$x+۱=-(۴+۲x) \Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}$$

این جواب قابل قبول است.

تمرین در کلاس

معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید.

الف) $||x|-۱|=۵$

ب) $|۲x-۱|+|x|=۷$

ج) $x|x|=-۴$

فعالیت ۹

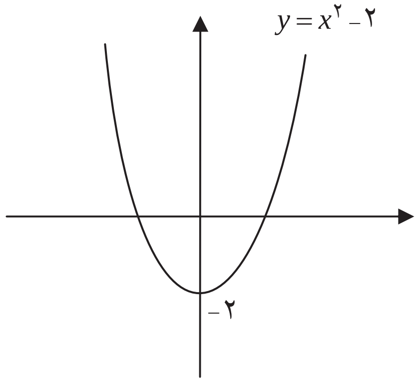
در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=x^۲-۲$ آمده است.

۱ــ با توجه به‌علامت $x^۲-۲$ نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۲|$ را رسم کنید.

۲ــ نمودار $y=۲$ را رسم کنید و محل تلاقی آن با نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۲|$ را مشخص کنید.

۳ــ جواب‌های معادلهٔ $|x^۲-۲|=۲$ را با استفاده از بند ۲ به‌طور تقریبی تعیین کنید.

۴ــ به‌روش جبری معادلهٔ $|x^۲-۲|=۲$ را حل کرده و با جواب‌های به‌دست آمده در بند ۳ مقایسه کنید.

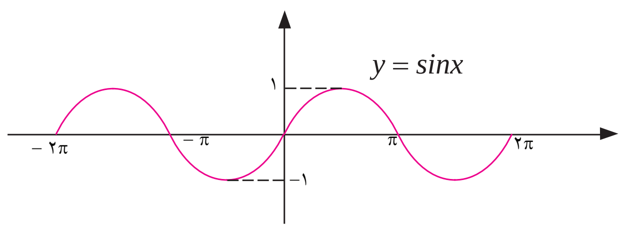


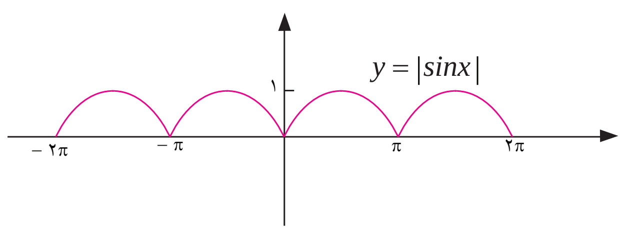
با توجه به تجربه بالا در رسم نمودار تابع $y=|x^۲-۲|$ می‌توانید رابطه بین نمودار دو تابع $f(x)$ و $|f(x)|$ را به‌دست آورید.

در بازه‌هایی که نمودار $f(x)$ بالای محورxها است $f(x)$ مثبت است و$|f(x)|=f(x)$. یعنی در این بازه‌ها نمودار $f(x)$ و $|f(x)|$ بر هم منطبق است. اما در بازه‌هایی که نمودار $f(x)$ پایین محور xها است $f(x)$ منفی است و $|f(x)|=-f(x)$. یعنی در این بازه‌ها نمودار $|f(x)|$ تصویر آینه‌ای نمودار $f(x)$ است.

تذکر :

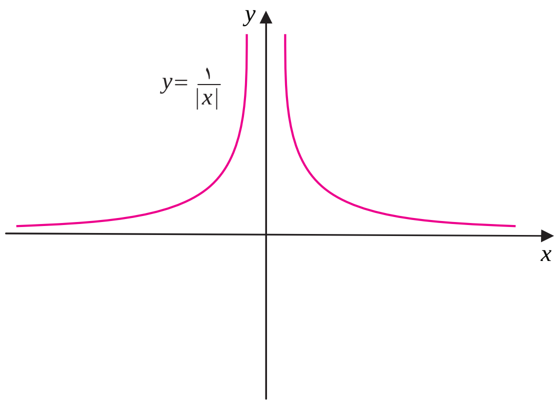
برای رسم نمودار $|f(x)|$ کافی است نمودار $f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور xها است تصویر آینه‌ای نمودار $f(x)$ را رسم کنیم.

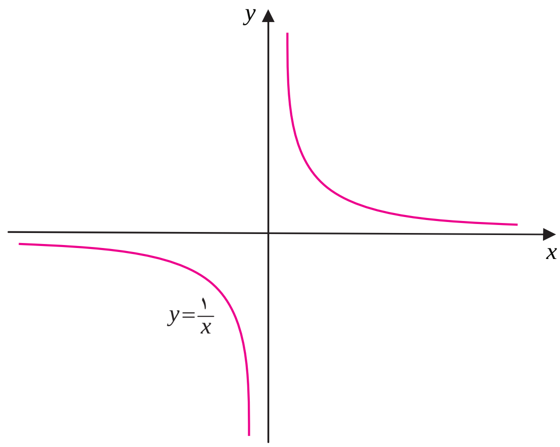




مثال

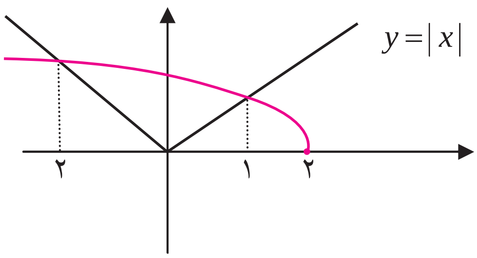
۱ : نمودار تابع $y=\frac{۱}{|x|}$ را رسم می‌کنیم.





۲ : به روش جبری و نموداری (هندسی) معادلهٔ $|x|=\sqrt{۲-x}$ را حل می‌کنیم.

در روش جبری با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت : $x^۲ = ۲ - x$ در نتیجه $x^۲+x-۲=۰$ که جواب‌های آن $x=-۲$, $x=۱$ هستند که هر دو در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند پس معادله دو جواب دارد.

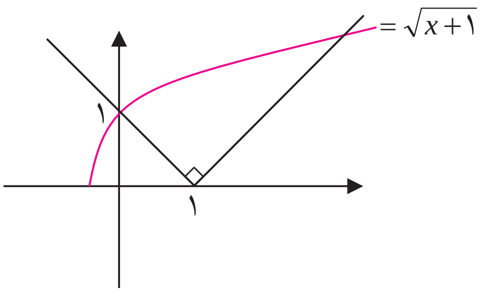


در روش هندسی نمودارهای توابع $y=|x|$ و $y=\sqrt{۲-x}$ را رسم می‌کنیم. طول‌های محل تلاقی دو نمودار جواب‌های معادله‌اند.

تمرین در کلاس

۱ــ به روش هندسی جواب‌های معادلهٔ $|\sin x|=\frac{۱}{۲}$ را در بازه $[-\pi , \pi]$ به‌دست آورید.

۲ــ معادلهٔ $|x^۲-۱| = ۲x-|x|$ را با روش هندسی حل کنید.



۳ــ در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}$ و یک تابع قدرمطلقی که نمودار آن نسبت به خط $x=۱$ متقارن است دیده می‌شود. معادله‌ای که جواب‌های آن طول نقاط تلاقی این دو منحنی است را تشکیل دهید و به‌روش جبری آن را حل کنید.

مسائل

۱ــ هریک از معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید و مجموعهٔ جواب آن را مشخص کنید.

الف) $|2t-1|-3=0$ ب) $|y^2-2|=7$ ج) $|2x-3|=3-2x$

۲ــ نمودار هریک از روابط زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y=3$ معادله به‌دست آمده را با روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=|2x-4|$ ب) $y=|x|+|1-x|$ ج) $y=x+\dfrac{x}{|x|}$

نامعادلات ــ نامعادلات قدرمطلقی

در سال قبل با تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها و استفاده از آن در حل نامعادله‌های درجهٔ دوم آشنا شدید. هر نامعادلهٔ درجه دوم را با استفاده از جدول تعیین علامت و خواص نامساوی‌ها می‌توان حل نمود.

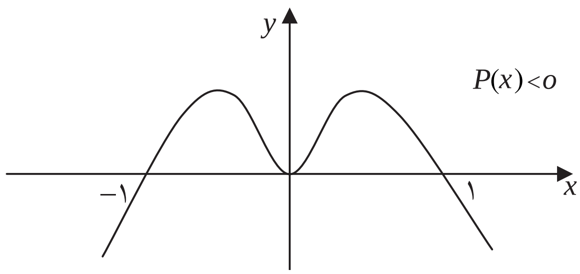
تمرین در کلاس

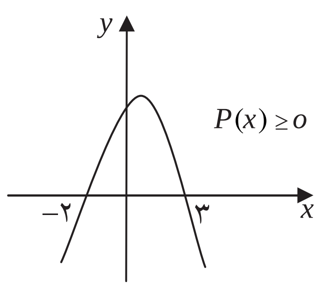
۱ــ هریک از نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2-5x+6\leq 0$ ب) $(1+x^2)(1-x^2)\leq 0$

د) $1+\dfrac{1}{x}<x$ ج) $(1-x)(x+2)>2x^2-1$

۲ــ در هر یک از حالت‌های زیر نمودار تابعی، مانند $P(x)$ داده شده است. مجموعه جواب نامعادلهٔ داده شده را مشخص کنید.





نامعادلاتی که دارای عبارت‌های قدرمطلقی هستند، **نامعادلات قدرمطلقی** می‌نامند. برای حل این‌گونه نامعادلات عموماً از دو خاصیت مهم قدرمطلق استفاده می‌کنند.

اگر k عددی مثبت باشد، نامساوی $|u|\leq k$ معادل با آن است که $-k\leq u\leq k$.

و نامساوی $|u|\geq k$ معادل است با آن که $u\geq k$ یا $-u\geq k$.

مثال

۱ : نامعادلهٔ $|۲x-۱|\leq ۷$ را حل می‌کنیم.

$$|۲x-۱|\leq ۷ \Rightarrow -۷\leq ۲x-۱\leq ۷ \Rightarrow -۶\leq ۲x\leq ۸ \Rightarrow -۳\leq x\leq ۴$$

مجموعه جواب بازه $[-۳,۴]$ می‌باشد زیرا نتیجه‌گیری‌های بالا در جهت عکس نیز برقرارند.

۲ : نامعادلهٔ $|۶-۳x|\geq ۵$ را حل می‌کنیم.

مجموعه جواب این نامعادله، اجتماع مجموعه جواب‌های دو نامعادله $۶-۳x\geq ۵$ و $-(۶-۳x)\geq ۵$ است. مجموعه جواب اولی بازه $(-\infty,\frac{۱}{۳}]$ و مجموعه جواب دومی $[\frac{۱۱}{۳},\infty)$ است و اجتماع این دو بازه مجموعه جواب نامعادله اصلی است.

۳ : نامعادلهٔ $|۲x+۱|\geq ۳$ را حل می‌کنیم.

این نامعادله را می‌توان مانند مثال قبل حل کرد. اما از روش دیگری هم می‌توانیم استفاده کنیم. با توجه به مثبت بودن طرفین نامساوی، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و نامعادله را حل می‌کنیم.

$$(۲x+۱)^۲\geq ۹ \Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱\geq ۹ \Rightarrow ۴x^۲+۴x-۸\geq ۰ \Rightarrow x^۲+x-۲\geq ۰$$
$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱)\geq ۰$$

برای حل نامعادلهٔ اخیر از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

x		-۲		۱	
$P=(x+۲)(x-۱)$	+		−		+
$0\leq P$	جواب	جواب		جواب	جواب

$(-\infty,-۲]\cup[۱,+\infty)=$ مجموعه جواب

توجه داشته باشید که برای دو عدد مثبت a و b شرط $a\leq b$ معادل با آن است که $a^۲\leq b^۲$.

تمرین در کلاس

مجموعه جواب هریک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $|x-۱|\leq\sqrt{x+۱}$ ب) $|۲-۳x|>۵$

حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

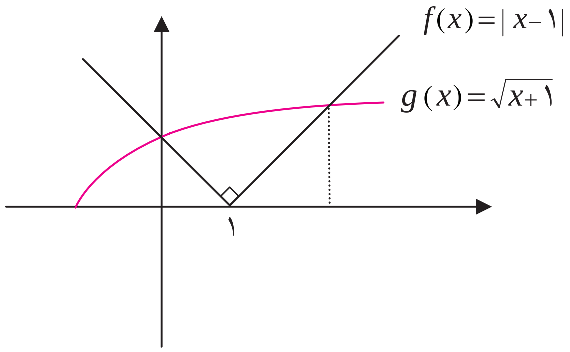
فعالیت ۱۰

در شکل روبه‌رو نمودار توابع $f(x) = |x-۱|$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ رسم شده است.

۱ــ نقاط x که $f(x) < g(x)$ را از طریق شکل مشخص کنید.

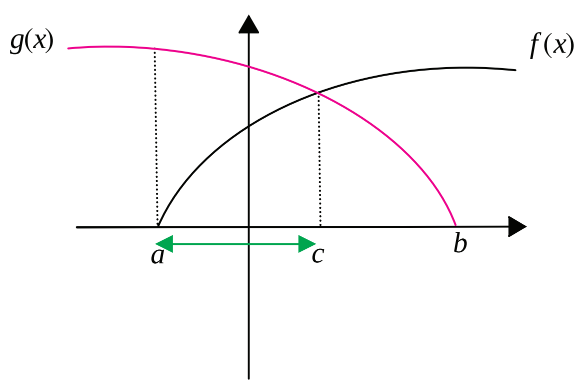
۲ــ مجموعهٔ نقاط x که در آن نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می‌گیرد را مشخص کنید.

۳ــ مجموعه نقاط بند (۲) با نقاط بند (۱) چه رابطه‌ای دارند؟



یک نامعادلهٔ دلخواه را می‌توان به شکل $f(x) < g(x)$ نوشت که f و g دو تابع می‌باشند. در حالت کلی حل جبری چنین نامعادله‌ای ممکن است بسیار پیچیده و حتی ناممکن باشد. اما اگر بتوانیم نمودارهای این توابع را رسم کنیم، مجموعه جواب این نامعادله دقیقاً برابر مجموعه نقاطی مانند x است که در این نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می‌گیرد.

برای مشخص کردن مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x) < g(x)$ پس از رسم توابع f و g مقادیری از دامنه مشترک دو تابع را مشخص می‌کنیم که عرض نقاط نمودار تابع f از عرض نقاط نمودار تابع g کمتر باشد. در شکل زیر دامنهٔ مشترک دو تابع $[a, b]$ می‌باشد. فقط در بازهٔ (a, c) ، عرض نقاط نمودار f از عرض نقاط نمودار g کمتر است، پس جواب نامعادله بازهٔ (a, c) می‌باشد.



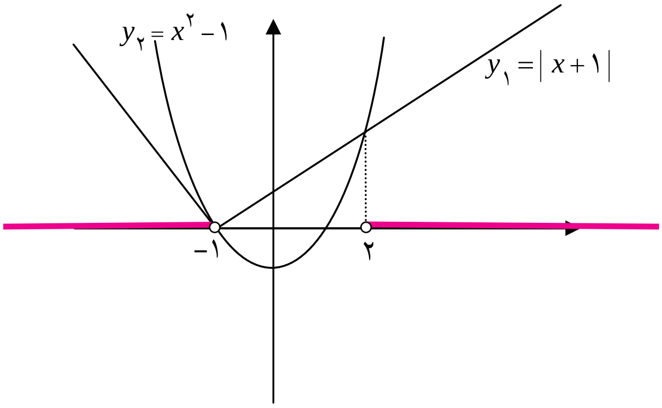
مثال

نامعادلهٔ $|x+۱| < x^۲ - ۱$ را با استفاده از روش نموداری (هندسی) حل می‌کنیم.

نمودار توابع $y_۱ = |x+۱|$ و $y_۲ = x^۲ - ۱$ را رسم می‌کنیم.

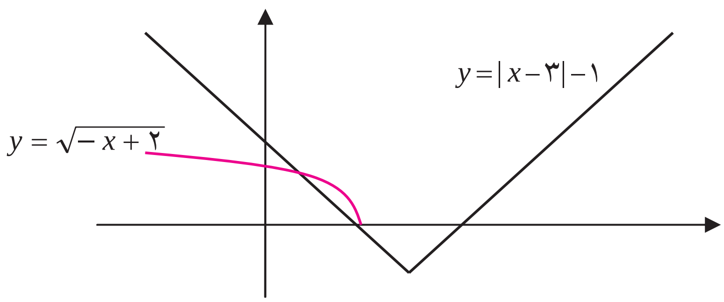
باید مجموعه نقاطی را تعیین کنیم که در آن نقاط نمودار $y_۱$ زیر نمودار $y_۲$ واقع شده باشد.

اجتماع دو بازه $(-\infty, -۱)$ و $(۲, \infty)$ مجموعه جواب نامعادله است.



تمرین در کلاس

با توجه به نمودارهای رسم شده، نامعادلهٔ $\sqrt{-x+۲} \geq |x-۳| - ۱$ را حل کنید.



مسائل

نامعادلات زیر را با روش جبری حل کنید.

۱) $x^۳ - ۲x^۲ + x \geq ۰$

۲) $\frac{۲x-۱}{x} > ۱$

۳) $\frac{x+۱}{x} - \frac{x}{x-۱} \leq ۲$

۴) $|x-۲| \leq x$

نامعادلات زیر را با روش هندسی حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را مشخص کنید.

۵) $x^۲ \leq ۲^x$

۶) $\sqrt{x-۱} < |x-۱|$

۷) $\frac{۱}{x} < \sqrt{x}$

نامعادلات زیر را با روش هندسی و جبری حل کنید.

۸) $x+۱ < |x|$

۹) $|x^۲ - ۱| \leq |x+۱|$

۱۰) $|x| + |x-۱| \leq ۵$