

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

جدول ۳-۲۲

x	1 → ۱۰ → ۱۰۰ → ۱۰۰۰ → ۱۰۰۰۰ → ۱۰۰۰۰۰ → ۱۰۰۰۰۰۰ → ۱۰۰۰۰۰۰۰ → ...
f(x)	۱ → ۰/۱ → ۰/۱۰ → ۰/۱۰۰ → ۰/۱۰۰۰ → ۰/۱۰۰۰۰ → ۰/۱۰۰۰۰۰ → ۰/۱۰۰۰۰۰۰ → ...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

جدول ۳-۲۳

x	۱ ← ۱۰ ← ۱۰۰ ← ۱۰۰۰ ← ۱۰۰۰۰ ← ۱۰۰۰۰۰ ← ۱۰۰۰۰۰۰ ← ۱۰۰۰۰۰۰۰ ← ...
f(x)	۱ ← ۰/۱ ← ۰/۱۰ ← ۰/۱۰۰ ← ۰/۱۰۰۰ ← ۰/۱۰۰۰۰ ← ۰/۱۰۰۰۰۰ ← ۰/۱۰۰۰۰۰۰ ← ...

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

جدول ۳-۲۴

x	۱ → ۱۰ → ۱۰۰ → ۱۰۰۰ → ۱۰۰۰۰ → ۱۰۰۰۰۰ → ...
f(x)	۰ → ۰/۹۸۰۱۹۸ → ۰/۹۹۹۸ → <input type="text"/> → <input type="text"/>

جدول ۳-۲۵

x	۱ ← ۰ ← ۱۰ ← ۱۰۰ ← ۱۰۰۰ ← ۱۰۰۰۰ ← ۱۰۰۰۰۰ ← ...
f(x)	<input type="text"/> ۰/۹۹۹۹۸ <input type="text"/> ۰/۹۸۰۱۹۸

مثال: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است:

با توجه به جدول ۳-۲۲ می‌بینیم که هرگاه x بزرگ و بزرگ‌تر شود به طوری که از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود $(x \rightarrow +\infty)$ مقدار f(x) به عدد ۰ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود $(y \rightarrow 0)$ یعنی با توجه به جدول ۳-۲۳ درمی‌یابیم که وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، f(x) با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند، یعنی:

فعالیت ۳-۹

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است (شکل ۳-۴۲) با تکمیل جدول‌های ۳-۲۴ و ۳-۲۵ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۱- وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند $(x \rightarrow +\infty)$ ، f(x) به

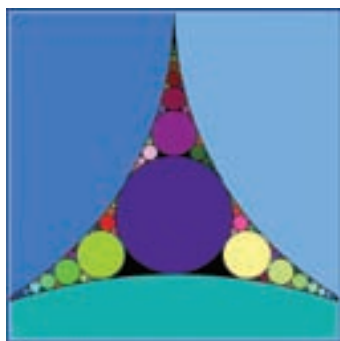
کدام عدد میل می‌کند؟

۲- وقتی $x \rightarrow -\infty$ مقدار f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

قضیه ۳-۵ اگر n عددی صحیح و مثبت باشد، آن گاه :



شکل ۳-۴۳

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^5} = ?$$

بنابر قضیه ۳-۵ داریم :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^5} = 7 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} = 7 \times 0 = 0$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x-1} = ?$$

حل: از x صورت و مخرج فاکتور می گیریم :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3+\frac{2}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} =$$

– بنابر قضیه ۳-۵ داریم :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{3+0}{1-0} = 3$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3} = ?$$

از x^2 در صورت و مخرج کسر فاکتور می گیریم. با توجه

به قضیه ۳-۵ داریم :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

– حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^3+x^2+1} = ?$$

– از بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\frac{1}{x}-1)}{x^3(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})}$$

– بنابر قضیه‌ی ۳-۵ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ داریم:

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0-1}{x^2(1+0+0)} = 0$$

مثال: حد مقابل را بیابید.

– از بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x}}{x^2 - x} = ?$$

بنابر قضیه ۳-۵ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x}}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^3})}{x^2(1 - \frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

تابع برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + x + 2}{x^2 + \sqrt{x} - 3} = ?$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 + \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{3}{x^2})} = \frac{4+0+0}{1+0-0} = 4$$

با فاکتورگیری x^2 از صورت و مخرج کسر و بنابر قضیه‌ی

۳-۵ داریم:

نکته: در محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای هستند):

– اگر درجه‌ی $f(x)$ کوچکتر از درجه‌ی $g(x)$ باشد، آن‌گاه حد تابع برابر صفر است. مانند: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} = 0$

– هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ هم درجه باشند مقدار حد برابر خارج قسمت ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت به ضریب

بزرگ‌ترین درجه‌ی مخرج است؛ مانند:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + \sqrt{x} - 4}{5x^3 - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3}{5x^3} = \frac{6}{5}$$

– اگر درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بیش‌تر باشد حد تابع بی‌نهایت می‌شود؛ مانند:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^4 + 6x}{3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^4}{3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{3}x^3 = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{ax^m + x + 1}{3x^2 + 7}$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$$

مقادیر a و m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m + x + 1}{3x^2 + 7} = 4 \Rightarrow m = 2$$

مراحل حل: چون مقدار حد تابع عددی مخالف صفر شده است، بنابراین صورت و مخرج هم درجه‌اند، لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + x + 1}{3x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{3x^2} = \frac{a}{3} = 4 \Rightarrow \boxed{a = 12}$$

– با توجه به مقدار حد تابع، مقدار a برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+7}}{5x+2}$$

مثال: مقدار حد روبه‌رو را محاسبه نمایید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+7}}{5x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{5x} = 0$$

– چون درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر است

بنابراین حد برابر صفر است، یعنی:

تمرین

۱- حدهای زیر را به دست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 7x}{x^2 - 1}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x-1)(x+3)}{1-x+x^2}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x+1}{-\frac{1}{3}x^2 + 2}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x - 1}{4x^3 + 2x - x}$$

۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{4ax + 7x}{3x^3 + 9x - 2}$ داده شده

است. مقادیر a و m را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3$$

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۳)

۱- اگر داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^{m+1} - 1}{6x^3 + 4x^2 - 5} = \frac{3}{5}$$

مقدار m و a را به دست آورید.

۲- اگر تابع f در \mathbb{R} پیوسته باشد مقدار a و b را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & x > 1 \\ 3 & x = 1 \\ -bx + 4 & x < 1 \end{cases}$$

۳- حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{5x^2 - 14x - 3}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 1}{7x^2 - 4x}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x|x| + 3}{5x^2 - 4x + 3}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 6x}{x^4 + 3x + 1}$$