۴ـ۱ـ۴ـ قضیه‌های مشتق

قضیه‌ی ۱: اگر تابع f در x=a مشتق داشته باشد در این نقطه پیوسته است.

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است این تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر است با :

$$f(x)=x^{۲}-۳x$$

$$f'(x)=۲x-۳\Rightarrow f'(۱)=-۱$$

ـ بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۱ تابع پیوسته است، زیرا :

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱)=-۲$$

قضیه‌ی ۲: (مشتق حاصل‌جمع دو تابع)

اگر u و v دو تابع برحسب x و مشتق‌پذیر باشند و $f(x)=u+v$ ، آن‌گاه $f'(x)=u'+v'$

مثال ۲: مشتق تابع مقابل را به دست آورید.

$$y=x^{۲}+x^{۳}$$

$x^{۲}$ و $x^{۳}$ دو تابع مشتق‌پذیرند، پس :

$$y'=۲x+۳x^{۲}$$

قضیه‌ی ۳: اگر u و v برحسب x،دارای مشتق باشند و $f=u\quad v$ آن‌گاه : $f'=u'v+v'u$

مثال ۳: مشتق تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=(-۶x^{۲}+۷x)(۳x^{۴}+\sqrt{x})$$

ـ با استفاده از قضیه‌ی ۳، مشتق f(x) برابر است با :

$$f'(x)=(-۱۲x+۷)(۳x^{۴}+\sqrt{x})+(۱۲x^{۳}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(-۶x^{۲}+۷x)$$

تذکر: مشتق حاصل‌ضرب دو تابع به حاصل‌ضرب تعداد متناهی تابع قابل تعمیم است.

مثال ۴: مشتق تابع مقابل را به ازای $x=۲$ به دست آورید.

$$f(x)=(x-۲)(x-۵)(x+۶)$$

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x)=(x-۲)'(x-۵)(x+۶)+(x-۲)(x-۵)'(x+۶)+(x-۲)(x-۵)(x+۶)'$$

ــ پس از محاسبه‌ی مشتق هر پرانتز خواهیم داشت :

$$\Rightarrow f'(x)=(x-۵)(x+۶)+(x-۲)(x+۶)+(x-۲)(x-۵)$$

ــ به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow f'(۲)=(۲-۵)(۲+۶)+(۲-۲)(۲+۶)+(۲-۲)(۲-۵)$$

پس مشتق $f(x)$ به ازای $x=۲$ برابر است با :

$$f'(۲)=-۲۴$$

قضیه‌ی ۴: (مشتق حاصل تقسیم دو تابع)

اگر $u'(x)$ و $v'(x)$ وجود داشته باشد و $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ به شرط $v(x)\neq ۰$ آن‌گاه داریم :

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x).u(x)}{v^{۲}(x)}$$

مثال ۵: مشتق تابع مقابل را بنویسید.

$$y=\frac{-۷x+۵}{۳+۴x}$$

حل: با استفاده از قضیه‌ی ۴ داریم :

$$\Rightarrow y'=\frac{-۷(۳+۴x)-۴(-۷x+۵)}{(۳+۴x)^{۲}}$$

$$=\frac{-۲۱-۲۸x+۲۸x-۲۰}{(۳+۴x)^{۲}}$$

پس از ساده کردن، مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow y'=\frac{-۴۱}{(۳+۴x)^{۲}}$$

مثال ۶: مشتق تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{۵}{x^{۳}}$$

حل: طبق قضیه‌ی ۴ داریم :

$$f'(x)=\frac{۰\times x^{۳}-(۳x^{۲})\times ۵}{(x^{۳})^{۲}}=\frac{-۱۵x^{۲}}{x^{۶}}$$

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$f(x) = -\frac{۱۵}{x^۴}$$

قضیه‌ی ۵: (مشتق ترکیب دو تابع)

اگر y تابعی برحسب u با ضابطه‌ی $y = f(u)$ و u نیز تابعی برحسب x با ضابطه‌ی $u = g(x)$ باشد، آن گاه y تابعی برحسب x با این ضابطه :

$$y = f(u) = f(g(x)) = (fog)(x)$$

می‌باشد. حال اگر $u = g(x)$ در x مشتق‌پذیر و تابع f در $u = g(x)$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه y نیز در x مشتق‌پذیر است و همچنین :

$$y' = (fog)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

مثال ۷: تابع‌های u و y در مقابل مفروض‌اند. مشتق y را برحسب x (y'_x) به‌دست آورید.

$$y = -۲u^۳ \quad , \quad u = ۳x^۲ + ۵x$$

ـ با توجه به قضیه‌ی ۵ و رابطه‌ی y'_x خواهیم داشت :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u) \Rightarrow y' = (۶x + ۵)(-۶u^۲)$$

ـ درعبارت مشتق، به جای u، مساوی آن را قرار می‌دهیم،

پس :

$$y' = -۶(۶x + ۵)(۳x^۲ + ۵x)^۲$$

مثال ۸: تابع‌های u و y در مقابل مفروض‌اند ؛

$$y = ۳u^۲ + ۵u - ۳ \text{ و } u = \sqrt{۳x + ۱}$$

ابتدا y'_x را یافته، سپس مقدار $y'_{(۵)}$ را حساب کنید.

حل: با کاربرد قضیه‌ی ۵ مشتق تابع مرکب عبارت است از :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u) \Rightarrow$$

$$y'_x = \left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x + ۱}}\right)(۶u + ۵) \Rightarrow$$

ـ در مشتق تابع به جای u مقدار آن را قرار می‌دهیم :

$$y'_x = \left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x + ۱}}\right)(۶\sqrt{۳x + ۱} + ۵) \Rightarrow$$

ـ برای محاسبه‌ی $y'_{(۵)}$ به جای x عدد ۵ را در مشتق قرار می‌دهیم.

$$y'_{(۵)} = \left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳ \times ۵ + ۱}}\right)(۶\sqrt{۳ \times ۵ + ۱} + ۵)$$

ـ مشتق تابع در $x = ۵$ برابر است با :

$$\Rightarrow y'_{(۵)} = \left(\frac{۳}{۸}\right)(۲۹) \Rightarrow y'_{(۵)} = \frac{۸۷}{۸}$$

(مشتق توابع مثلثاتی)

الف) مشتق تابع سینوس

۱ــ اگر $y=\sin x$ آن‌گاه $y'=\cos x$

۲ــ اگر $y=\sin u$ (u برحسب x) آن‌گاه $y'=u'\cos u$

مثال‌های نمونه:

$y=\sin x+۷x \rightarrow y'=\cos x+۷$

$y=۲\sin x+۳\sin(x^۲+x) \Rightarrow$

$y'=۲\cos x+۳(۲x+۱)\cos(x^۲+x)$

ب) مشتق تابع کسینوس

۱ــ اگر $y=\cos x$ آن‌گاه $y'=-\sin x$

$y=\cos\sqrt{x} \Rightarrow y'=-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$

۲ــ اگر $y=\cos u$ (u برحسب x) آن‌گاه $y'=-u'\sin u$

$y=\cos ۲x-۷\cos ۳x \rightarrow y'=-۲\sin ۲x+۲۱\sin ۳x$

ج) مشتق تابع تانژانت

۱ــ اگر $y=\tan x$ آن‌گاه $y'=۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$

$y=(۳x+۵)\tan x \Rightarrow y'=۳\tan x+(۳x+۵)(۱+\tan^۲ x)$

۲ــ اگر $y=\tan u$ (u برحسب x) آن‌گاه

$y'=u'(۱+\tan^۲ u)=\frac{u'}{\cos^۲ u}$

$y=\tan ۴x \rightarrow y'=۴(۱+\tan^۲ ۴x)=\frac{۴}{\cos^۲ ۴x}$

د) مشتق تابع کتانژانت

۱ــ اگر $y=\cot x$ آن‌گاه

$y'=-(۱+\cot^۲ x)=\frac{-۱}{\sin^۲ x}$

$y=\cot^۳ x \Rightarrow y'=-۳(۱+\cot^۲ x)\cot^۲ x$

۲ــ اگر $y=\cot u$ آن‌گاه

$y'=-u'(۱+\cot^۲ u)=\frac{-u'}{\sin^۲ u}$

$y=\cot ۷x \Rightarrow y'=-۷(۱+\cot^۲ ۷x)=\frac{-۷}{\sin^۲ ۷x}$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=5x^2-3\sin 2x \;،\; x=\frac{\pi}{4}$$

حل: مشتق تابع را به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ حساب می‌کنیم.

$$f'(x)=10x-6\cos 2x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=10(\frac{\pi}{4})-6\cos 2(\frac{\pi}{4})$$

ــ در $x=\frac{\pi}{4}$، مشتق برابر است با :

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\frac{5\pi}{2}-6\cancelto{0}{\cos}\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$f(x)=\sin 3x.\cos 2x \;،\; x=\frac{\pi}{6}$$

حل: مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برابر است با :

$$f'(x)=3\cos 3x\cos 2x-2\sin 2x.\sin 3x \Rightarrow$$

ــ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$، مشتق برابر است با :

$$f'(\frac{\pi}{6})=3\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

ــ پس از ساده کردن مشتق به‌دست می‌آید.

$$f'(\frac{\pi}{6})=3(0)(\cancelto{0}{\frac{1}{2}})-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1=-\sqrt{3}$$

مثال ۱۱: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=x\sqrt{2x} \;\text{و}\; x=\frac{9}{2}$$

حل: مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برابر است.

$$f'(x)=1\times\sqrt{2x}+\frac{2}{2\sqrt{2x}}\times x=\sqrt{2x}+\frac{x}{\sqrt{2x}}$$

ــ به ازای $x=\frac{9}{2}$ مقدار مشتق برابراست با :

$$\Rightarrow f'(\frac{9}{2})=\sqrt{9}+\frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{9}}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

مثال ۱۲: مشتق تابع مقابل را به ازای نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=2x+\cot\frac{x}{2} \;\text{و}\; x=\pi$$

حل: مشتق جمع دو تابع برابر جمع مشتق‌های آن دو تابع است ؛ در نتیجه داریم :

$$f'(x)=2-\frac{1}{2}(1+\cot^2\frac{x}{2}) \Rightarrow f'(\pi)=2-\frac{1}{2}(1+\cot^2\frac{\pi}{2})$$

ــ به ازای $x=\pi$ مقدار مشتق برابر است با :

ــ پس از ساده کردن $f'(\pi)$ به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow f'(\pi)=2-\frac{1}{2}(1+0)=2-\frac{1}{2}=\frac{4-1}{2}$$

$$\Rightarrow f'(\pi)=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۱۳: مشتق تابع مقابل را به‌ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$f(x)=\frac{۳}{۵x-۱} \text{ و } x=۱$$

ــ با استفاده از مشتق کسر به ازای $x=۱$ مشتق را به‌دست می‌آوریم :

$$f'(x)=\frac{۰\times(۵x-۱)-۵\times۳}{(۵x-۱)^{۲}}=\frac{-۱۵}{(۵x-۱)^{۲}}\Rightarrow$$

$$f'(۱)=\frac{-۱۵}{۱۶}$$

مثال ۱۴: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$f(t)=\frac{۲t-۴}{۵-۴t} \text{ ، } t=۴$$

ــ مشتق تابع کسری برابر است با :

$$f'(t)=\frac{۲(۵-۴t)-(-۴)(۲t-۴)}{(۵-۴t)^{۲}}=\frac{۱۰-۸t+۸t-۱۶}{(۵-۴t)^{۲}}$$

ــ به ازای $t=۴$ ، مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{-۶}{(۵-۴t)^{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{-۶}{۱۲۱}$$

مثال ۱۵: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$y=\sqrt{۴+\sin ۲x} \text{ و } x=۰$$

حل: مشتق تابع به ازای $x=۰$ برابر است با :

$$y'=\frac{\cancel{۲}\cos ۲x}{\cancel{۲}\sqrt{۴+\sin ۲x}}\Rightarrow y'_{(۰)}=\frac{\cos(۰)}{\sqrt{۴+\sin(۰)}}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۱۶: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$f(\theta)=\sin^{۳}\theta-\cos^{۷}\theta \text{ ، } \theta=\frac{\pi}{۲}$$

حل: مشتق برابر است با :

$$f'(\theta)=۳\cos\theta\sin^{۲}\theta-۷\sin\theta\cos^{۶}\theta$$

ــ به ازای $\theta=\frac{\pi}{۲}$ ، مقدار مشتق به‌دست می‌آید.

$$f'(\frac{\pi}{۲})=۳\cos\frac{\pi}{۲}\sin^{۲}\overset{۰}{\cancel{\frac{\pi}{۲}}}-۷\sin\overset{۰}{\cancel{\frac{\pi}{۲}}}\cos^{۶}\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲})=۰$$

مثال ۱۷: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده حساب کنید.

$$f(x)=(x^{۲}+\cos x)(-۳x+۴) \text{ ، } x=۰$$

حل: مشتق تابع حاصل ضرب برابر است با :

$$f'(x)=(2x-\sin x)(-3x+4)-3(x^2+\cos x)$$

ــ به ازای $x=0$ مقدار مشتق به‌دست می‌آید.

$$f'(0)=(2(0)-\sin(0))(-3(0)+4)-3(0^2+\cos(0))$$
$$\Rightarrow f'(0)=0-3\Rightarrow f'(0)=-3$$

۵ــ۱ــ۴ــ مشتق دوم یک تابع: با تکرار عمل مشتق‌گیری در صورت وجود مشتق می‌توان از مشتق تابع دوباره مشتق گرفت که به آن مشتق مرتبه‌ی دوم تابع می‌گوییم و آن را به صورت y'' یا $f''(x)$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

$$f(x)=3x^5-6x^2+11$$
$$f'(x)=15x^4-12x$$
$$f''(x)=60x^3-12$$

نکته: اگر تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ روی بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد، اگر تابع f' روی I مشتق‌پذیر باشد آنگاه می‌گوییم تابع f روی I مشتق دوم دارد و مشتق دوم y را با $f''(x)$ نمایش می‌دهیم و به همین ترتیب مشتق مرتبه‌ی سوم را با $f'''(x)$ یا $f^{(3)}(x)$ و … و مشتق مرتبه‌ی nام را با $f^{(n)}(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$f^{(3)}(x)=180x^2 \text{ و } f^{(4)}(x)=360x$$
$$f^{(5)}(x)=360 \text{ و } f^{(6)}(x)=0$$

مثال ۱: در تابع روبه‌رو $f''(x)$ را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=-3x^3+5x^2 \text{ و } x=-2$$

ــ از مشتق اول دوباره مشتق می‌گیریم :

$$f'(x)=-9x^2+10x\Rightarrow f''(x)=-18x+10$$

ــ به ازای $x=-2$ مشتق دوم تابع برابر است با :

$$f''(-2)=-18(-2)+10\Rightarrow f''(-2)=46$$

مثال ۲: در تابع مقابل $f''(x)$ را در نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=\sin x+\cos x \quad x=\frac{\pi}{4}$$

ــ از مشتق اول دوباره مشتق می‌گیریم :

$$f'(x)=\cos x-\sin x\Rightarrow f''(x)=-\sin x-\cos x$$

ــ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ مشتق دوم تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ــ پس از ساده کردن داریم :

$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$$

مثال ۳: تابع مقابل مفروض است، هرگاه $y''_{(2)}=9$ باشد

$$y=\frac{1}{3}x^3-5Bx^2+3x$$

مقدار B را محاسبه کنید.

حل: مشتق اول و دوم تابع را پیدا می‌کنیم :

$$y' = x^۲ - ۱۰Bx + ۳ \Rightarrow y'' = ۲x - ۱۰B$$

ـ مشتق را برابر عدد داده شده قرار می‌دهیم، B به‌دست می‌آید.

$$۹ = ۲(۲) - ۱۰B \Rightarrow ۱۰B = ۴ - ۹ \Rightarrow B = \frac{-۵}{۱۰} = \frac{-۱}{۲}$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض‌اند :

$$f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} \text{ و } g(x) = x\sqrt{x}$$

نشان دهید بین مشتق‌های دوم آن‌ها رابطه‌ی روبه‌رو برقرار است :

$$f''(۸) + g''(۴) = \frac{۳۵}{۷۲}$$

حل: مشتق اول تابع با ضابطه f(x) برابر است با :

$$f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۴}{۳}-۱} = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}$$

ـ برای محاسبه‌ی $f''(x)$ از $f'(x)$ مشتق می‌گیریم :

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{۴}{۳}(\frac{۱}{۳})x^{\frac{۱}{۳}-۱} = \frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۴}{۹x^{\frac{۲}{۳}}}$$

ـ به ازای $x = ۸$ مقدار $f''(x)$ برابر است با :

$$f''(x) = \frac{۴}{۹\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow f''(۸) = \frac{۴}{۹\sqrt[۳]{۸^۲}} = \frac{۱}{۹}$$

ـ مشتق اول g(x) برابر است با :

$$g'(x) = ۱ \times \sqrt{x} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times x \Rightarrow g'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{۲\sqrt{x}}$$

ـ برای محاسبه‌ی $g''(x)$ از $g'(x)$ مشتق می‌گیریم :

$$g''(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱ \times (۲\sqrt{x}) - x(۲ \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}})}{(۲\sqrt{x})^۲}$$

ـ مشتق دوم g(x) برابر است با :

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{\frac{۲x - x}{\sqrt{x}}}{۴x} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱}{۴\sqrt{x}}$$

ـ به ازای $x = ۴$ مشتق دوم g(x) برابر است با :

$$\Rightarrow g''(۴) = \frac{۱}{۲\sqrt{۴}} + \frac{۱}{۴\sqrt{۴}} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} = \frac{۲+۱}{۸}$$

$$\Rightarrow g''(۴) = \frac{۳}{۸}$$

ـ با مقایسه‌ی مقادیر مشتق دوم نتیجه می‌گیریم که رابطه برقرار است.

$$f''(۸) + g''(۴) = \frac{۱}{۹} + \frac{۳}{۸} = \frac{۸ + ۲۷}{۷۲} = \frac{۳۵}{۷۲}$$

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)

۱ــ مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

۱) $f(x)=۵-۳x$

۲) $f(x)=x^{۲}-۷x$

۲ــ با استفاده از تعریف مشتق، ثابت کنید تابع $f(x)=|x-۲|$ در نقطه‌ی $x=۲$ مشتق ندارد.

۳ــ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $y=\sqrt[۳]{(۲x^{۲}+۳x)^{۲}}$

۲) $y=(۳x^{۲}+۵x)^{۶}$

۳) $y=(-۶\sin ۲x+\cos ۳x)^{۴}$

۴) $y=\dfrac{۱-۷x}{۳x+۴}$

۴ــ مشتق دوم توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=۳\sqrt{۵x+۱}+۷x^{۲}$

ب) $y=۲\cos ۳x$

ج) $y=\dfrac{۳}{x}$

د) $y=(۳x^{۲}-۵x)^{۳}$