

فصل

۴

عددهای تقریبی



تقریب زدن - قطع کردن

نگاه کلی به درس اول

دانش‌آموزان می‌آموزند که در زندگی روزمره و متناسب با موضوعاتی که سروکار داریم در صورت نیاز از عددهای تقریبی به‌جای مقدارهای واقعی و دقیق استفاده می‌کند. آنان باید در انتخاب دقت تقریب مهارت پیدا می‌کند به طوری که نتیجه عمل، همان دقتی را داشته باشد که لازم دارند. در این درس تقریب زدن اعداد به روش قطع کردن را می‌آموزند و نماد عدد پی را می‌شناسد و از مقدار عدد پی با تقریب‌های مختلف در محاسبه مسئله‌های ریاضی استفاده می‌کند.

اهداف درس اول

- لزوم تقریب زدن و تقریب مناسب را در شرایط و موقعیت‌های مختلف درک کنند و تشخیص بدهد.
- با استفاده از عبارت «با تقریب کمتر از...» تقریب مورد نظر را بیان کند.
- با استفاده از روش قطع کردن مقدار تقریبی اعداد را پیدا کند.

توصیه‌های آموزشی

- در بسیاری از زمان‌ها نیازی به بیان دقیق مقدار پدیده‌ها نیست بنابراین می‌توانیم از تقریب استفاده کنیم.
- هر فردی در اندازه‌گیری باید با توجه به صرف زمان و هزینه مناسب دقت مورد نیاز خود را مشخص کند. اگر دقت اندازه‌گیری را بالا ببریم زمان و هزینه اندازه‌گیری نیز زیاد خواهد شد و اگر دقت اندازه‌گیری را کم کند از ارزش اندازه‌گیری کاسته خواهد شد.
- وقتی با مقدار تقریبی سر و کار داریم اعداد $2/4$ یا $2/40$ یا $2/200$ با 200 فرق دارد.
- وقتی می‌گوییم با تقریب کمتر از 1° بدین معناست که این عدد با مقدار واقعی کمتر از 1° واحد اختلاف دارد.

ورود به مطلب

در ابتدای کلاس با یک متر وارد شوید و از دانش‌آموزان بخواهید به کمک متر قد خود را اندازه‌گیری کنند. هدف اصلی این قسمت، آشنا کردن دانش‌آموزان با این نکته است که در بسیاری از زمان‌ها نیازی به بیان دقیق مقدار پدیده‌ها نیست. پس از بیان مثال‌های کتاب و بحث درباره آنها، از دانش‌آموزان بخواهید مثال‌های دیگری از زندگی روزمره خود در این باره بیان کنند. سعی کنید در هر یک از مثال‌ها مشخص کنید تا چه دقتی لازم است که پدیده مورد بررسی قرار گیرد و از دانش‌آموزان بخواهید این موضوع را توضیح دهند. آنان باید به این مطلب پی ببرند که اگر دقت اندازه‌گیری را بالا ببرند زمان و هزینه اندازه‌گیری نیز زیاد خواهد شد. وقتی با مقدار تقریبی سر و کار داریم $2/4$ یا $2/40$ یا $2/200$ با 200 فرق دارد. وقتی می‌گوییم با تقریب کمتر از 1° بدین معناست که این عدد با مقدار واقعی کمتر از 1° واحد اختلاف دارد.

هر کدام از ابزارهای اندازه‌گیری تا حدودی می‌توانند عددهای دقیق را بیان کنند. برای مثال، دقت خط‌کشی که فقط واحدهای سانتی‌متر را دارد 1 سانتی‌متر است؛ یعنی این خط‌کش کمتر از یک سانتی‌متر را مشخص نمی‌کند. برای اندازه‌گیری دقیق‌تر طول، با توجه به واحد می‌توانیم آن را به قسمت‌های کوچکتر تقسیم کنیم. به‌طور مثال 1 سانتی‌متر برابر 10 میلی‌متر است پس هر سانتی‌متر را می‌توانیم به 10 تا میلی‌متر تقسیم کنیم.

توصیه‌های آموزشی

- برای آموزش تقریب زدن می‌توان از مفهوم تخمین زدن که دانش‌آموزان با آن آشنا هستند، بهره برد.
- برای محاسبه حاصل ضرب تقریبی دو عدد، می‌تواند اعداد را تقریب بزند.
- در بررسی نمونه‌های تمرین‌های کتاب می‌توانید در مورد علت انتخاب و دقت اندازه‌گیری بحث مختصری در کلاس طرح کنید.

فعالیت



فعالیت‌های زیر جهت افزایش مهارت در دانش‌آموزان توصیه می‌شود.

- دانش‌آموزان با مقایسه انواع خط‌کش‌ها و بررسی واحدهای آن به این مطلب پی خواهند برد که: واحد خط‌کش، سانتی‌متر است، دقت خط‌کشی که فقط واحدهای سانتی‌متر را دارد 1 سانتی‌متر است؛ یعنی این خط‌کش کمتر از یک سانتی‌متر را مشخص نمی‌کند. اما اگر هر واحد سانتی‌متر آن به 10 قسمت (میلی‌متر) یک میلی‌متری تقسیم شده است، دقت خط‌کشی که میلی‌متر دارد 1 میلی‌متر است؛ یعنی این خط‌کش کمتر از یک میلی‌متر را مشخص نمی‌کند.

تقریب زدن به روش قطع کردن

در روش قطع کردن، به جای رقم‌هایی که برای ما در تقریب زدن ارزش زیادی ندارند صفر می‌گذاریم. می‌توانید کلاس را با یک بازی به نحو زیر آغاز کنید. ۷ نفر دور هم بایستند. یکی بازی را شروع کند. عددی بزرگتر از ۱۰۰۰ را بگوید. نفر بعدی با حذف خورده‌های کوچکتر از ۱۰۰۰ عدد را تکرار کند و یک عدد جدید بگوید و بازی ادامه یابد. هر نفر که اشتباه کرد از دور بازی خارج می‌شود.

توجه داشته باشید که اگر بتوانید جمله مثلاً (با تقریب کمتر از 10^1) را در کلاس به بحث بگذارید و روشن کنید. بسیاری از نکته‌های بعدی درس نیز روشن خواهد شد. اگر دانش‌آموزان درک کنند که وقتی با تقریب کمتر از 10^1 عددی را بیان کند، بدین معناست که این عدد با عدد واقعی کمتر از 10^1 واحد تفاوت دارد و در عدد تقریبی رقم‌های کمتر از 10^1 بیان نمی‌شود. بعد از این بحث از دانش‌آموزان بخواهید به سؤالات این درس پاسخ دهند.

توصیه‌های آموزشی

– هدف این قسمت پیدا کردن دستورالعملی مناسب برای تقریب زدن عددها به روش قطع کردن است. بنابراین بعد از حل دانش‌آموزان، از آنها بخواهید جواب به دست آمده را تفسیر کنند.

موارد زیر جهت افزایش مهارت در دانش‌آموزان توصیه می‌شود.

- ۱– برای اندازه‌گیری با توجه به موضوع و اهمیت آن از تقریب‌های مختلفی استفاده می‌کنیم.
- ۲– در بیان تقریب حتماً واحد را مشخص کنید. (به طور مثال: کیلوگرم یا گرم)
- ۳– با استفاده از عبارت «با تقریب کمتر از...» تقریب مورد نظر را بیان کنید.
- ۴– به جای معمولاً عددهای 10^1 ، 10^2 ، 10^3 و یا 10^1 ، 10^2 ، 10^3 را می‌نویسیم.
- ۵– برای مثال وقتی می‌گوییم با تقریب کمتر از 10^1 یعنی رقم‌های کمتر از دهگان ارزش زیادی ندارند و نیاز به بیان آنها نیست. به این ترتیب رقم‌های یکان، دهم، صدم، هزارم و ... حذف و به جای آنها صفر قرار می‌دهیم.
- ۶– به این روش تقریب زدن (همانند مراحل بالا) روش قطع کردن می‌گوییم. یعنی به جای رقم‌هایی که برای ما در تقریب زدن ارزش زیادی ندارند صفر می‌گذاریم.

فعالیت

فعالیت زیر جهت افزایش مهارت در دانش‌آموزان توصیه می‌شود
(هر کسر را می‌توان به صورت یک تقسیم نوشت)



این فعالیت از سه مرحله تشکیل می‌شود که به شرح زیر می‌باشد:

مرحله اول:

- ۱– پاره خطی را به عنوان واحد انتخاب کنید. مثلاً پاره خطی به طول ۴ سانتی‌متر را به عنوان واحد انتخاب کنید. (دست‌ورز)

۲- دانش‌آموزان را گروه‌بندی کنید.

۳- هر گروه دو نوار کاغذی هم اندازه به طول ۳ واحد (مثلاً $۱۲ = ۳ \times ۴$) تهیه کنند.

۴- می‌خواهیم مقدار $\frac{۳}{۴}$ را روی نوار اول نمایش دهیم.

۵- پاره خط واحد را روی نوار شماره ۱ قرار دهید و اندازه یک واحد را مشخص کنید.

۶- واحد را به چهار قسمت مساوی (برابرمخرج کسر) تقسیم کنید.

۷- به اندازه $\frac{۳}{۴}$ یعنی ۳ قسمت از ۴ قسمت یک واحد جلو بروید و کسر $\frac{۳}{۴}$ را نشان دهید.

۸- می‌خواهیم مقدار $۳ \div ۴$ را روی نوار دوم نشان دهیم.

۹- اندازه نوار به مقدار ۳ واحد است. برای راحتی کار به جای این که ۳ واحد را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنید می‌توانید

ابتدا ۳ واحد را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید، سپس هر قسمت را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید تا ۳ واحد به ۴ قسمت مساوی تقسیم شود.

۱۰- با توجه به مورد شماره ۹، ۳ واحد را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید.

۱۱- سپس هر قسمت را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم تا ۳ واحد به ۴ قسمت مساوی تقسیم شود.

۱۲- اولین قسمت روی نوار نمایش تقسیم $۳ \div ۴$ است.

۱۳- حالا گروه‌ها دو نوار کاغذی را با یکدیگر مقایسه کنند.

۱۴- مقدار $\frac{۳}{۴}$ (اندازه طول مشخص شده در نوار ۱) با مقدار $۳ \div ۴$ (اندازه طول مشخص شده در نوار ۲) برابر است.

۱۵- بنابراین این دو مقدار با هم برابر هستند، یعنی $\frac{۳}{۴} = ۳ \div ۴$

۱۶- به کمک شکل و محور اعداد مراحل بالا را انجام دهند و نتیجه را بیان کنند. (تصویری)

۱۷- نحوه انجام مراحل بالا را توضیح دهند. (کلامی) توضیح دادن باعث افزایش قدرت ارتباط کلامی در دانش‌آموزان

می‌شود و توانایی استدلال آنها را بالا می‌برد.

هر دانش‌آموز باید فعالیت‌های دست‌ورز، تصویری و کلامی را انجام دهد تا به سطح مورد نظر برسد.

مرحله دوم:

۱- محور اعداد را رسم کنید. هر واحد محور را برابر واحد فعالیت ۱ قرارداد کنید.

۲- روی محور ۳ واحد را مشخص کنید.

۳- برای راحتی کار به جای این که ۳ واحد را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنید می‌توانید ابتدا ۳ واحد را به دو قسمت مساوی

تقسیم کنید، سپس هر قسمت را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید تا ۳ واحد به ۴ قسمت مساوی تقسیم شود.

۴- با توجه به مورد شماره ۳، ۳ واحد را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید، نقطه وسط این ۳ واحد $\frac{۶}{۴}$ است.

۵- سپس هر قسمت را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم تا ۳ واحد به ۴ قسمت مساوی تقسیم شود.

۶- اولین قسمت روی نقطه $\frac{۳}{۴}$ قرار دارد.

مرحله سوم:

۱- در هر دو فعالیت (فعالیت ۱ و ۲) واحد را یکسان انتخاب کردیم.

۲- در فعالیت ۱ مقدار کسر $\frac{۳}{۴}$ را روی محور اعداد نشان دادیم.

۳- در فعالیت ۲ مقدار تقسیم $(۳ \div ۴)$ را روی محور اعداد نشان دادیم.

- ۴- با مقایسه و انطباق دو محور متوجه می شوید که هر دو مقدار ($\frac{3}{4}$ و $3 \div 4$)، روی یک نقطه از محور اعداد قرار دارند.
- ۵- بنابراین این دو مقدار با هم برابر هستند، یعنی $\frac{3}{4} = 3 \div 4$.
- ۶- نتیجه می گیریم که: هر کسر را می توان به صورت یک تقسیم نوشت.
- ۷- حالا عملیات تقسیم را انجام می دهیم.
- ۸- با تقسیم صورت بر مخرج هر کسر می توان آن را به صورت یک عدد اعشاری نشان داد.
- ۹- با پیشروی در تقسیم می توانیم حاصل تقسیم را دقیق تر بیان کنیم.
- ۱۰- وقتی می گوئیم تقسیم را تا یک رقم اعشار ادامه دهید، یعنی حاصل تقسیم را با تقریب کمتر از $\frac{1}{10}$ نشان دهید.
- ۱۱- وقتی می گوئیم تقسیم را تا دو رقم، سه رقم یا ... اعشار ادامه دهید، یعنی حاصل تقسیم را با تقریب کمتر از $\frac{1}{100}$ یا ... نشان دهید.
- ۱۲- بنابراین نتیجه می گیریم که با پیشروی در تقسیم می توان حاصل تقسیم را تا مقدار مورد نظر تقریب (تعداد اعشار در خارج قسمت) محاسبه کرد و به صورت عدد اعشاری نوشت.
- ۱۳- با توجه به مورد ۶ و ۱۲ نتیجه می گیریم که: هر کسر را می توان به صورت یک تقسیم و هر تقسیم را می توان به صورت یک عدد اعشاری نوشت بنابراین هر کسر را می توان به صورت یک عدد اعشاری نوشت.

توصیه های آموزشی

- می دانیم که هر کسر را می توان به صورت یک تقسیم نوشت بنابراین عملیات تقسیم را انجام دهید.
- با تقسیم صورت بر مخرج هر کسر می توان آن را به صورت یک عدد اعشاری نشان داد.
- با پیشروی در تقسیم می توانیم حاصل تقسیم را دقیق تر بیان کنیم.
- وقتی می گوئیم تقسیم را تا یک رقم اعشار ادامه دهید، یعنی حاصل تقسیم را با تقریب کمتر از $\frac{1}{10}$ نشان دهید.
- وقتی می گوئیم تقسیم را تا دو رقم، سه رقم یا ... اعشار ادامه دهید، یعنی حاصل تقسیم را با تقریب کمتر از $\frac{1}{100}$ یا ... نشان دهید.
- بنابراین نتیجه می گیریم که با پیشروی در تقسیم می توان حاصل تقسیم را تا مقدار مورد نظر تقریب (تعداد اعشار در خارج قسمت) محاسبه کرد و به صورت عدد اعشاری نوشت.

توصیه های آموزشی

- توصیه می شود از دانش آموزان بخواهید که به کمک ابزار ماشین حساب حاصل تقسیم را به دست آورند.
- در تمرین های این درس بحث مقدار تقریبی عدد بی مطرح شده است که بیان این مطلب برای دانش آموزان جالب خواهد بود که در حقیقت هیچ کسری را نمی توان یافت که کاملاً برابر عدد بی باشد.
- یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان این است که بعد از حذف رقم های کمتر از مقدار تقریب به جای آن صفر نمی گذارند. در صورت دیدن چنین اشتباهی در کلاس آن را برای همه دانش آموزان توضیح دهید.

تقریب زدن - گرد کردن

نگاه کلی به درس دوم

در این درس دانش‌آموزان در انتخاب دقت تقریب مهارت پیدا می‌کنند به طوری که، نتیجه عمل، همان دقتی را داشته باشد که لازم دارد. آنان تقریب زدن اعداد به روش گرد کردن را به درستی انجام می‌دهند. روش گرد کردن را روی جدول ارزش مکانی و محور اعداد توضیح می‌دهند و می‌آموزند که در تقریب به روش گرد کردن، گاهی به جای حذف مقدار کمتر از تقریب بهتر است مقداری را به آن اضافه کنند تا جواب نزدیک‌تر و با خطای کمتری به دست آید.

اهداف درس دوم

- لزوم تقریب زدن و تقریب مناسب را در شرایط و موقعیت‌های مختلف درک کنند و تشخیص بدهد.
- با استفاده از عبارت «با تقریب کمتر از...» تقریب مورد نظر را بیان کند.
- با استفاده از روش گرد کردن مقدار تقریبی اعداد را پیدا کند.
- تفاوت تقریب زدن به روش قطع کردن و گرد کردن را بیان کند.

ورود به مطلب

از دانش‌آموزان بخواهید عددهای ۴۹۹۹۹، ۳۹۹۹۹، ۲۹۹۹۹ و... را با تقریب کمتر از ۱۰۰۰۰ قطع کنند سپس نظر آنها را در مورد جواب‌هایی که به دست آورده‌اند پیرسید و این موضوع را به بحث بگذارید. ممکن است در این بحث روش گرد کردن توسط دانش‌آموزان مطرح شود که شروع خوبی برای درس خواهد بود. پس از بحث و بررسی روش گرد کردن را یک بار توضیح دهید. محدوده تقریب را مشخص کنید و از آنها بخواهید مشخص کنند که به کدام عدد نزدیک‌تر است و آن را به عنوان جواب معرفی کنید. در تقریب به روش گرد کردن اگر نخستین عدد از عددهایی که حذف می‌کنیم، بیشتر از ۵ باشد، باید به آخرین رقمی که حذف نکرده‌ایم، یک واحد اضافه کنیم. در تقریب به روش گرد کردن اگر نخستین رقم از رقم‌های حذف شده کمتر از ۵ باشد، رقم‌های باقی‌مانده را دست نمی‌زنیم. اگر بخواهیم با حذف رقم ۵ (وقتی بعد از آن رقم دیگری وجود ندارد) عددی را گرد کنیم، می‌توانیم رقم ۵ را بدون تغییر در رقم قبلی حذف کرد و می‌توان، بعد از حذف آن، به رقم قبلی یک واحد اضافه کرد. برای اینکه در استفاده از عددهای تقریبی خطای کمتری کنیم، از روش گرد کردن استفاده می‌کنیم. در این روش (گرد کردن) با توجه به تقریب مورد نظر عدد تقریبی را انتخاب می‌کنیم که به مقدار واقعی نزدیک‌تر باشد.

توصیه‌های آموزشی

- برای مفهوم‌سازی و افزایش مهارت در دانش‌آموزان از آنها خواسته شود عدد را قبل و بعد از تقریب روی محور اعداد نشان دهند و محل عددها را قبل و بعد از تقریب با هم مقایسه کنند.
- یکی از نکته‌های جالب تمرین‌های این درس تقویت مهارت جدول خوانی و تشکیل جدول است بنابراین سعی کنید خود دانش‌آموزان نحوه جدول خوانی و تشکیل جدول را کشف کنند.
- برای افزایش مهارت تقریب زدن و مقایسه روش‌های قطع کردن و گرد کردن پیشنهاد می‌شود که عددهای تقریبی را روی محور اعداد نشان دهند تا بهتر بتوانند فاصله آنها را با مقدار واقعی بهتر درک کنند و تفاوت بین روش گرد کردن و قطع کردن را درک کنند.
- در تمرین‌های صفحه ۶۶ از دانش‌آموزان خواسته شده است که مشخص کنند مقدار واقعی، عدد تقریبی بین چه عددهایی است. برای درک بهتر و پاسخ‌گویی صحیح‌تر پیشنهاد می‌شود از محور اعداد استفاده شود.

فعالیت



فعالیت‌های زیر جهت افزایش مهارت در دانش‌آموزان توصیه می‌شود.

- می‌توانید به کمک سیم و توپ و سیله‌ای همانند شکل کتاب درست کنید تا دانش‌آموزان با قرار دادن توپ در قسمت‌های مناسب و حرکت توپ‌ها به سمت عددها به درک بهتری از مفهوم گرد کردن برسند. (دست‌ورز)
- دانش‌آموزان با استفاده از تصویر و توجه به محل قرار گرفتن توپ‌ها و همچنین حرکت توپ‌ها به سمت عددها، به درک تصویری مفهوم گرد کردن برسند. (تصویری)
- دانش‌آموزان با توضیح دادن درباره محل قرار گرفتن توپ‌ها و حرکت توپ‌ها به سمت عددها به مفهوم گرد کردن برسند. (کلامی)

موارد زیر جهت افزایش مهارت تقریب زدن به روش گرد کردن در دانش آموزان توصیه می شود.

- ۱- در روش گرد کردن باید به مقادیری که از تقریب مورد نظر کمترند، توجه کنیم.
- ۲- با توجه به مقدار تقریب باید مشخص کنیم که عدد مورد نظر بین کدام دو عدد قرار دارد.
- ۳- در جدول ارزش مکانی، وقتی مقدار تقریب کمتر از 10^0 مورد نظر است، یعنی از رقم های یکان، دهم، صدم و ... صرف نظر می شود.
- ۴- با توجه به تقریب مورد نظر عدد تقریبی را انتخاب می کنیم که به مقدار واقعی نزدیکتر باشد یعنی مقدار خطای (اختلاف با عدد واقعی) آن کمتر باشد.
- ۵- در تقریب به روش گرد کردن اگر نخستین عدد از عددهایی که حذف می کنیم، بیشتر از ۵ باشد، باید به آخرین رقمی که حذف نکرده ایم، یک واحد اضافه کنیم.
- ۶- در تقریب به روش گرد کردن اگر نخستین رقم از رقم های حذف شده کمتر از ۵ باشد، رقم های باقی مانده را دست نمی زنیم.
- ۷- اگر بخواهیم با حذف رقم ۵ (وقتی بعد از آن رقم دیگری وجود ندارد) عددی را گرد کنیم، می توانیم رقم ۵ را بدون تغییر در رقم قبلی حذف کرد و می توان، بعد از حذف آن، به رقم قبلی یک واحد اضافه کرد.

حل مسئله:

راهبرد حل مسئله ساده‌تر

نگاه کلی

استفاده از عددهای صحیح به جای عددهای گویا (کسری - اعشاری) باعث ساده‌تر شدن مسئله و درک بهتر آن می‌شود. حل مسئله در تعداد حالت‌های کمتر باعث سریع‌تر پیدا کردن الگوی مناسب حل مسئله و ارتباط آن به مسئله اصلی می‌گردد. بعضی از مسئله‌ها به نظر می‌رسد، ظاهری دشوار و پیچیده دارند اما اگر مسئله را ساده کنیم و یا در حالت خاص یا ساده شده به بررسی آن بپردازیم، راه حل مسئله آشکار می‌شود. یکی از روش‌های ساده کردن مسئله استفاده از عددهای صحیح یا تقریبی به جای کسری و اعشاری است. گاهی اوقات حل مسئله در حالت کلی یا با اعداد بزرگ و غیر معقول، ناممکن به نظر می‌رسد، در این صورت بهتر است مسئله در تعداد حالت‌های کمتر حل شود و با یک الگویابی این مسئله ساده شده را به مسئله اصلی مرتبط کرد.

- آشنایی دانش‌آموزان با راهبرد حل مسئله ساده‌تر.
- درک کاربرد راهبرد حل مسئله ساده‌تر و توانایی به کارگیری آن در حل مسئله.

اهداف

توصیه‌های آموزشی

- در حل بعضی از مسئله‌های ریاضی، راهبرد حل مسئله ساده‌تر می‌تواند حل مسئله را راحت‌تر کند.
- معلم بایستی راهبرد حل مسئله ساده‌تر را همراه با حل مسئله به کمک دانش‌آموزان توضیح دهد. سپس با حل مسائل متنوع و با استفاده از این راهبرد، دانش‌آموزان توانایی به کارگیری از آن را در حل مسائل می‌آموزند.
- برای حل مسئله با راهبرد حل مسئله ساده‌تر بهتر است مراحل فهمیدن مسئله - انتخاب راهبرد - حل مسئله - بازگشت به عقب را طی کنید.

مراحل زیر جهت افزایش مهارت در دانش‌آموزان توصیه می‌شود.

سؤال: در یک کارخانه لوله‌هایی به طول $5\frac{1}{4}$ متر تولید می‌شود. این کارخانه هر روز ۲۴۸ لوله تولید می‌کند. در هر روز

چند متر لوله تولید می‌شود؟

مراحل پاسخ پیشنهادی

فهمیدن مسئله:

۱- داده‌های مسئله کدام‌اند؟

در یک کارخانه لوله‌هایی به طول $5\frac{1}{4}$ متر تولید می‌شود. این کارخانه هر روز ۲۴۸ لوله تولید می‌کند.

۲- مسئله چه چیزی را از شما خواسته است؟

در هر روز چند متر لوله تولید می‌شود؟

۳- مسئله را خلاصه کنید.

طول لوله‌ها = $5\frac{1}{4}$ متر؛ تولید هر روز کارخانه = ۲۴۸ لوله؛ مقدار تولید روزانه لوله به متر =

انتخاب راهبرد: برای این که مسئله را راحت‌تر درک کنیم و راه حل آن را بیابیم، آن را با عددهای دیگر ساده می‌کنیم.

پاسخ پیشنهادی: در یک کارخانه لوله‌هایی به طول ۵ متر تولید می‌شود. این کارخانه هر روز ۲۰۰ لوله تولید می‌کند. در هر

روز چند متر لوله تولید می‌شود؟

حل مسئله: مسئله ساده شده بالا به صورت زیر حل می‌شود.

پاسخ پیشنهادی:

مقدار تولید لوله در یک روز = $200 \times 5 = 1000$ متر

حالا مسئله اصلی را حل کنید.

پاسخ پیشنهادی:

$$248 \times 5\frac{1}{4} = 248 \times \frac{21}{4} = \frac{5208}{4} = 1302 \text{ متر است.}$$

بازگشت به عقب: عملیات ضرب عدد مخلوط را کنترل کنید.

مراحل زیر جهت افزایش مهارت در دانش آموزان توصیه می‌شود.

سؤال: اگر علی درست وسط یک صف ایستاده و از اول صف نفر ۲۴۷ باشد، تعداد نفرات این صف چند نفر است؟

مراحل پاسخ پیشنهادی:

فهمیدن مسئله: بین علی و تعداد نفرات ایستاده در صف چه رابطه‌ای وجود دارد؟

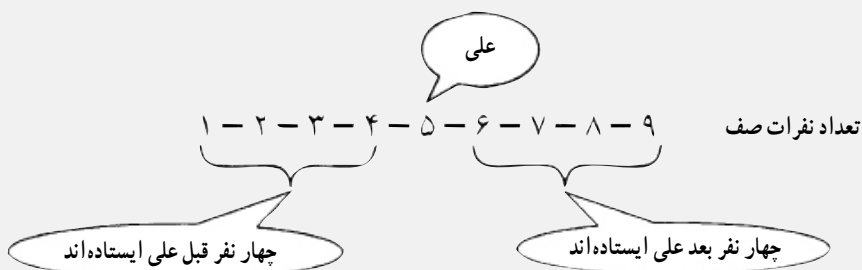
پاسخ پیشنهادی: علی وسط صف ایستاده است؛ پس تعداد افرادی که قبل از علی در صف ایستاده‌اند با تعداد افرادی که بعد

از علی در صف ایستاده‌اند، برابر است.

انتخاب راهبرد: نوشتن تمام افراد تا ۲۴۷ نفر کمی طولانی است. برای این که رابطه بین علی و تعداد نفرات ایستاده در صف

را متوجه شویم، تعداد آنها را کمتر می‌کنیم.

مسئله ساده‌تر: اگر علی درست وسط یک صف ایستاده و از اول صف نفر ۵ باشد، تعداد نفرات این صف چند نفر است؟



حل مسئله: تعداد نفرات این صف را به دست آورید. در راه حل این تمرین چه الگویی وجود دارد؟

روش اول پیشنهادی :

علی

$$4 + 4 + 1 = (2 \times 4) + 1 = 9 \text{ نفر}$$

علی

$$4 + 4 + 1 = (2 \times 4) + 1 = 9$$

چهار نفر بعد علی ایستاده اند

چهار نفر قبل علی ایستاده اند

روش دوم پیشنهادی :

علی

$$5 + 5 - 1 = (2 \times 5) - 1 = 9 \text{ نفر}$$

علی

$$5 + 5 - 1 = (2 \times 5) - 1 = 9$$

علی نفر پنجم از ابتدای صف است.

علی نفر پنجم از انتهای صف است.

پاسخ پیشنهادی :

روش اول : تعداد نفراتی که قبل از علی در صف ایستاده اند برابر ۴ نفر ($5-1=4$) است. تعداد نفراتی که بعد از علی در صف ایستاده اند نیز برابر ۴ نفر است. پس ابتدا تعداد نفراتی را که در صف، قبل و بعد از علی ایستاده اند را محاسبه می کنیم، سپس حاصل را با ۱ (علی) جمع می کنیم.

روش دوم : علی از ابتدای صف نفر پنجم است. علی از انتهای صف نیز نفر پنجم است. اگر این دو مقدار را با هم جمع کنیم، علی دو بار محاسبه می شود، بنابراین باید از حاصل ۱ (علی) کم کنیم.

همین الگو را برای مسئله اصلی به کار ببرید. تعداد نفرات این صف را به دست آورید.

روش اول : $246 + 246 + 1 = (2 \times 246) + 1 = 493$ نفر

روش دوم : $247 + 247 - 1 = (2 \times 247) - 1 = 493$ نفر

باز گشت به عقب : آیا می توان الگوی محاسبه تعداد نفرات این صف را برای تعداد نفرات بیشتر به کار برد؟

پاسخ پیشنهادی : بله، در صورتی که تعداد نفرات ایستاده در صف فرد باشد.

نمایش عددهای تقریبی روی محور

نگاه کلی به درس سوم

در این درس دانش‌آموزان مقایسهٔ انجام محاسبات تقریبی به دو روش (تقریب زدن و سپس انجام عملیات یا انجام عملیات و سپس تقریب زدن) را می‌آموزند به درک مقدار خطای تقریب در محاسبات تقریبی جمع کسرها پی می‌برند و پس از مشاهده و درک مقدار خطای تقریب در محاسبات تقریبی به کمک شکل (طولی - مساحتی) آن مقدار را محاسبه می‌کنند.

اهداف درس سوم

- نمایش تقریبی عددهای کسری روی محور اعداد
- انجام محاسبات تقریبی (به دو روش)
- محاسبهٔ خطای تقریب در محاسبات ریاضی

ورود به مطلب

از دانش‌آموزان بخواهید محورهای عددها را با واحدهای ۱ و ۱۰ و ۱۰۰ و $\frac{1}{10}$ رسم کنند. سپس برای هر محور عددی متناسب با آنها را به دانش‌آموزان معرفی کنید و از آنها بخواهید محلی مناسب برای هر کدام از عددهای پیشنهادی شما روی محور خود مشخص کنند. سپس نزدیکترین نقطه مشخص شده روی محور به عدد مورد نظر را اعلام نمایند.

برای نمایش کسر کوچکتر از واحد روی محور اعداد ابتدا باید کسر را به عدد اعشاری (به کمک تقسیم صورت بر مخرج کسر) تبدیل کرد و پس از تقسیم صورت بر مخرج کسر مقدار عدد تقریبی با تقریب کمتر از $\frac{1}{10}$ و به روش قطع کردن را محاسبه کنند.

توصیه‌های آموزشی

– در هنگام محاسبه مقدار تقریبی کسرها استفاده از ماشین حساب مفید است؛ چون هدف تقویت مهارت تقسیم کردن نیست بلکه هدف اصلی تعیین مقدار تقریبی عدد به دست آمده از تقسیم است.

– محاسبه تقریبی می‌تواند تصور خوبی از حدود پاسخ عملیات ریاضی را مشخص کند.

– چون در صورت تمرین عنوان شده است که حاصل تقسیم را تا یک رقم اعشار محاسبه کنید پس مقدار تقریب کمتر از $\frac{1}{10}$ است. برای درک این مطلب توصیه می‌شود تمرین‌های متنوع انجام شود.

– چون در تمرین عنوان شده است که حاصل تقسیم را تا یک رقم اعشار محاسبه کنید بنابراین پس از قرار گرفتن یک رقم اعشار در خارج قسمت نیازی به ادامه تقسیم نیست. برای درک این مطلب از دانش‌آموزان می‌خواهیم تقسیم را انجام دهند و در مورد علت این موضوع بحث و تبادل نظر کنند

موارد زیر جهت افزایش مهارت در دانش‌آموزان توصیه می‌شود.

برای نشان دادن عدد مخلوط تقریبی روی محور اعداد پیشنهاد می‌شود مراحل زیر را انجام دهید :

۱- عدد مخلوط را به صورت عدد اعشاری بنویسد. (با تقسیم صورت بر مخرج کسر)

۲- عدد اعشاری را با تقریب مورد نظر به صورت عدد اعشاری تقریبی بنویسد.

۳- عدد اعشاری تقریبی را به صورت کسر اعشاری تقریبی بنویسد.

۴- کسر تقریبی اعشاری را به صورت عدد مخلوط تقریبی بنویسد.

۵- محور را به توجه به واحد تقسیم‌بندی کرده و عدد را روی محور اعداد نشان دهند.

مفهوم‌سازی مقدار خطای تقریب در محاسبات تقریبی جمع عددها و جمع کسرها

طول کل پاره خط را محاسبه کردیم، سپس با تقریب کمتر از ۱ و به روش قطع کردن اندازه طول کل پاره خط را تقریب زدیم که برابر 20 سانتی‌متر شد. اندازه طول هر پاره خط (قرمز- آبی) را با تقریب کمتر از ۱ و به روش قطع کردن تقریب زدیم که این کار باعث شد طول هر پاره خط با مقدار واقعی کمی اختلاف داشته باشد. پس از تقریب طول هر پاره خط را به صورت عدد کسری نمایش دادیم. وقتی اندازه دو پاره خط را پس از تقریب زدیم، با هم جمع کردیم مقدار خطای تقریب هر دو با هم جمع شد و عدد حاصل کمی از اندازه واقعی کمتر شد. بنابراین یک بار اندازه طول پاره خط قرمز و بار دیگر اندازه طول پاره خط آبی را تقریب زده‌ایم پس زمانی که این دو پاره خط را با هم جمع می‌کنیم فاصله آنها تا اندازه واقعی به علت تأثیر مقدار خطای تقریب هر دو در محاسبه کمی بیشتر می‌شود.

عدد $\frac{4}{25}$ را با تقریب کمتر از ۱ و به روش گرد کردن برابر ۴ است. مقدار خطای تقریب برابر $\frac{4}{25}$ است. (این مقدار با توجه به میزان تقریب کم ارزش است) این عدد باید در ۴ ضرب شود زیرا می‌خواهیم بدانیم ۴ سطح چهار تایی برابر چند می‌شود. (۱۶ تا) چون عدد تقریبی ۴، در ۴ ضرب شده است بنابراین مقدار خطای تقریب نیز چهار برابر می‌شود. (این مقدار خطای تقریبی (۱ واحد) با توجه به میزان تقریب ارزش دارد.) پس اگر قبل از محاسبه عملیات ضرب مقداری را تقریب بزنیم و سپس حاصل را به دست آوریم مقدار خطای تقریب در محاسبات با هم جمع شده و حاصل تقریبی از عدد واقعی اختلاف پیدا می‌کند. با توجه به شکل و موارد بالا، حذف $\frac{4}{25}$ باعث می‌شود حاصل چهار برابر شدن تقریبی به اندازه ۱ واحد از مقدار واقعی کمتر شود.

توصیه‌های آموزشی

– استفاده از عددهای تقریبی می‌تواند تصور خوبی از پاسخ‌های عملیات مختلف بدهد. بنابراین توصیه می‌شود مراحل زیر را انجام دهید تا دانش‌آموزان به درک اختلاف حاصل عبارت تقریبی با مقدار واقعی بی‌بهرند. از دانش‌آموزان بخواهید ابتدا مقدار تقریب را مشخص کنند و هر عدد را با توجه به مقدار تقریب انتخابی تقریب بزنید و حاصل تقریبی عبارت ریاضی را با مقدار تقریب انتخابی محاسبه کنید. سپس پاسخ عبارت‌های ریاضی را با عددهای واقعی و بدون تقریب زدن، محاسبه کنید. پاسخ عبارت‌ها، با عددهای بدون تقریب (واقعی) را با پاسخ عبارت‌ها با عددهای تقریبی مقایسه کنید. در صورتی که جواب عملیات شما با عددهای بدون تقریب (واقعی) با پاسخ عددهای تقریبی به دست آمده فاصله زیادی دارد بهتر است دوباره راه حل خود را بررسی کنید. دلیل این اختلاف و اشکال خود را پیدا کنید.

فعالیت



فعالیت‌های زیر جهت افزایش مهارت در دانش‌آموزان توصیه می‌شود.

- ۱- طنابی به اندازه طول کل پاره خط $(\frac{2}{5}$ سانتی متر) تهیه کنید. (دست‌ورز)
- ۲- طنابی به اندازه طول کل پاره خط پس از تقریب $(\frac{2}{5}$ سانتی متر) تهیه کنید. (با تقریب کمتر از ۱ و به روش قطع کردن)
- ۳- با کنار هم قرار دادن طناب‌ها، اندازه طول واقعی کل پاره خط را با اندازه تقریبی آن مقایسه کنید.
- ۴- دو طناب به اندازه طول واقعی پاره خط قرمز و آبی $(\frac{7}{8}$ و $\frac{12}{7}$ سانتی متر) تهیه کنید.
- ۵- دو طناب به اندازه طول تقریبی (با تقریب کمتر از ۱ و به روش قطع کردن) پاره خط قرمز و آبی $(\frac{7}{8}$ و $\frac{12}{7}$ سانتی متر) تهیه کنید.
- ۶- با کنار هم قرار دادن طناب‌ها، اندازه طول واقعی دو طناب قرمز و آبی را با اندازه تقریبی آنها مقایسه کنید.
- ۷- با کنار هم قرار دادن طناب‌ها، اندازه طول واقعی پاره خط را با مجموع دو طناب قرمز و آبی با اندازه تقریبی مقایسه کنید و مقدار خطای تقریب را مشخص کنید.
- ۸- به کمک شکل و انجام مراحل بالا مقدار خطای تقریب را مشخص کنید. (تصویری)
- ۹- مراحل فعالیت بالا را توضیح دهید تا قدرت ارتباط کلامی و توانایی استدلال شما بالا رود و به مفهوم مورد نظر برسید. (کلامی)

محاسبه تقریبی و ترتیب انجام عملیات

نگاه کلی به درس چهارم

در این درس دانش آموزان استفاده به جا از روش های مختلف تقریب زدن را می آموزند و انجام محاسبات ریاضی را با توجه به ترتیب و اولویت عملیات ریاضی محاسبه می کنند.

اهداف درس چهارم

- درک بیشتر تقریب و کاربرد آن در محاسبات
- مقایسه روش های قطع کردن و گرد کردن و میزان خطای تقریب
- درک ترتیب و اولویت انجام محاسبات

ورود به مطلب

دانش آموزان با مفهوم تخمین زدن و تقریب زدن به دوروش گرد کردن و قطع کردن آشنا هستند. با محاسبات تقریبی با مقدار مشخص تقریب (مثلاً کمتر از ۱، ۱۰ و.....) آشنا هستند. برای محاسبه حاصل ضرب یا جمع تقریبی دو عدد، می‌توانند هر عدد یا حاصل را تقریب بزنند. محاسبه عملیات به روش گرد کردن دقیق تر از محاسبه عملیات به روش قطع کردن است. حاصل تقریب به روش گرد کردن به مقدار واقعی نزدیکتر است. روش گرد کردن خطای محاسبات را کاهش می‌دهد. برای این که مقدار خطای تقریب در محاسبات به روش قطع کردن کمتر شود، بهتر است مقدار تقریب را دقیق تر انتخاب کنیم. انجام عملیات با تقریب کمتر از ۱/۰٪ از تقریب کمتر از ۱/۰٪ به روش گرد کردن یا قطع کردن دقیق تر است.

توصیه‌های آموزشی

– در انجام محاسبات تقریبی باید مراقب بود که مقدار خطاهای عددهای تقریبی روی هم جمع نشود و فاصله عدد حاصل از مقدار واقعی اش بیش از حد زیاد نشود.

فعالیت

فعالیت‌های زیر جهت افزایش مهارت در دانش آموزان و محاسبه‌های تقریبی به روش گرد کردن و قطع کردن توصیه می‌شود



روش‌های پیشنهادی فعالیت جمع یا تفریق عددهای تقریبی :

- ۱- در روش اول هر عدد را با تقریب کمتر از ۱ و به روش گرد کردن تقریب می‌زنیم. بنابراین مقدار هر عدد تقریبی با مقدار واقعی کمی اختلاف دارد که این مقدار را خطای تقریب می‌نامیم.
- ۲- در روش اول عددهای تقریبی را با هم جمع می‌کنیم بنابراین چون این سه عدد یک بار تقریب خورده‌اند بنابراین در جمع کردن این سه عدد، مقدار خطای تقریب آنها نیز با هم جمع شده و حاصل عبارت با مقدار واقعی اختلاف پیدا می‌کنند. $(۲۸/۳۱ - ۲۷ = ۱/۳۱)$
- ۳- بنابراین در روش اول مقدار تقریبی هر عدد را با تقریب کمتر از ۱ و به روش گرد کردن محاسبه می‌کنیم سپس عددهای تقریبی را با هم جمع می‌کنیم که حاصل عبارت برابر ۲۷ می‌شود.
- ۴- در روش دوم حاصل عبارت $(۲۸/۳۱)$ را به دست می‌آوریم. سپس حاصل را با تقریب کمتر از ۱ و به روش گرد کردن محاسبه می‌کنیم.
- ۵- در روش دوم فقط یک بار (حاصل عبارت) تقریب می‌زنیم (۲۸) پس فقط، یک بار خطای تقریب در محاسبه عبارت ما تأثیر دارد.
- ۶- در روش دوم چون فقط یک بار تقریب زده می‌شود پس مقدار عبارت با مقدار واقعی کمتر اختلاف دارد. $(۲۸/۳۱ - ۲۸ = ۰/۳۱)$
- ۷- بنابراین پاسخ عبارت در روش اول و دوم با هم اختلاف دارند. (به اندازه ۱)
- ۸- برای اینکه مقدار این خطا و اختلاف را کمتر کنیم باید مقدار تقریب را دقیق تر انتخاب کنیم. $(۱/۰٪ یا ۰/۱٪ ...)$

روش‌های پیشنهادی فعالیت ضرب عددهای تقریبی :

- ۱- در روش اول عدد $3/26$ را با تقریب کمتر از $0/1$ و به روش گرد کردن محاسبه می‌کنیم که برابر $3/3$ است.
 - ۲- این عدد باید در 8 ضرب شود زیرا می‌خواهیم بدانیم 8 برابر $3/3$ چند می‌شود. ($26/4$)
 - ۳- بنابراین در روش اول مقدار تقریبی هر عدد را با تقریب کمتر از $0/1$ و به روش گرد کردن محاسبه می‌کنیم سپس عددهای تقریبی را در 8 ضرب می‌کنیم که حاصل عبارت برابر $26/4$ می‌شود.
 - ۴- در روش اول عدد تقریبی را در 8 ضرب می‌کنیم. بنابراین در ضرب کردن این عدد، مقدار خطای تقریب آنها بیشتر می‌شود و حاصل عبارت با مقدار واقعی اختلاف پیدا می‌کند.
 - ۵- در روش دوم حاصل عبارت ($26/08$) را به دست می‌آوریم. سپس حاصل را با تقریب کمتر از $0/1$ و به روش گرد کردن محاسبه می‌کنیم.
 - ۶- در روش دوم فقط یک بار (حاصل عبارت) را تقریب می‌زنیم ($26/1$) پس فقط، یک بار خطای تقریب در محاسبه عبارت ما تأثیر دارد.
 - ۷- در روش دوم چون فقط یک بار تقریب زده می‌شود پس مقدار عبارت با مقدار واقعی کمتر اختلاف دارد.
 - ۸- پس اگر قبل از محاسبه عملیات ضرب مقداری را تقریب بزنیم و سپس حاصل را به دست آوریم مقدار خطای تقریب در محاسبات با هم جمع شده و حاصل تقریبی از عدد واقعی اختلاف بیشتری پیدا می‌کند.
 - ۹- بنابراین پاسخ عبارت در روش اول و دوم با هم اختلاف دارند. (به اندازه $0/7$)
- ترتیب و اولویت انجام عملیات : اگر یک عبارت پرانتز داشت از داخلی‌ترین پرانتز محاسبات را شروع می‌کنیم. اگر ترتیب انجام عملیات با پرانتز مشخص نشده بود ابتدا باید ضرب و تقسیم‌ها و سپس جمع و تفریق را انجام دهید. برای انجام عملیات ضرب یا تقسیم، از سمت چپ محاسبه کنید و اولویت انجام عملیات، با قرار گرفتن علامتی است که در سمت چپ قرار دارد. مثلاً برای انجام عملیات ($4 \times 3 \div 12$) ابتدا عملیات تقسیم و سپس ضرب را انجام می‌دهیم. برای انجام عملیات جمع یا تفریق، از سمت چپ محاسبه کنید و اولویت انجام عملیات، با قرار گرفتن علامتی است که در سمت چپ قرار دارد. مثلاً برای انجام عملیات ($4 + 3 - 12$) ابتدا عملیات تفریق و سپس جمع را انجام می‌دهیم.

توصیه‌های آموزشی

- اولویت انجام عملیات با پرانتز است البته باید از داخلی‌ترین پرانتز محاسبات را شروع می‌کنیم.
- توصیه می‌شود قبل از انجام عملیات دانش‌آموزان با قرار دادن پرانتز بین عددها ترتیب عملیات را مشخص کنند.

فعالیت



فعالیت‌های زیر جهت افزایش مهارت در دانش‌آموزان و در محاسبه‌های ترتیب و اولویت انجام عملیات توصیه می‌شود

$$8 - 2 \times 3 = \begin{cases} (8-2) \times 3 = 18 & \text{راه حل اول} \\ 8 - (2 \times 3) = 2 & \text{راه حل دوم} \end{cases}$$

می‌خواهیم حاصل عبارت زیر را محاسبه کنیم.

همان طور که می بینید پاسخ عبارت $۳ \times ۲ - ۸$ به دو روش بالا با یکدیگر متفاوت است بنابراین باید برای انجام عملیات ریاضی قرارداد یکسانی را داشته باشیم تا حاصل عبارت های ریاضی یکسان شود. بنابراین، این چنین قرار داد می کنیم: اگر یک عبارت پرانتز داشت از داخلی ترین پرانتز محاسبات را شروع می کنیم. اگر ترتیب انجام عملیات با پرانتز مشخص نشده بود ابتدا باید ضرب و تقسیم ها و سپس جمع و تفریق را انجام دهید. برای انجام عملیات ضرب یا تقسیم، از سمت چپ محاسبه کنید و اولویت انجام عملیات، با قرار گرفتن علامتی است که در سمت چپ قرار دارد. مثلاً برای انجام عملیات $(۳ \times ۴) \div ۱۲$ ابتدا عملیات تقسیم و سپس ضرب را انجام می دهیم. برای انجام عملیات جمع یا تفریق، از سمت چپ محاسبه کنید و اولویت انجام عملیات، با قرار گرفتن علامتی است که در سمت چپ قرار دارد. مثلاً برای انجام عملیات $(۳ + ۴) - ۱۲$ ابتدا عملیات تفریق و سپس جمع را انجام می دهیم. بنابراین در انجام عملیات این تمرین راه حل دوم صحیح است زیرا اولویت انجام عملیات، اول با ضرب و سپس با تفریق است. $۸ - (۲ \times ۳) = ۲$