۷

عبارت‌های گویا

برای آن که عکس واضحی روی دوربین ایجاد شود، عدسی دوربین به عقب یا جلو حرکت می‌کند. دلیل این امر قوانین فیزیکی مربوط به نور و عدسی‌ها است. محاسبات لازم برای یافتن مکان عدسی، محاسباتی جبری است.

حل یک مسئله

آقای صالحی، پدر یکی از دانش‌آموزان این مدرسه، می‌خواهد تا عید امسال خانه خود را رنگ بزند. یک نقاش گفته است می‌تواند خانه را در ۱۲ روز نقاشی کند. نقاش دیگری گفته است می‌تواند خانه را در ۹ روز نقاشی کند. آقای صالحی برای سرعت بیشتر، از این دو نقاش خواسته است با هم خانه را رنگ بزنند. آقای صالحی از پسر خود خواسته است که حساب کند کار نقاشی خانه چقدر طول خواهد کشید.

احمد این مسئله را در کلاس مطرح کرد و گفت من فکر کردم جواب این مسئله باید ۲۱ = ۹ + ۱۲ باشد، ولی پدرم این جواب را درست ندانست.

معلم از سایر دانش‌آموزان پرسید چرا این جواب نادرست است؟

اکبر گفت : روشن است که این جواب نادرست است، زیرا هر کدام از نقاش‌ها اگر به تنهایی هم که کار می‌کردند در ۹ روز یا ۱۲ روز کار را تمام می‌کردند، پس وقتی با هم کار کنند باید انجام کار، زمان کمتری طول بکشد نه این که بیشتر طول بکشد.

معلم پرسید : پس جواب درست چیست؟

اکبر گفت : تقریباً هر کدام از نقاش‌ها نیمی از کار را انجام می‌دهند، پس جواب، عددی بین ۴/۵ تا ۶ روز باید باشد.

معلم گفت : این یک جواب تقریبی است و تخمین آن درست است ولی برای توجیه درستی این تخمین استدلال بهتری لازم است. آیا می‌توانید روشی برای به دست آوردن جواب دقیق ارائه کنید؟

حسن گفت : ما باید بتوانیم سرعت کار کردن این دو نقاش را با هم مقایسه کنیم. بهتر است بدانیم هر کدام از این‌ها در یک روز چه مقدار از خانه را رنگ می‌کنند.

با توجه به این که نقاش اول در ۱۲ روز تمام خانه را رنگ می‌کند، او در یک روز $\frac{۱}{۱۲}$ خانه را رنگ می‌کند. با همین استدلال نقاش دوم در یک روز $\frac{۱}{۹}$ خانه را رنگ می‌کند. پس هر دو با هم در یک روز $\frac{۷}{۳۶} = \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۲}$ خانه را رنگ می‌کنند.

اگر تعداد روزهای لازم برای رنگ کردن خانه را x در نظر بگیریم تناسب روبه‌رو را تشکیل می‌دهیم.

روز	کار
۱	$\frac{۷}{۳۶}$
x	۱

در نتیجه :

$$\frac{\frac{۷}{۳۶}}{۱}=\frac{۱}{x}$$

$$x=\frac{۱\times۱}{\frac{۷}{۳۶}}=\frac{۳۶}{۷}\simeq ۵/۱۴$$

بیندیشیم

۵/۱۴ روز
چه معنایی دارد؟

فعالیت

یک حوض در نظر بگیرید که توسط دو شیر آب پر می‌شود. فرض کنید شیر اول به تنهایی در a ساعت حوض را پر می‌کند و شیر دوم به تنهایی در b ساعت حوض را پر می‌کند و اگر این دو شیر را با هم باز کنیم حوض در x ساعت پر خواهد شد. با انجام مراحل زیر می‌خواهیم x را بر حسب a و b حساب کنیم.

۱ــ شیر اول به تنهایی در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کند؟

۲ــ شیر دوم به تنهایی در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کند؟

۳ــ هر دو شیر با هم در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کنند؟

۴ــ وقتی هر دو شیر با هم باز هستند در x ساعت حوض پر می‌شود، در یک ساعت چه کسری از حوض پر می‌شود؟

۵ــ با توجه به محاسبات بالا، رابطه‌ی ریاضی بین x و a و b را بنویسید.

در انجام فعالیت بالا معادله‌ی

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{x}$$

به دست می‌آید که برای حل آن به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{۱}{x}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

$$\frac{۱}{x}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}$$

$$\frac{۱}{x}=\frac{a+b}{ab}$$

$$x=\frac{ab}{a+b}$$

بنابراین، اگر دو شیر آب همزمان باز باشند، حوض در $\frac{ab}{a+b}$ ساعت پر خواهد شد.

اگر از ما بپرسند حوضی هست که از درون آن سه رود می‌گذرد که از گذر یک رود، حوض در سه روز پر می‌شود، رود دوم در چهار روز و رود سوم در پنج روز پر می‌شود. اگر هر سه رود هم‌زمان در حوض وارد شوند، در چند روز حوض پر می‌شود؟

پاسخ آن است که جواب آن را بگیریم سه و چهار و پنج، مقدار روزها را به مخرج‌ها می‌آوریم می‌شود ثلث و ربع و خمس $(\frac{1}{3})$، $(\frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{5})$. سپس ثلث و ربع و خمس را به مخرج شصت می‌آوریم.

بیست، پانزده و دوازده، آن را جمع می‌کنیم می‌شود چهل و هفت و مخرج آن را که شصت است بر آن تقسیم می‌کنیم که جواب می‌شود و سیزده از چهل و هفت می‌ماند پس حوض در مدّت یک روز و شش ساعت و چهل دقیقه پر می‌شود.

(مسئله از مفتاح‌المعاملات)

عبارت‌های گویا

همان‌گونه که در فعالیت بالا دیدید، در حل بسیاری از مسائل لازم است عبارت‌هایی مانند $\frac{1}{a}$، $\frac{1}{b}$ و $\frac{ab}{a+b}$ را در نظر بگیریم و روی آن‌ها محاسباتی انجام دهیم. این گونه عبارت‌ها را عبارت‌های گویا می‌نامند.

> عبارت‌های جبری که پس از ساده‌کردن، به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای در می‌آیند را یک عبارت گویا می‌نامند.

برای مثال، عبارت‌های جبری زیر عبارت‌هایی گویا هستند.

$$7 \;,\; 4xy^2 \;,\; \frac{a^2b+b^2a}{a+b} \;,\; \frac{xy+x^2+1}{x^2+y^2} \;,\; \frac{x+2}{x-1}$$

ولی، عبارت‌های جبری زیر، عبارت گویا نیستند.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+y} \;,\; \frac{2-x^2\sqrt{y}}{y^2+x} \;,\; \sqrt{x}+1$$

تمرین در کلاس

زمینی مستطیلی شکل در نظر بگیرید که طول و عرض آن به‌ترتیب x متر و y متر باشند.

۱ــ اگر در این زمین یک مستطیل را جدا کنیم که عرض آن نصف عرض زمین و طول آن یک سوم طول زمین باشد، مساحت آن چقدر خواهد شد؟ نسبت مساحت این قسمت به مساحت کل زمین چقدر خواهد بود؟

۲ ــ اگر در گوشه‌ای از این زمین باغچه‌ای بسازیم که طول آن ۲۰ متر کمتر از طول زمین و عرض آن ۳۰ متر کمتر از عرض زمین باشد، محیط این باغچه برحسب x و y چند متر و مساحت آن چند متر مربع است؟

۳ــ مساحت باغچه چه کسری از مساحت کل زمین است؟

۴ــ کدام یک از عبارت‌های زیر عبارت گویا نیستند؟

الف) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ ب) $\frac{x^2-x+1}{y+\sqrt{3}}$ ج) $3x+7$

یک عبارت گویا، نشان‌دهنده‌ی یک عدد است که با جایگذاری مقدارهایی برای متغیرهایش محاسبه می‌شود. برای مثال، مقدار عبارت $\frac{x}{x+۱}$، به ازای $x=۴$ برابر است با $\frac{۴}{۵}=\frac{۴}{۴+۱}$ و مقدار این عبارت به ازای $x=-۵$ برابر است با $\frac{۵}{۴}=\frac{-۵}{-۵+۱}$. به ازای $x=-۱$ مخرج این عبارت گویا صفر می‌شود، بنابراین این عبارت گویا به ازای $x=-۱$ تعریف نشده است.

در چند جمله‌ای‌ها، چون از عمل تقسیم استفاده نمی‌شود، به ازای هر مقداری از متغیرهایش مقدار عددی چند جمله‌ای قابل محاسبه است. اما، در عبارت‌های گویا چون عمل تقسیم نیز وجود دارد، ممکن است به ازای برخی مقادیر برای متغیرهایش، مخرج عبارت صفر شود و در این حالات مقدار عبارت تعریف نشده است.

مثال: عبارت $\frac{y^۲-y+x}{x^۲-۱}$ به ازای مقدارهای $x=۱$ و $x=-۱$ تعریف نشده است (چرا؟)، ولی به ازای سایر مقادیر تعریف شده است. مثلاً، به ازای $x=۰$ و $y=۳$ مقدار این عبارت برابر است با $\frac{۳^۲-۳+۰}{۰^۲-۱}=\frac{۶}{-۱}=-۶$.

تمرین در کلاس

۱ــ الف) به ازای چه مقداری برای x مقدار عبارت $\frac{x}{x+۱}$ برابر ۸ می‌شود؟

ب) آیا مقداری برای x می‌توان قرار داد که مقدار این عبارت برابر ۱ شود؟ چرا؟

ج) اگر $\frac{x}{x+۱}$ مساوی a باشد، x را بر حسب a حساب کنید.

۲ــ به ازای چه مقداری برای m دو عبارت $\frac{۲}{m-۲}$ و $\frac{۴}{m+۱}$ مقدار یکسانی خواهند داشت؟

اعمال جبری روی عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای هستند، بنابراین همانند اعدادی هستند که از طریق تقسیم دو عدد بر هم به دست می‌آیند. پس می‌توان آن‌ها را با هم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کرد و حاصل این اعمال مجدداً یک عبارت گویا خواهد بود. قواعد محاسبه با عبارت‌های گویا، همان قواعد محاسبه با چند جمله‌ای‌ها و کسرها است.

تمرین در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}$ ۲) $۲\times\frac{۱}{x}$ ۳) $۱+\frac{۱}{b}$

۴) $\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}$ ۵) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ۶) $۱\div\frac{a}{b}$

۷) $\frac{۱}{y+۱}+\frac{۱}{y-۱}$ ۸) $\frac{x-۱}{y}-\frac{y}{x+۱}$ ۹) $۱-\frac{x-y}{x+y}$

مثال: مجموع و حاصل ضرب و تقسیم دو عبارت گویای $\frac{x-۱}{y+۱}$ و $\frac{x+۱}{y-۱}$ را به دست آورید.

$$\frac{x-۱}{y+۱}+\frac{x+۱}{y-۱}=\frac{(x-۱)(y-۱)+(x+۱)(y+۱)}{(y+۱)(y-۱)}=\frac{xy-x-y+۱+xy+x+y+۱}{y^۲-۱}$$

$$=\frac{۲(xy+۱)}{y^۲-۱}$$

$$\frac{x-۱}{y+۱}\times\frac{x+۱}{y-۱}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{(y-۱)(y+۱)}=\frac{x^۲-۱}{y^۲-۱}$$

$$\frac{\frac{x-۱}{y+۱}}{\frac{x+۱}{y-۱}}=\frac{x-۱}{y+۱}\div\frac{x+۱}{y-۱}=\frac{x-۱}{y+۱}\times\frac{y-۱}{x+۱}=\frac{(x-۱)(y-۱)}{(x+۱)(y+۱)}$$

تمرین در کلاس

فرض کنید A و B عبارت‌های گویایی به صورت $A=\frac{x}{x-۱}$ و $B=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ باشند. در هر قسمت، عبارت گویای C را چنان تعیین کنید که تساوی برقرار شود.

۱) $A\times B=C$ ۲) $A+C=B$ ۳) $\frac{A}{C}=B$

مسائل

۱ــ اعمال جبری زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{a^۲b}{c}\times\frac{c^۲b}{a^۲}$

ب) $\frac{a}{۲b}\times\frac{۳b}{۲a^۲}\times\frac{۴}{a}$

۲ــ هریک از عبارت‌های گویای زیر را به‌صورت مجموع یا تفاضل دو عبارت گویا بنویسید.

$\frac{x+۲}{y}$ ، $\frac{x+۱}{x^۲+۱}$ ، $\frac{a-۵}{b}$ ، $\frac{۲b-۳}{b-۳}$

۳ــ عبارت گویایی بیابید که اگر با $\frac{x+۱}{x-۱}$ جمع شود، حاصل آن برابر ۳ شود.

۴ــ نشان دهید قدرمطلق تفاضل معکوس دو عدد طبیعی متوالی برابر است با معکوس حاصل‌ضرب آن‌ها.

۵ــ اگر نسبت $۲x-y$ به $x+y$ برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، نسبت x به y چقدر خواهد بود؟

۶ــ اگر $۳x+\frac{۱}{۲x}=۴$ باشد حاصل $۹x^۲+\frac{۱}{۴x^۲}$ چیست؟

۷ــ اعمال جبری زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}+\frac{۱}{۳x}$

ب) $\frac{c}{c+۱}+\frac{۲}{۲c+۲}$

ج) $\frac{۱}{b}+\frac{۴}{۳b}$

د) $\frac{۴}{۳x^۲y}-\frac{۳}{۲xy}$

هـ) $\frac{x+۳}{۵}\div\frac{x-۳}{۵x}$

و) $\frac{a+b}{a}-\frac{a+b}{b}$

ساده کردن عبارت‌های گویا

فعالیت

دو عبارت $\frac{x+1}{x-1}$ و $\frac{x^2+x}{x^2-x}$ را در نظر بگیرید.

۱ــ مقدار این دو عبارت را به ازای مقدارهای $x=3$ و $x=-5$ و $x=\frac{1}{2}$ حساب کنید و با هم مقایسه کنید.

۲ــ به ازای مقدار دیگری برای x که به دلخواه خود در نظر می‌گیرید دو عبارت را حساب کنید. آیا این دو مقدار مساویند؟

۳ــ به نظر می‌رسد به ازای هر مقداری برای x که مخرج را صفر نمی‌کند، این دو عبارت مقدارهای یکسانی دارند. چگونه می‌توانید از عبارت اول، عبارت دوم را به دست آورید؟

۴ــ صورت و مخرج عبارت دوم را تجزیه کنید و با توجه به آن که هر کسر به صورت $\frac{ac}{bc}$ با کسر $\frac{a}{b}$ مساوی است، تساوی این دو عبارت را نتیجه بگیرید.

در کسرها، می‌توان صورت و مخرج آن کسر را در عدد مخالف صفری ضرب یا بر آن تقسیم کرد و با این عمل، مقدار کسر تغییر نخواهد کرد.

در عبارت‌های گویا نیز، چون به صورت کسر می‌باشند، در صورت وجود، عبارت مشترکی که به صورت ضرب در صورت و مخرج قرار دارد، را می‌توان از صورت و مخرج حذف کرد و عبارت گویای ساده‌تر دیگری به دست آورد که با عبارت قبلی مساوی است. این عمل را ساده کردن کسر می‌نامند.

مثال ۱: عبارت گویای $\frac{ax+a}{x^2-1}$ را ساده کنید.

$$\frac{ax+a}{x^2-1}=\frac{a(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x-1}$$

مثال ۲: عبارت گویای $\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x}$ را ساده کنید.

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x}=\frac{x(x^2+3x)}{(x^2+3x)}=x$$

مثال ۳: عبارت گویای $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$ را ساده کنید.

صورت و مخرج این عبارت را تجزیه می‌کنیم تا بتوان عامل مشترکی را در صورت و مخرج پیدا کرد.

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$$

تمرین در کلاس

عبارت‌های گویای زیر را تا آن‌جا که ممکن است ساده کنید.

الف) $\frac{a^2-4}{a+2}$ ب) $\frac{ax^3+x^3a}{2a^2x+2ax^2}$ ج) $\frac{y^2-4y+3}{y^2+2y-3}$

مسائل

۱ـ حاصل عبارت $\frac{s}{r+s}\times(\frac{1}{r}+\frac{1}{s})$ کدام یک از عبارت‌های زیر است.

الف) $\frac{s}{r}$ ب) $\frac{1}{s}$ ج) $\frac{1}{r}$

۲ـ اگر $A=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $B=\frac{2x}{1+x^2}$ ثابت کنید $A^2+B^2=1$

۳ـ عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{2a^2x^3}{4ax^2}$

ب) $\frac{3x^2-9x}{x^2-9}$

ج) $\frac{x^2-8x+7}{x^2-1}$

د) $\frac{y^2z+y^3}{z^2y+z^3}$

۴ـ حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{4x^2}{x+1}\times\frac{x^2-1}{x^2-x}$ ب) $\frac{6x^2-15xy}{9x^2y^2}\div\frac{4x^2-25y^2}{2x^2y+5xy^2}$

۵ـ عبارت گویایی بیابید که اگر در $\frac{x^2-y^2}{4x+y}$ ضرب شود، حاصل آن برابر $x+y$ شود.

۶ـ ساده شده عبارت $\frac{5x^2}{x^2-2x}\times\frac{x^2-4}{10x}$ کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

الف) $\frac{x+2}{2}$ ب) $\frac{x+2}{2x}$ ج) $x-1$

۷ـ دانش‌آموزی در برگه امتحانی خود به صورت زیر نوشته است. اشتباهات او را توضیح دهید.

الف) $\frac{x+3}{2x+5}+\frac{x+2}{2x+5}=\frac{2x+5}{2x+5}=0$

ب) $\frac{3x+1}{2}-\frac{1-x}{2}=\frac{3x+1-1-x}{2}=\frac{2x}{2}=x$

ج) $\frac{-4yx^2}{2^2y}=\frac{-4yx^2}{4y}=-x^2=x^2$

تقسیم چند جمله‌ای‌ها

در ساده‌کردن عبارت‌های گویا، حالت‌هایی پیش می‌آید که نتیجه ساده‌شدن یک چند جمله‌ای است.

به‌عنوان مثال، می‌دانیم $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ ، بنابراین

$$\frac{x^3+1}{x+1}=x^2-x+1$$

در این مثال گوییم : x^3+1 بر $x+1$ بخش‌پذیر است و حاصل تقسیم x^3+1 بر $x+1$ برابر است با x^2-x+1 . یک مسئله‌ی مهم در چند جمله‌ای‌ها آن است که اگر بدانیم یک چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای دیگری بخش‌پذیر است، حاصل تقسیم این چند جمله‌ای‌ها را چگونه محاسبه می‌کنیم؟

قاعده تقسیم دو چند جمله‌ای بر هم

تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

در تقسیم یک جمله‌ای‌ها بر هم از قاعده‌ی ساده‌کردن کسرها استفاده می‌شود. ابتدا ضرایب عددی یک جمله‌ای‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم و سپس بقیه‌ی جملات را با استفاده از رابطه‌ی $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ ساده می‌کنیم.

مثال: یک جمله‌ای $7x^3$ را بر یک جمله‌ای $14x^2$ تقسیم کنید.

$$\frac{7x^3}{14x^2}=\frac{7}{14}\times\frac{x^3}{x^2}=\frac{1}{2}x$$

مثال: یک جمله‌ای «$-20x^4y^3z$» را بر یک جمله‌ای $5x^3y^2z$ تقسیم کنید.

$$\frac{-20x^4y^3z}{5x^3y^2z}=\frac{-20}{5}\times\frac{x^4}{x^3}\times\frac{y^3}{y^2}\times\frac{z}{z}=-4xy$$

تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

در تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یک جمله‌ای‌ها از درستی تساوی $(\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c})$ ، استفاده می‌شود. هر چند جمله‌ای مجموعی از یک جمله‌ای‌ها است و در تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای، آن را به صورت جمع چند تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای می‌نویسیم و آن را ساده می‌کنیم.

مثال: چندجمله‌ای $4x^3y^2+6x^2y^3-12x^5y$ را بر یک جمله‌ای $2xy$ تقسیم کنید.

$$\frac{4x^3y^2+6x^2y^3-12x^5y}{2xy}=\frac{4x^3y^2}{2xy}+\frac{6x^2y^3}{2xy}+\frac{-12x^5y}{2xy}=2x^2y+3xy^2-6x^4$$

تمرین در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

۱) $\dfrac{14a^2b}{7ab}$

۲) $\dfrac{\sqrt{6}x^4y^3z}{\sqrt{2}x^2z}$

۳) $\dfrac{2xy^2-4x^2yz}{10xy}$

۴) $\dfrac{15a^3b^5-30a^2b^4-25a^3b^3}{25a^2b^3}$

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

در این قسمت فقط چندجمله‌ای‌های یک متغیره را درنظر می‌گیریم. به عنوان مثال تقسیم چندجمله‌ای $2x^3-x^2+x+4$ بر چندجمله‌ای $x+1$ را بررسی می‌کنیم. در تقسیم $2x^3-x^2+x+4$ بر $x+1$، اولی را مقسوم و دومی را مقسوم‌علیه و حاصل تقسیم را خارج قسمت می‌نامند. عمل تقسیم را در شکلی مانند زیر که همانند تقسیم اعداد طبیعی است نشان می‌دهند.

$$\begin{array}{r|l} \text{مقسوم} & \text{مقسوم‌علیه} \\ \hline & \text{خارج قسمت} \end{array}$$

در یک عمل تقسیم، درجه‌ی مقسوم باید بزرگتر یا مساوی درجه‌ی مقسوم علیه باشد.

مرحله‌ی اول: ابتدا مقسوم و مقسوم‌علیه را به شکل استاندارد (از بالاترین توان به کمترین توان متغیر) می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2+x+4 & x+1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

مرحله‌ی دوم: اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و حاصل را در محل خارج‌قسمت می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2+x+4 & x+1 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

مرحله‌ی سوم: خارج قسمت به‌دست آمده در مرحله‌ی قبل را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و قرینه‌ی آن را زیر مقسوم می‌نویسیم و با مقسوم جمع می‌کنیم. این عمل، همان تفریق کردن حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم‌علیه، از مقسوم است.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2+x+4 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^3-2x^2 & 2x^2 \\ \hline \quad -3x^2+x+4 & \end{array}$$

مرحله‌ی چهارم: چندجمله‌ای به دست آمده‌ی جدید را مانند یک مقسوم جدید می‌گیریم و مراحل دوم و سوم را تکرار می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2+x+4 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^3-2x^2 & 2x^2-3x \\ \hline \quad -3x^2+x+4 & \\ \quad\ \ 3x^2+3x & \\ \hline \qquad 4x+4 & \end{array}$$

مرحله‌ی پنجم: مرحله‌ی چهار را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا در محل مقسوم‌های جدید یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه مقسوم‌علیه به‌دست آید.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2+x+4 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^3-2x^2 & 2x^2-3x+4 \\ \hline \quad -3x^2+x+4 & \\ \quad\ \ 3x^2+3x & \\ \hline \qquad 4x+4 & \\ \qquad -4x-4 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

در این مرحله، اگر مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر باشد، در محل مقسوم‌های جدید چندجمله‌ای صفر به‌دست می‌آید. اما، اگر مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر نباشد، با این عملیات، در محل مقسوم‌های جدید یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه مقسوم علیه به‌دست می‌آید که آن را باقیمانده عمل تقسیم می‌نامند.

مثال: با تقسیم $5x^3+4x^2-x+3$ بر چندجمله‌ای x^2+1، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید. آیا چندجمله‌ای $5x^3+4x^2-x+3$ بر چندجمله‌ای x^2+1 بخش‌پذیر است؟

$$\begin{array}{l|l} 5x^3+4x^2-x+3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -5x^3-5x & 5x+4 \\ \hline \qquad 4x^2-6x+3 & \\ \quad -4x^2-4 & \\ \hline \qquad\quad -6x-1 & \end{array}$$

با توجه به آن که باقیمانده این تقسیم صفر نیست، مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر نیست.

در هر عمل تقسیم، مقسوم برابر است با حاصل‌ضرب مقسوم‌علیه در خارج‌قسمت و جمع با باقیمانده.

از این مطلب می‌توان برای بررسی درستی یک تقسیم استفاده کرد. اگر تساوی صفحه‌ی قبل برقرار شود می‌توان اطمینان داشت که تقسیم به درستی انجام شده است.

برای مثال، اگر تقسیم صفحه‌ی قبل به‌درستی انجام شده باشد، باید تساوی زیر برقرار باشد.

$$5x^3+4x^2-x+3=(x^2+1)(5x+4)-6x-1$$

تساوی بالا به معنای آن است که کسر $\frac{5x^3+4x^2-x+3}{x^2+1}$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\frac{5x^3+4x^2-x+3}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(5x+4)-6x-1}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(5x+4)}{x^2+1}+\frac{-6x-1}{x^2+1}$$

$$=5x+4-\frac{6x+1}{x^2+1}$$

مثال: با تقسیم چندجمله‌ای اولی بر چندجمله‌ای دومی، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید. آیا چندجمله‌ای $x^3+3x^2+9x+27$ بر چندجمله‌ای $x+3$ بخش‌پذیر است؟

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+9x+27 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2 & x^2+9 \\ \hline 9x+27 & \\ -9x-27 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

از آن‌جا که باقیمانده صفر است، مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر بوده است و داریم

$$\frac{x^3+3x^2+9x+27}{x+3}=x^2+9$$

تمرین در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

۱) $6x^5+3x^2+1 \;\big|\; x^2+1$

۲) $x^3+x^4+3 \;\big|\; 1-2x^2$

مسائل

۱ــ تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{24x^2y^2}{4xy^2}$ ب) $\frac{6x^3b^2+3x^2b}{3x^2b}$ ج) $(x^3-2x^2+x)\div(x^2-x)$

۲ــ تقسیم $-2x^2+4x+7$ بر $x-2$ را انجام دهید. خارج‌قسمت و باقیمانده را تعیین و درستی عمل تقسیم را بررسی کنید.

۳ــ در تقسیم $\frac{x^3+a}{x+1}$ مقدار a چقدر باشد تا باقیمانده صفر شود؟

۴ــ ساده شده عبارت $\frac{y^3-y^2-y+1}{1-y}$ برابر کدام‌یک از عبارت‌های زیر است؟

الف) $1-y+y^2$ ب) $1-y^2$ ج) y^3

۵ــ اگر در تقسیم $3x^3+4x+m$ بر $x+2$ باقیمانده صفر شود m چیست؟

۶ــ خارج قسمت و باقیمانده هر یک از تقسیم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $5x+9x^3-4 \,\big|\, \underline{3x+2}$ ب) $8y^3-125 \,\big|\, \underline{5-2y}$

۷ــ مساحت یک مستطیل برحسب a، به‌صورت $2a^3-4a+2$ و عرض آن برابر $a-1$ می‌باشد. طول آن برحسب a چیست؟

عبارت‌های رادیکالی

عبارت‌های جبری که در آن‌ها محاسبات ریشه‌گیری وجود دارد، عبارت‌های رادیکالی می‌نامند. به عنوان مثال، عبارت‌های زیر، عبارت‌های رادیکالی هستند.

$$\sqrt{۱+x^۲} \quad , \quad \sqrt{x^۲+y^۲}-xy^۲ \quad , \quad \frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt[۳]{y}}{\sqrt[۳]{x^۳+x+۴}}$$

تمرین در کلاس

۱ــ محیط و مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن z و طول یک ضلع آن x است را به عنوان دو عبارت رادیکالی به دست آورید.

۲ــ اگر مربعی با مساحت z داشته باشیم و طول اضلاع آن را x واحد افزایش دهیم، مساحت مربع اولیه چقدر افزایش می‌یابد؟

عبارت‌های رادیکالی نیز نشان‌دهنده اعدادی هستند که برحسب مقدار متغیرهایشان تعیین می‌شوند. به همین خاطر عبارت‌های رادیکالی را می‌توان باهم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کرد یا به توان رسانید یا ریشه‌ی آن‌ها را محاسبه کرد. با استفاده از قواعد محاسباتی مربوط به جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و توان‌رسانی و ریشه‌گیری می‌توان این محاسبات را انجام داد و نتیجه را تا آن‌جا که ممکن است ساده نمود.

در یک عبارت رادیکالی که به صورت تقسیم دو عبارت است، اگر در مخرج کسر عمل ریشه‌گیری وجود داشته باشد و با عملیات جبری، نمایشی از آن کسر را به دست آوریم که در مخرج کسر فقط چندجمله‌ای وجود داشته باشد، این عمل را گویاکردن مخرج آن عبارت رادیکالی می‌نامند.

مثال: مخرج عبارت $\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ را گویا کنید.

کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{x}$ ضرب کنیم تا مخرج کسر از حالت رادیکالی خارج شود.

$$\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱\times\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{۲x}$$

مثال: مخرج عبارت رادیکالی $\frac{۲}{\sqrt{a}-۱}$ را گویا کنید.

صورت و مخرج این عبارت را در $\sqrt{a}+۱$ ضرب می‌کنیم. به این عبارت مزدوج $\sqrt{a}-۱$ می‌گویند.

$$\frac{۲}{\sqrt{a}-۱}=\frac{۲(\sqrt{a}+۱)}{(\sqrt{a}-۱)(\sqrt{a}+۱)}=\frac{۲(\sqrt{a}+۱)}{(\sqrt{a})^۲-۱^۲}$$

$$=\frac{۲(\sqrt{a}+۱)}{a-۱}$$

مثال: مخرج عبارت رادیکالی $\frac{۱}{\sqrt{x}+۲\sqrt{y}}$ را گویا کنید.

با استفاده از اتحاد مزدوج اگر مخرج این عبارت را در $\sqrt{x}-۲\sqrt{y}$ ضرب کنیم، مخرج از حالت رادیکالی خارج می‌شود، زیرا

$$(\sqrt{x}+۲\sqrt{y})\times(\sqrt{x}-۲\sqrt{y})=(\sqrt{x})^۲-(۲\sqrt{y})^۲=x-۴y$$

بنابراین صورت و مخرج این عبارت را در $\sqrt{x}-۲\sqrt{y}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\sqrt{x}+۲\sqrt{y}}=\frac{۱\times(\sqrt{x}-۲\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+۲\sqrt{y})\times(\sqrt{x}-۲\sqrt{y})}=\frac{\sqrt{x}-۲\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^۲-(۲\sqrt{y})^۲}=\frac{\sqrt{x}-۲\sqrt{y}}{x-۴y}$$

مثال: حاصل عبارت $۱+\sqrt{x}+\frac{x}{۱-\sqrt{x}}$ را حساب کنید و به ساده‌ترین صورت آن را بنویسید.

$$۱+\sqrt{x}+\frac{x}{۱-\sqrt{x}}=\frac{(۱+\sqrt{x})(۱-\sqrt{x})+x}{۱-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{۱-(\sqrt{x})^۲+x}{۱-\sqrt{x}}=\frac{۱-x+x}{۱-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{۱}{۱-\sqrt{x}}=\frac{۱\times(۱+\sqrt{x})}{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{۱+\sqrt{x}}{۱-x}$$

مسائل

۱ــ مخرج عبارت‌های رادیکالی زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۲\sqrt{x}}{۳\sqrt{y}}$ ب) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}$

ج) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}}$ د) $\frac{\sqrt{a}-۱}{\sqrt{a}+۱}$

هـ) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

۲ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{۱}{\sqrt{a}-۱}-\frac{۱}{\sqrt{a}+۱}$ ب) $\frac{۱-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$

ج) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

۳ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x})(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x})$

ب) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$