۳

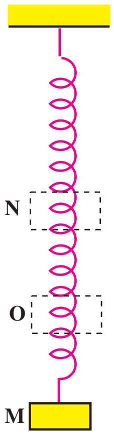
حرکت نوسانی

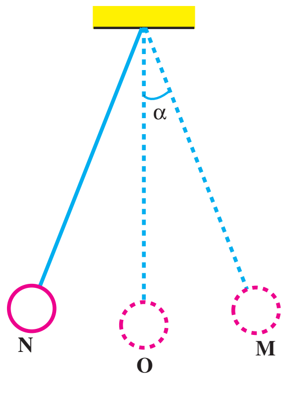
هاینریش هرتز

(۱۸۹۴ـ۱۸۵۷م)

حرکت نوسانی

نگاهی به فصل: گردش زمین به دور خورشید، گردش ماه به دور زمین، ضربان قلب انسان، ارتعاش تارهای کمانچه، تار و یا سه‌تار، بالا و پایین رفتن تاب بازی، پیدایش فصل‌های سال، طلوع و غروب خورشید، یا حرکت یک آونگ ساده (شکل ۳ــ۱ــ الف)، حرکت وزنه‌ای که به یک فنر متصل است (شکل ۳ــ۱ــ ب) و مثال‌های بسیار دیگری مانند این‌ها، حرکت‌های دوره‌ای هستند که با گذشت زمان بارها تکرار می‌شوند. در حرکت‌های دوره‌ای، متحرک پس از طی زمان معینی به وضعیت اولیه برمی‌گردد و حرکت خود را از نو آغاز می‌کند. در این فصل پس از معرفی پدیده‌های دوره‌ای به توصیف حرکت هماهنگ ساده می‌پردازیم ؛ زیرا شناخت و بررسی این حرکت، پایه و اساس مناسبی برای درک امواج و انتشار آن‌ها فراهم می‌کند.





شکل ۳ــ۱

۳ــ۱ــ حرکت هماهنگ ساده

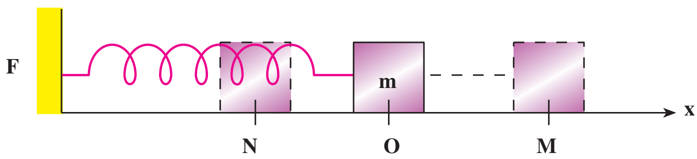
یک حرکت نوسانی را **هماهنگ ساده** می‌نامیم ؛ وقتی مسیر رفت و برگشت متحرک روی یک پاره‌خط حول نقطه‌ای واقع در وسط آن باشد. برای مثال، حرکت آونگ (شکل ۳ ــ ۱ ــ الف)، وقتی زاویه‌ی α خیلی کوچک باشد، به گونه‌ای که بتوان تانژانت و سینوس آن را برابر گرفت و هم‌چنین بالا و پایین رفتن وزنه‌ی آویخته به فنر (شکل ۳ــ۱ــ ب). در این دو حرکت، متحرک، دربازه‌های زمانی یکسان، از ابتدای پاره خط، یعنی از نقطه‌ی M به نقطه‌ی N می‌رود و برمی‌گردد و به این ترتیب، حول نقطه‌ی O واقع در

وسط پاره خط نوسان می‌کند. از این پس دستگاهی را که دارای حرکت هماهنگ ساده است نوسانگر هماهنگ ساده می‌نامیم. نوسانگر وزنه ــ فنر در شکل ۳ــ۱ــ ب الگوی مناسبی برای بررسی حرکت نوسانی ساده است. ابتدا برخی مفهوم‌ها را در این حرکت معرفی می‌کنیم.

دوره و بسامد: در حرکت هماهنگ ساده بازه‌ی زمانی بین دو وضعیت یکسان و متوالی را **دوره** می‌نامیم. به عبارت دیگر دوره، زمان یک نوسان (زمان یک رفت و برگشت به وضع قبلی) است و با T نشان داده می‌شود. همچنین تعداد دوره‌ها یا تعداد نوسان‌ها را در یک ثانیه **بسامد** می‌نامیم و آن را با f نشان می‌دهیم. یکای بسامد در SI، s^{-1} است که هرتز (Hz) نامیده می‌شود. با توجه به تعریف دوره، معلوم می‌شود که بسامد وارون دوره است:

$$f = \frac{1}{T} \qquad (۳ــ۱)$$

دامنه‌ی نوسان: جسمی به جرم m را در نظر بگیرید که به سر آزاد یک فنر متصل است و می‌تواند در راستای محور x، روی یک سطح افقی که اصطکاک آن ناچیز است، جابه‌جا شود (شکل ۳ــ۲). در حالتی که فنر طول عادی خود را دارد برایند نیروهای وارد به جسم صفر و در نتیجه جسم در حال تعادل است.



شکل ۳ــ۲

حال اگر مبدأ محور مختصات، یعنی نقطه‌ی O را منطبق بر مکان جسم در حالت تعادل اختیار نماییم و سپس جسم را تا نقطه‌ی M به سمت راست بکشیم و سپس رها کنیم، جسم حول وضع تعادلش (نقطه‌ی O) با حرکت هماهنگ ساده شروع به نوسان می‌کند. در ضمن نوسان جسم، فاصله‌ی آن از مبدأ تغییر می‌کند، امّا هیچ‌گاه فاصله‌ی آن از مبدأ بیش از OM یا ON نمی‌شود. این بیش‌ترین فاصله‌ی نوسانگر از مبدأ را **دامنه** می‌نامیم و معمولاً آن‌را با A نشان می‌دهیم.

نیروی بازگرداننده: در شکل ۳ــ۲، جهت نیروی فنر همواره به گونه‌ای است که می‌خواهد جسم را به حالت تعادل (نقطه‌یO) برگرداند، این نیرو، **نیروی بازگرداننده** نامیده می‌شود. نیروی

بازگرداننده‌ی فنر با تغییر طول فنر، متناسب است و از رابطه‌ی زیر که به قانون هوک معروف است، به‌دست می‌آید :

$$F = -kx \qquad (۳\_۲)$$

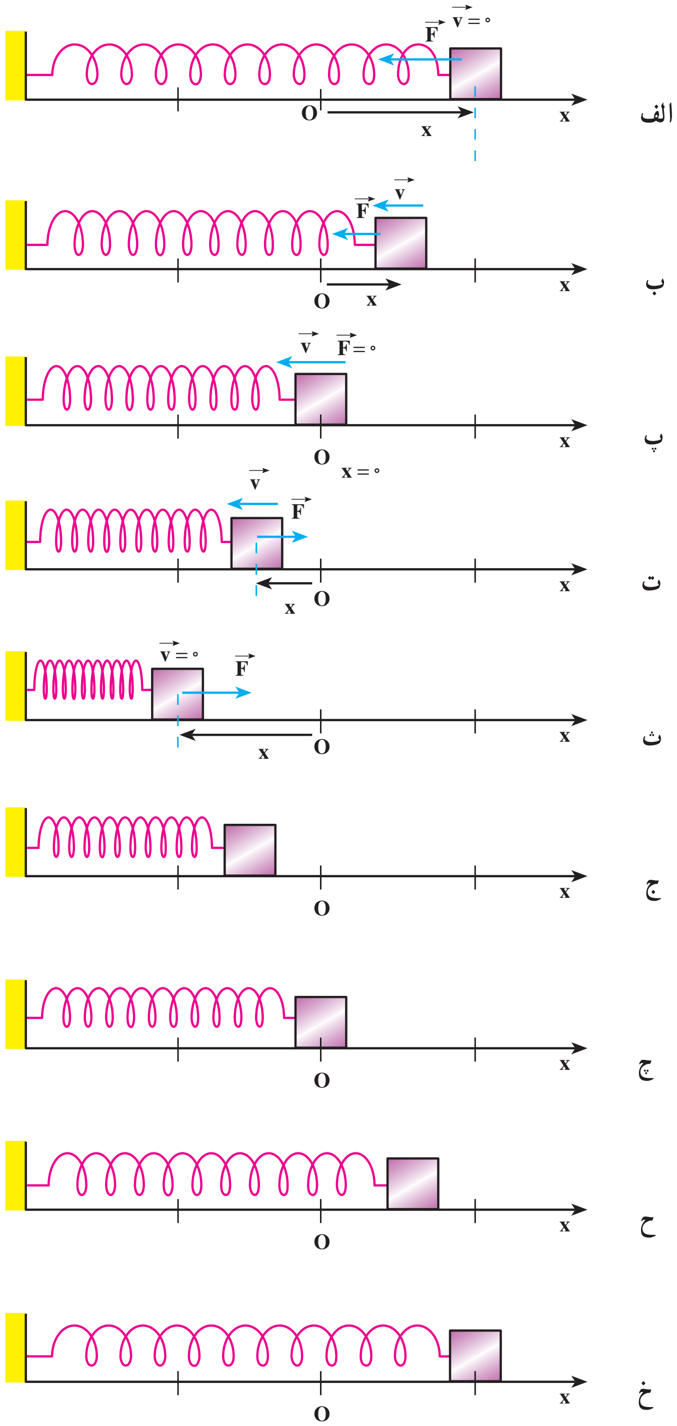
در این رابطه، x تغییر طول فنر، F نیروی بازگرداننده‌ی فنر و k ثابت‌تناسب است که به ویژگی‌های فنر بستگی دارد و آن را ثابت نیروی فنر می‌نامیم. یکای k در SI نیوتون بر متر (N/m) است. علامت منفی در رابطه‌ی ۳ــ۲ نشان می‌دهد که جهت نیروی بازگرداننده‌ی فنر همواره خلاف جهت بردار مکان جسم است. هر دستگاهی که نیروی بازگرداننده‌ی آن از قانون هوک پیروی کند، حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت.

حال اثر نیروی بازگرداننده را در نوسانگر وزنه ــ فنر، در یک دوره، بررسی می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل ۳ــ۳ــ الف تا پ دیده می‌شود، اگر جسم را پس از خارج کردن از وضع تعادل رها کنیم، تحت اثر نیروی بازگرداننده به‌طرف وضع تعادل خود (نقطه‌ی O) برمی‌گردد و پس از رسیدن به نقطه‌ی O، به سبب داشتن انرژی جنبشی، به حرکتش به سمت چپ ادامه می‌دهد (شکل پ). از این لحظه به بعد، مکان و سرعت جسم منفی و نیروی بازگرداننده در جهت محور x و مثبت است. بنا به قانون دوم نیوتون، چون شتاب با نیروی برایند هم جهت است در این مرحله از حرکت شتاب نیز مثبت است. اما چون سرعت آن منفی است، حرکت جسم کند شونده است (شکل ت)؛ یعنی از سرعت آن کاسته می‌شود و در یک لحظه به صفر می‌رسد. در این لحظه فنر بیش‌ترین فشردگی یا تغییر طول را دارد و نیروی بازگرداننده بیشینه است (شکل ث).

فعالیت ۳ــ۱

دیدیم در لحظه‌ای که فنر بیش‌ترین فشردگی را پیدا می‌کند سرعت نوسانگر به صفر می‌رسد. اکنون با توجه به شکل‌های ۳ــ۳ــ ج تا خ نیروی وارد بر نوسانگر و همچنین مکان، سرعت و شتاب نوسانگر را پس از لحظه‌ی مذکور بررسی کنید.

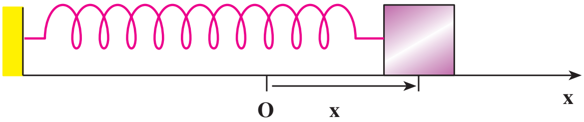


الف
$\vec{F}$ $\vec{v}=۰$
O
x
ب
$\vec{F}$ $\vec{v}$
O x
پ
$\vec{v}$ $\vec{F}=۰$
O
x = ۰
ت
$\vec{v}$ $\vec{F}$
x O
ث
$\vec{v}=۰$ $\vec{F}$
x O
ج
چ
ح
خ

شکل ۳ـ۳

۳ــ۲ــ معادله‌ی حرکت هماهنگ ساده

یک نوسانگر را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۳ــ۴ در فاصله‌ی x از وضع تعادل قرار دارد.



شکل ۳ــ۴

بنا به رابطه‌ی ۳ــ۲ نیروی وارد بر وزنه در این لحظه $F = -kx$ است ؛ اگر جرم وزنه m باشد بنابه قانون دوّم نیوتون داریم :

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad (۳ــ۳)$$

بنا به آن‌چه در فصل ۱ دیدیم، شتاب مشتق دوم مکان نسبت به زمان است ؛ یعنی :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

بنابراین $x = f(t)$ باید به صورتی باشد که مشتق دوم آن نسبت به زمان، با علامت منفی، با x متناسب باشد. با توجه به این که تابع سینوسی که در درس ریاضی خوانده‌اید، همین ویژگی را دارد، معادله‌ی حرکت هماهنگ ساده باید به صورت زیر باشد :

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (۴ــ۳)$$

اگر از رابطه‌ی ۳ــ۴ دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$$

با توجه به رابطه‌ی ۳ــ۴ می‌توان نوشت :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

از مقایسه‌ی رابطه‌ی اخیر با رابطه‌ی ۳ـ۳ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۳ـ۵)$$

ω را **بسامد زاویه‌ای** می‌نامیم. یکای بسامد زاویه‌ای رادیان بر ثانیه است. در رابطه‌ی ۳ـ۴، x مکان متحرک در لحظه‌ی t و A دامنه نوسان است (چرا؟) هم‌چنین $(\omega t + \varphi_0)$ فاز حرکت در لحظه‌ی t و φ_0 فاز حرکت در لحظه‌ی صفر یا فاز اولیه نامیده می‌شود ؛ اگر در لحظه‌ی t_1 فاز حرکت :

$$\varphi_1 = \omega t_1 + \varphi_0$$

و در لحظه‌ی t_2 فاز حرکت

$$\varphi_2 = \omega t_2 + \varphi_0$$

باشد، تغییر فاز بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 برابر است با :

$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0) = \omega(t_2 - t_1)$$

یا

$$\Delta\varphi = \omega \Delta t \qquad (۳ـ۶)$$

در رابطه‌ی ۳ـ۶ اگر $\Delta t = 1s$ باشد، $\Delta\varphi = \omega$ می‌شود ؛ یعنی، بسامد زاویه‌ای (ω) تغییر فاز در هر ثانیه است.

رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای و دوره‌ی‌تناوب: چون دوره‌ی تناوب تابع سینوسی، 2π است باید در هر دوره (یعنی در زمان T) فاز به اندازه‌ی 2π تغییر کند. بنابراین، با توجه به رابطه‌ی ۳ـ۶ می‌توان چنین نوشت :

$$\Delta\varphi = \omega T = 2\pi$$

و از آن‌جا

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (۳ـ۷)$$

اکنون با توجه به رابطه‌های ۳ـ۵ و ۳ـ۷ رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (۳ـ۸)$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۳ـ۹)$$

رابطه‌ی ۳ـ۸ نشان می‌دهد که دوره به ویژگی‌های فیزیکی نوسانگر بستگی دارد ؛ چنان که اگر وزنه را تغییر دهیم (m تغییر کند) یا فنر را عوض کنیم (k تغییر کند) دوره و در نتیجه بسامد نوسان‌های

دستگاه، تغییر می‌کند. از طرف دیگر دوره و بسامد به دامنه و فاز اولیه بستگی ندارد؛ به همین دلیل گفته می‌شود که بسامد یک نوسانگر از ویژگی‌های ساختاری آن نوسانگر است و بسامد طبیعی آن نامیده می‌شود.

مثال ۳ــ۱

معادله‌ی حرکت نوسانگری در SI به صورت زیر است.

$$x = ۰/۰۵\sin(۶۰\pi t + \frac{\pi}{۶})$$

الف: دامنه، دوره، بسامد و فاز اولیه‌ی این حرکت چه مقدار است؟

ب: مکان نوسانگر را در لحظه‌ی صفر و در لحظه‌ی $\frac{۱}{۳۶۰}$ ثانیه به‌دست آورید.

پاسخ

الف: باتوجه به معادله‌ی ۳ــ۴ و رابطه‌ی ۳ــ۷ نتایج زیر حاصل می‌شود.

دامنه: $A = ۰/۰۵m$

دوره: $\omega = \frac{۲\pi}{T} = ۶۰\pi \Rightarrow T = \frac{۱}{۳۰}s$

بسامد: $f = \frac{۱}{T} = ۳۰\,Hz$

و فاز اولیه: $\varphi_۰ = +\frac{\pi}{۶}$

ب: $x_۰ = ۰/۰۵\sin(۶۰\pi \times ۰ + \frac{\pi}{۶}) = ۰/۰۵ \times \frac{۱}{۲} = ۰/۰۲۵\,m$

$$x = ۰/۰۵\sin(۶۰\pi \times \frac{۱}{۳۶۰} + \frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = ۰/۰۵\sin\frac{\pi}{۳} = ۰/۰۲۵\sqrt{۳}m$$

مثال ۳ــ۲

دامنه‌ی نوسان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای ۲cm و بسامد آن ۲۰Hz است. اگر نوسانگر در لحظه‌ی $t = ۰$ در فاصله‌ی ۲+ سانتی‌متری مبدأ باشد معادله‌ی حرکت آن را بنویسید.

پاسخ

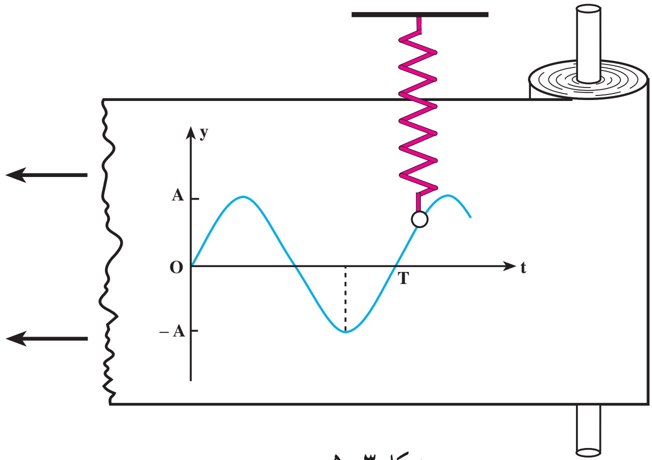
$$A = ۰/۰۲\,m \ , \ f = ۲۰\,Hz \ , \ \omega = ۲\pi f \Rightarrow \omega = ۴۰\pi,$$

$$x_0 = A\sin(\omega \times ۰ + \varphi_0)$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{+۲}{۲} = ۱ \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{۲}$$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = ۰/۰۲\sin(۴۰\pi t + \frac{\pi}{۲})$$

رسم نمودار یک نوسانگر هماهنگ ساده: یکی از روش‌های نمایش نمودار مکان ــ زمان حرکت نوسانگر هماهنگ ساده در شکل ۳ــ۵ نشان داده شده است.



شکل ۳ــ۵

در این روش، نوار کاغذی روی استوانه‌ای که در امتداد قائم قرار دارد پیچیده شده است. استوانه می‌تواند به‌طور یکنواخت حول محورش بچرخد. نوسانگر وزنه ــ فنر در امتداد قائم طوری نصب شده است که وزنه‌ی متصل به آن به‌وسیله‌ی نوک یک مداد با نوار کاغذی در تماس است. اگر نوسانگر ساکن باشد و نوار کاغذی به سمت چپ کشیده شود نوک مداد یک خط افقی (محور زمان) روی نوار ثبت می‌کند. اگر نوار ساکن باشد و نوسانگر را به نوسان درآوریم، نوک مداد خطی در امتداد قائم رسم می‌کند، که نشان‌دهنده‌ی جابه‌جایی نوسانگر است. حال اگر نوار کاغذی را با سرعت ثابت بکشیم و در همان حال نوسانگر را به نوسان واداریم نمودار حرکت هماهنگ ساده که یک نمودار سینوسی است رسم می‌شود، محور افقی زمان حرکت و محور قائم مکان متحرک را در هر لحظه نشان می‌دهد.

شما در درس ریاضی با چگونگی رسم نمودار تابع سینوسی آشنا شده‌اید. به همان ترتیب هم می‌توان

نمودار حرکت هماهنگ ساده را به کمک نقطه‌یابی رسم کرد. برای این کار نقطه‌های بیشینه، کمینه و محل برخورد نمودار را با محور زمان معلوم نموده و با مشخص کردن آن‌ها در صفحه‌ی مختصات x - t نمودار را رسم می‌کنیم. به مثال‌هایی در این باره توجه کنید :

مثال ۳ـ۳

دوره و دامنه‌ی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به ترتیب ۰/۲s و ۶cm است. معادله‌ی حرکت این نوسانگر را هنگامی که فاز اولیه‌ی آن صفر است بنویسید و نمودار مکان ــ زمان آن را رسم کنید.

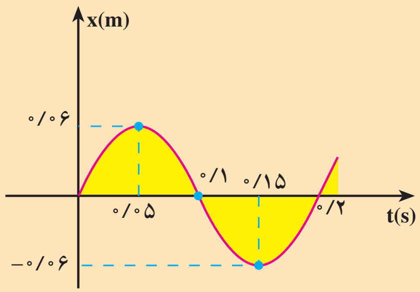
پاسخ

$$T = ۰/۲s \ , \ A = ۰/۰۶m \ , \ \omega = ۱۰\pi \frac{rad}{s} \ , \ \varphi_۰ = ۰$$

معادله‌ی حرکت : $x = A\sin(\omega t + \varphi_۰) \rightarrow x = ۰/۰۶ \sin ۱۰\pi t$

برای رسم نمودار تغییرات x برحسب t به‌کمک نقطه‌یابی به ترتیب زیر، عمل می‌کنیم :

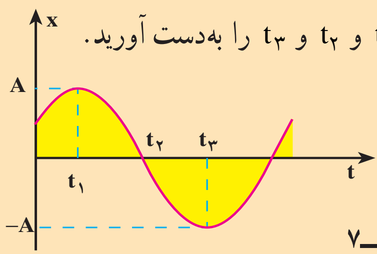
x	t
۰	۰
$۰/۰۶ = +A$	$\frac{T}{۴} = ۰/۰۵$
۰	$\frac{T}{۲} = ۰/۱$
$-۰/۰۶ = -A$	$\frac{۳T}{۴} = ۰/۱۵$
۰	$T = ۰/۲$



شکل ۳ـ۶

مثال ۳ـ۴

نمودار شکل ۳ـ۷ مربوط به حرکت هماهنگ ساده‌ای است که دوره‌ی آن ۰/۲ ثانیه و فاز اولیه‌ی آن $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است. زمان‌های $t_۱$ و $t_۲$ و $t_۳$ را به‌دست آورید.



شکل ۳ـ۷

پاسخ

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\pi \, rad/s \;,\; \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = A\sin(10\pi t + \frac{\pi}{6})$$

با توجه به شکل ۳ـ۷ در لحظه‌ی t_1 مکان با دامنه برابر است ؛ بنابراین :

$$+A = A\sin(10\pi t_1 + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \sin(10\pi t_1 + \frac{\pi}{6}) = 1$$

$$10\pi t_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 10\pi t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{30} s$$

در لحظه‌ی t_2 مکان صفر است ؛ بنابراین :

$$0 = A\sin(10\pi t_2 + \frac{\pi}{6})$$

$$(10\pi t_2 + \frac{\pi}{6}) = 0 \text{ یا } (10\pi t_2 + \frac{\pi}{6}) = \pi$$

از تساوی $(10\pi t_2 + \frac{\pi}{6}) = 0$ زمان t_2 منفی به دست می‌آید، در حالی‌که در شکل t_2 مثبت است ؛ بنابراین :

$$(10\pi t_2 + \frac{\pi}{6}) = \pi \Rightarrow \quad t_2 = \frac{1}{12} s$$

مقدار t_2 را می‌توانیم از رابطه‌ی $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$ نیز به‌دست آوریم (چرا؟)

در لحظه‌ی t_3 مکان $-A$ است ؛ بنابراین :

$$-A = A\sin(10\pi t_3 + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \sin(10\pi t_3 + \frac{\pi}{6}) = -1$$

$$10\pi t_3 + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_3 = \frac{2}{15} s$$

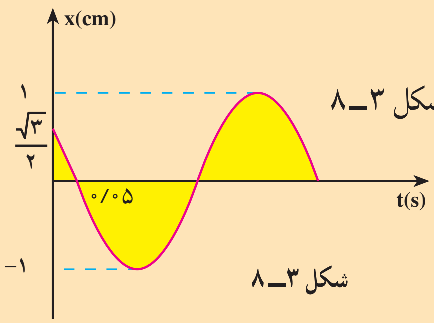
مقدار t_3 را می‌توانستیم از رابطه‌ی $t_3 = t_1 + \frac{T}{2}$ نیز به‌دست آوریم.

مثال ۳ـ۵

نمودار مکان ــ زمان نوسانگری در شکل ۳ـ۸ رسم شده است. مطلوب است :

الف : فاز اولیه‌ی نوسانگر

ب : دوره‌ی حرکت



شکل ۳ـ۸

پاسخ

الف : با توجه به شکل معلوم می‌شود که $A = 1 cm$ و در لحظه‌ی صفر $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} cm$ است ؛ بنابراین :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \sin(\omega \times 0 + \varphi_0) \Rightarrow \sin\varphi_0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3} rad \text{ یا } \varphi_0 = \frac{2\pi}{3} rad$$

اگر $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ باشد لازم است بعد از لحظه‌ی صفر، فاز حرکت از $\frac{\pi}{3}$ بیش‌تر شود و به $\frac{\pi}{2}$ برسد ؛ یعنی، سینوس آن باید افزایش یابد و به ۱ برسد، در حالی که نمودار پس از لحظه‌ی صفر، کاهش x را نشان می‌دهد. پس جواب $\varphi_0 = \frac{\pi}{3} rad$ قابل قبول نیست. اگر $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3} rad$ اختیار شود همان‌طور که انتظار داریم با افزایش فاز، مقدار آن به π می‌رسد و سینوس آن به صفر کاهش می‌یابد ؛ بنابراین $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3} rad$ قابل قبول است.

ب : معادله‌ی این حرکت در SI به صورت :

$$x = 0/01 \sin(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi}{3})$$

است. همان‌طور که در نمودار دیده می‌شود در لحظه‌ی $t = 0/05 s$ مکان متحرک صفر است ؛ بنابراین :

$$0 = 0/01 \sin(\frac{2\pi}{T} \times 0/05 + \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \frac{\pi}{10T} + \frac{2\pi}{3} = n\pi$$

چون در لحظه‌ی $t = 0/05 s$ برای اولین‌بار $x = 0$ شده است ؛ بنابراین به ازای $n = 1$ خواهیم داشت :

$$\frac{\pi}{10T} + \frac{2\pi}{3} = \pi \Rightarrow T = 0/3 s$$

۳ــ۳ــ معادله‌های سرعت و شتاب در حرکت هماهنگ ساده

الف ــ معادله‌ی سرعت: با توجه به این که سرعت، مشتق مکان نسبت به زمان است با مشتق‌گیری از رابطه‌ی ۳ــ۴ خواهیم داشت :

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (۳ـ۱۰)$$

معادله‌ی ۳ــ۱۰ نشان می‌دهد که سرعت به ازای $\cos(\omega t + \varphi_0) = \pm 1$ بیشینه می‌شود ؛ پس داریم :

$$v_{max} = A\omega \qquad (۳ـ۱۱)$$

در لحظه‌ای که $\cos(\omega t + \varphi_0) = \pm 1$ است، $\sin(\omega t + \varphi_0) = 0$ و در نتیجه $x = 0$ ؛ یعنی، سرعت بیشینه مربوط به لحظه‌ای است که نوسانگر درحال گذر از وضع تعادل است.

تمرین ۳ــ۱

الف : به کمک رابطه‌های ۳ــ۴ و ۳ــ۱۰ نشان دهید که $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ است.

ب : به کمک رابطه‌ی اخیر معلوم کنید که در چه مکانی سرعت نوسانگر صفر و یا بیشینه است؟

ب ــ معادله‌ی شتاب: می‌دانیم که شتاب مشتق سرعت نسبت به زمان، یا مشتق دوم مکان نسبت به زمان است ؛ در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی ۳ــ۴ یا ۳ــ۱۰ داریم :

$$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (۳ـ۱۲)$$

معادله‌ی ۳ــ۱۲ نشان می‌دهد که در حرکت هماهنگ ساده، شتاب نیز به‌طور دوره‌ای تغییر می‌کند و بیشینه‌ی آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

$$a_{max} = A\omega^2 \qquad (۳ـ۱۳)$$

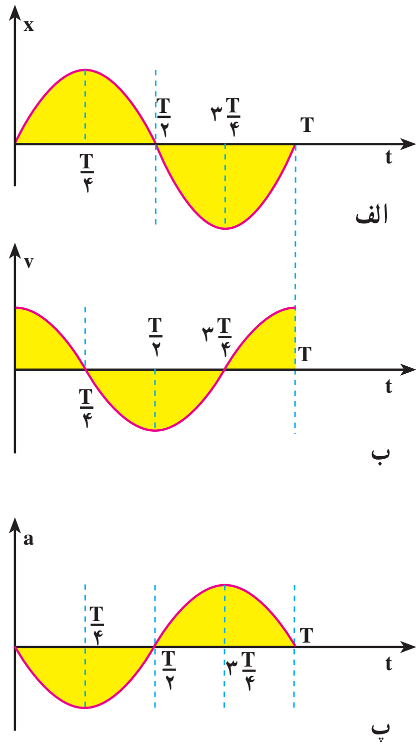
با استفاده از رابطه‌ی ۳ــ۴ می‌توان رابطه‌ی ۳ــ۱۲ را به‌صورت زیر نوشت :

$$a = -\omega^2 x \qquad (۳ـ۱۴)$$

که رابطه‌ی شتاب را با مکان نوسانگر به‌دست می‌دهد. این رابطه هم‌چنین نشان می‌دهد که بردار شتاب در خلاف جهت بردار مکان است.

در شکل‌های ۳ــ۹ــ الف ــ ب و پ، به‌ترتیب، نمودارهای مکان ــ زمان و سرعت ــ زمان و شتاب ــ زمان برای حرکت هماهنگ ساده‌ای که معادله‌ی آن به‌صورت $x = A\sin\omega t$ است نشان داده شده است.

همان‌طور که در این نمودارها دیده می‌شود در لحظه‌ی $t = ۰$ ، $x = ۰$ است. در این لحظه سرعت بیشینه و مثبت و شتاب صفر است. در لحظه‌ی $\frac{T}{۴}$ ، x بیشینه و مثبت، سرعت صفر و شتاب بیشینه و منفی است. در لحظه‌ی $\frac{T}{۲}$ ، $x = ۰$ ، سرعت بیشینه و منفی و شتاب صفر است. در لحظه‌ی $\frac{۳T}{۴}$ ، x بیشینه و منفی، سرعت صفر و شتاب بیشینه و مثبت است. در لحظه‌ی T، x صفر، سرعت بیشینه و مثبت و شتاب صفر است.



شکل ۳ــ۹

مثال ۳ــ۶

دامنه‌ی یک نوسانگر وزنه ــ فنر، ۵cm است. اگر جرم وزنه ۲۰g و ثابت فنر ۲N/m باشد :

الف : بیشینه‌ی سرعت و شتاب در SI چه اندازه است؟

ب : در لحظه‌ای که مکان نوسانگر +۴cm است، سرعت و شتاب آن را به‌دست آورید.

پاسخ

الف :
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{۲}{۰/۰۲}} = ۱۰ \, rad/s$$

$$v_{max} = A\omega = ۰/۰۵\times ۱۰ = ۰/۵\ m/s$$

$$a_{max} = A\omega^{۲} = ۰/۰۵\times ۱۰۰ = ۵\ m/s^{۲}$$

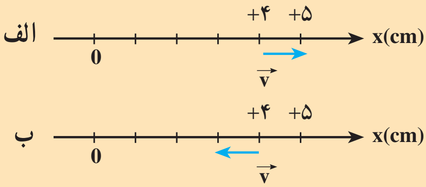
ب : در تمرین ۳ـ۱ دیدیم که $v = \pm\omega\sqrt{A^{۲}-x^{۲}}$ ، بنابراین

$$v = \pm ۱۰\sqrt{(۰/۰۵)^{۲}-(+۰/۰۴)^{۲}} = \pm ۰/۳\ m/s$$

علامت (±) نشان‌دهنده‌ی این است که در مکان $x = +۴cm$ ممکن است سرعت در جهت محور x یا در خلاف جهت محور x باشد ؛ یعنی، در لحظه‌ای که $x = +۴cm$ است ؛ ممکن است متحرک در حال دور شدن از مبدأ باشد که در این صورت $v = +۰/۳m/s$ است و یا درحال نزدیک شدن به مبدأ باشد که در این صورت $v = -۰/۳m/s$. این وضعیت به ترتیب، در شکل‌های ۳ـ۱۰ـ الف و ۳ـ۱۰ـ ب نشـان داده شده است.

$$a = -\omega^{۲}x = -۱۰۰\times(+۰/۰۴) = -۴m/s^{۲}$$

پس معلوم می‌شود در مکان $x = +۴cm$ شتاب منفی و در خلاف جهت محور x است.



شکل ۳ـ۱۰

۳ـ۴ـ انرژی مکانیکی نوسانگر (دستگاه جرم ـ فنر)

در فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم، هنگامی که فنری فشرده یا کشیده می‌شود در آن انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره می‌شود ؛ می‌توان نشان داد مقدار این انرژی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

$$U_e = \frac{۱}{۲}kx^{۲}$$

با جای‌گذاری x از معادله‌ی ۳ـ۴ خواهیم داشت :

$$U_e = \frac{۱}{۲}kA^{۲}\sin^{۲}(\omega t + \varphi_۰) \qquad (۱۵ـ۳)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۳ــ۵ می‌توان نوشت :

$$U_e = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \qquad (۳ــ۱۶)$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی ۳ــ۱۰ انرژی جنبشی این نوسانگر از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \qquad (۳ــ۱۷)$$

بنابراین، انرژی مکانیکی، یعنی مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی این نوسانگر به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید :

$$E = U_e + K = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)]$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \qquad (۳ــ۱۸)$$

از رابطه‌های ۳ــ۱۵ و ۳ــ۱۷ می‌توان دریافت که انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر وزنه‌ــفنر با زمان تغییر می‌کنند ؛یعنی، در لحظه‌ای که نوسانگر در فاصله‌ی x از مبدأ قرار دارد، بخشی از انرژی آن به صورت پتانسیل و بقیه به صورت جنبشی است.اما رابطه‌ی ۳ــ۱۸ نشان می‌دهد که انرژی مکانیکی نوسانگر مستقل از زمان است.

اگر چه ما انرژی مکانیکی را برای نوسانگر وزنه ــ فنر محاسبه کردیم، ولی می‌توان نشان داد که برای هر نوع نوسانگر ساده‌ی دیگری نیز، انرژی مکانیکی با مربع دامنه و مربع بسامد متناسب است.

تمرین ۳ــ۲

الف : رابطه‌ی انرژی جنبشی نوسانگر ساده را برحسب مکان نوسانگر (x) به‌دست آورید و با استفاده از آن وهم‌چنین رابطه‌ ی انرژی پتانسیل نوسانگر نشان دهید که انرژی مکانیکی آن به مکان بستگی ندارد.

ب : با استفاده از رابطه‌ای که به‌دست آوردید، مشخص کنید که در چه مکانی انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر صفر و یا بیشینه است.

تمرین ۳ــ۳

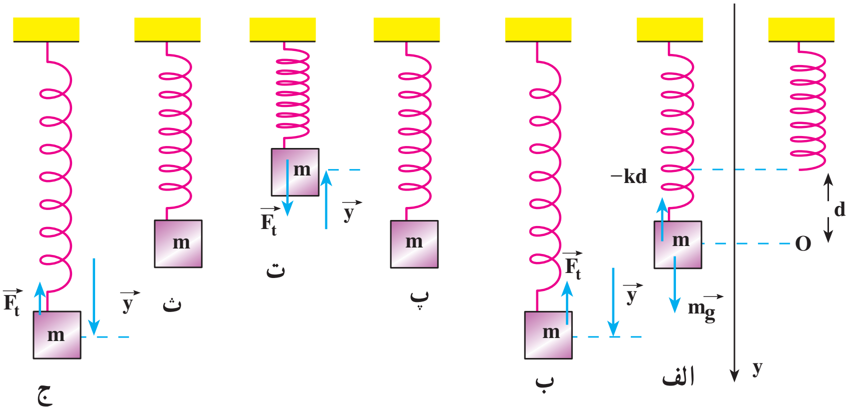
نمودار تغییرات U_e و K و E را نسبت به مکان برای یک دوره‌ی نوسانگر ساده رسم کنید.

۳ــ۵ــ نوسان وزنه ــ فنر در راستای قائم

حرکت هماهنگ ساده‌ی وزنه ــ فنر در راستای قائم در شکل‌های ۳ــ۱۱ــ الف تا ج نشان داده شده است. در شکل الف وزنه‌ای به جرم m از فنر آویخته شده است و دستگاه وزنه ــ فنر در حالت تعادل است. چنان که می‌بینید طول فنر بر اثر نیروی وزن mg به اندازه‌ی d افزایش یافته است. در واقع، به جسم دو نیروی mg (وزن جسم) روبه پایین، و $|\vec{F}| = kd$ از طرف فنر، رو به بالا وارد می‌شود. بنا به قانون دوم نیوتون و با توجه به این‌که جهت محور y رو به پایین انتخاب شده است می‌توان نوشت:

$$mg - kd = 0$$

$$d = \frac{mg}{k}$$



شکل ۳ــ۱۱

حال اگر وزنه را مطابق شکل ب قدری پایین کشیده و رها کنیم برایند نیروهای وارد بر وزنه در لحظه‌ای که فاصله‌ی آن از O برابر y باشد برابر است با:

$$F_t = mg - k(y + d)$$

با جایگذاری مقدار d در این رابطه داریم :

$$F_t = mg - k\left(y + \frac{mg}{k}\right) = -ky$$

بنابراین در این حالت نیز برایند نیروهای وارد به وزنه متناسب با فاصله‌ی آن از نقطه‌ی تعادل است که مبدأ (نقطه‌ی O) اختیار شده است و جهت آن خلاف جهت بردار مکان است. درنتیجه مکان وزنه‌ی آویخته را نیز می‌توان با استفاده از رابطه‌ی ۳ـ۴ به‌دست آورد. روابط دیگری را نیز که در حالت نوسان افقی وزنه ــ فنر به‌دست آمد می‌توان برای نوسان وزنه ــ فنر قائم به‌کار برد.

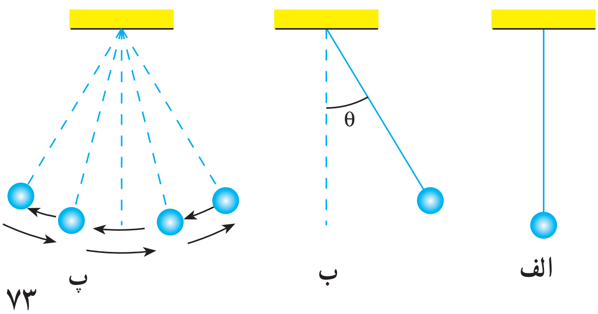
فعالیت ۳ـ۲

فنر سبکی انتخاب کنید و با آویختن یک وزنه به آن ثابت نیروی فنر را اندازه‌گیری کنید. سپس با خارج کردن وزنه از وضع تعادل آن را به نوسان درآورید. دوره‌ی نوسان را یک بار با شمارش تعداد نوسان‌ها در یک زمان معین و بار دیگر با استفاده از رابطه‌ی $T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ محاسبه نموده و نتایج حاصل را با یک‌دیگر مقایسه کنید. روش کار گروه و نتیجه‌ی آن را به کلاس گزارش کنید.

۳ـ۶ـ آونگ ساده

آونگ ساده وزنه‌ی کوچکی است به جرم m که با نخ سبکی به یک نقطه آویخته شده است. در حالت تعادل، آونگ در امتداد قائم قرار دارد (شکل ۳ـ۱۲ـ الف).

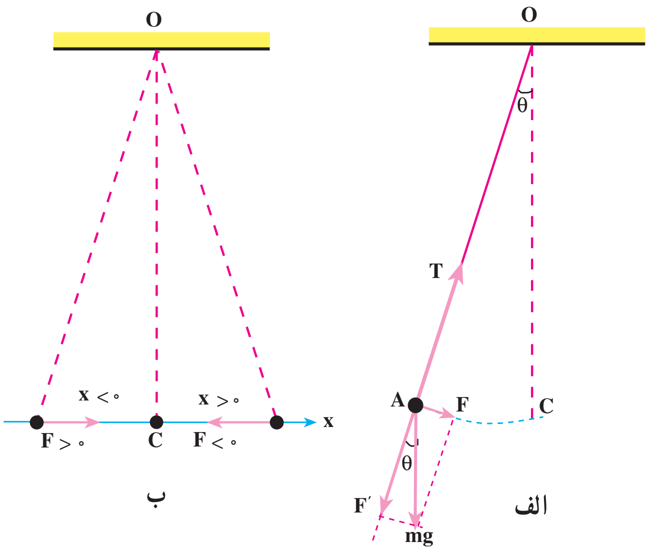
اگر وزنه را پس از خارج کردن آونگ از وضع تعادل رها کنیم (شکل ۳ـ۱۲ـ ب) حول وضع تعادلش نوسان می‌کند (شکل ۳ـ۱۲ـ پ). در نوسان آونگ، نیروی بازگرداننده، مؤلفه‌ی نیروی وزن جسم در راستای مماس بر مسیر است.



شکل ۳ـ۱۲

اگر زاویه‌ی انحراف اولیه از وضع قائم (θ) به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، مسیر حرکت وزنه تقریباً یک پاره‌خط افقی است (شکل ۳ــ۱۳ــ ب). در این صورت، وزنه مانند وزنه‌ی متصل به فنر یک حرکت هماهنگ ساده با دامنه‌ی کم (حرکت نوسانی کم‌دامنه) انجام می‌دهد.

محاسبه‌ی دوره‌ی آونگ ساده‌ی کم‌دامنه: در آونگ ساده اگر اصطکاک قابل چشم‌پوشی و جرم نخ ناچیز باشد، بر وزنه‌ی آونگ نیروی وزن ($m\vec{g}$) و نیروی کشش نخ ($\vec{T}$) وارد می‌شود. همان‌طور که شکل ۳ــ۱۳ــ الف نشان می‌دهد نیروی کشش نخ در امتداد نخ است و در هر لحظه بر مسیر حرکت وزنه عمود است.



شکل ۳ــ۱۳

بنابراین، در راستای مماس بر مسیر، مؤلفه ندارد. مؤلفه‌ی نیروی وزن در امتداد مماس بر مسیر $F = mg\sin\theta$ و در امتداد عمود بر مسیر $F' = mg\cos\theta$ است. مؤلفه‌ی مماس بر مسیر که نیروی بازگرداننده است می‌خواهد آونگ را به وضع تعادل برگرداند.

دیدیم که اگر زاویه‌ی انحراف آونگ از وضع تعادل (θ) کوچک باشد، مسیر حرکت وزنه تقریباً یک خط راست افقی است ؛ در این صورت، اگر طول آونگ را با l نمایش دهیم، $\sin\theta \simeq \theta = \frac{x}{l}$ است و می‌توان نوشت :

$$|F| = mg\theta = mg\frac{x}{l}$$

همان‌گونه که در شکل ۳ــ۱۳ــ ب دیده می‌شود مؤلفه‌ی نیروی وزن جسم در راستای مماس بر مسیر و همواره در خلاف جهت بردار مکان است. بنابراین :

$$F = -mg\frac{x}{l}$$

همان‌طور که می‌بینید، نیروی بازگرداننده از قانون هوک (رابطه‌ی ۳ــ۲) پیروی می‌کند و حرکت آونگ ساده‌ی کم دامنه یک حرکت هماهنگ ساده است.

اکنون با توجه به قانون دوم نیوتون داریم :

$$F = ma \Rightarrow \quad mg\frac{x}{l} = ma$$

$$a = -\frac{g}{l}x \qquad (۱۹\_۳)$$

از رابطه‌ی ۳ـ۱۴ و ۳ـ۱۹ نتیجه می‌گیریم که :

$$\omega^۲ = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

و

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (۲۰\_۳)$$

مثال ۳ـ۷

اندازه‌ی دوره و بسامد حرکت نوسانی کم‌دامنه‌ی یک آونگ ساده به طول ۴۰cm چقدر است ؟ ($g = ۱۰ m/s^۲$) .

پاسخ

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{۰/۴}{۱۰}} = ۲\pi \times \frac{۲}{۱۰} \approx ۱/۲۵ s$$

$$f = \frac{۱}{T} = ۰/۸ Hz$$

مثال ۳ـ۸

طول آونگ ساده‌ی کم‌دامنه باید چند سانتی‌متر باشد تا بتواند در هر دقیقه ۳۰ نوسان انجام دهد؟ ($g = ۹/۸ m/s^۲$ و $\pi^۲ = ۱۰$) .

پاسخ

$$T = \frac{t}{n} = \frac{۶۰}{۳۰} = ۲s$$

$$T^۲ = ۴\pi^۲\frac{l}{g}$$

$$۴ = ۴ \times ۱۰ \times \frac{l}{۹/۸}$$

$$l = ۰/۹۸ m = ۹۸ cm$$

فعالیت ۳ـ۳

۱ـ به کمک یک گلوله و قطعه نخی به طول ۴۰cm آونگ ساده‌ای بسازید و دوره‌ی آن را به ترتیب با زاویه‌های انحراف ۴، ۶ و ۲۰ درجه اندازه بگیرید.

۲ـ گلوله‌ی آونگی را که ساخته‌اید به ترتیب، با چند گلوله‌ی دیگر تعویض کنید. سپس دوره‌ی هریک را با زاویه‌ی انحراف ۶ درجه اندازه بگیرید.

۳ـ طول آونگ‌هایی را که ساخته‌اید تغییر دهید و دوره‌ی نوسان آن‌ها را با زاویه‌ی انحراف ۶ درجه اندازه بگیرید.

نتیجه‌ی فعالیت گروه را در کلاس به بحث بگذارید.

فعالیت ۳ـ۴

به کمک یک آونگ ساده شتاب گرانش را در محل سکونت خود اندازه‌گیری کنید. روش کار و نتیجه‌ی اندازه‌گیری را به کلاس گزارش کنید.

۳ـ۷ـ تشدید

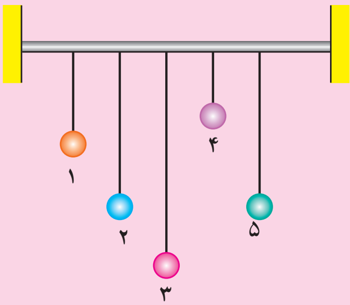
در بخش‌های قبل دیدیم که وقتی یک نوسانگر ساده نظیر آونگ و یا دستگاه وزنه ـ فنر را از وضع تعادل منحرف می‌کنیم و آن را برای نوسان آزاد می‌گذاریم، دستگاه حول وضع تعادل خود شروع به نوسان می‌کند. این حرکت نوسانی، **نوسان طبیعی یا آزاد دستگاه** نامیده می‌شود. بسامد (یا دوره‌ی) نوسان طبیعی از ویژگی‌های ساختاری نوسانگر است؛ مثلاً، بسامد آونگ ساده‌ی کم دامنه به طول آونگ (l) بستگی دارد؛ یعنی، اگر با دادن انرژی به‌یک آونگ دامنه‌ی نوسان آن را افزایش دهیم (به‌طوری که زاویه‌ی انحراف آونگ کوچک باقی بماند) بسامد نوسان‌های آن تغییر نمی‌کند، در حالی که برای تغییر بسامد، لازم است طول آونگ را تغییر دهیم.

هنگامی که نوسانگر را از حالت تعادل خارج می‌کنیم و آن را به نوسان درمی‌آوریم، به علت نیروهای اتلافی از قبیل اصطکاک و مقاومت هوا، دامنه‌ی نوسان آن به‌تدریج کاهش می‌یابد و دستگاه پس از چند نوسان می‌ایستد. این نوسان‌ها را **نوسان میرا** می‌نامیم. ساده‌ترین مثال برای نوسان میرا آونگ ساده و نیز تاب بازی در بوستان‌هاست. می‌دانید هنگامی که تاب را به نوسان درمی‌آوریم و آن را رها

می‌کنیم پس از تعدادی نوسان می‌ایستند ؛ ولی اگر بخواهیم تاب به نوسان خود ادامه دهد باید به آن نیرو وارد کنیم ؛ مثلاً، می‌توانیم پس از یک رفت و برگشت، هنگامی که تاب می‌خواهد نوسان بعدی را شروع کند به آن نیرو وارد کنیم. در این حالت دوره‌ی وارد کردن نیرو با دوره‌ی نوسان تاب برابر است. با اعمال این نیرو دامنه‌ی نوسان افزایش می‌یابد و به یک مقدار بیشینه می‌رسد و از این پس حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد. در این حالت نیروی اعمال شده اثر نیروهای اتلافی را خنثی می‌کند.

فعالیت ۳ــ۵

مطابق شکل ۳ــ۱۴به یک میله‌ی افقی آونگ‌های ساده‌ای با طول‌های متفاوت ولی جرم یکسان بیاویزید، به‌طوری که طول آونگ‌های شماره‌ی ۲ و ۵ با یکدیگر برابر باشد. اکنون آونگ شماره‌ی ۵ را از وضع تعادل خارج و آن را رها کنید. حرکت چهار آونگ دیگر را به دقت مشاهده و تجزیه و تحلیل کنید و نتیجه‌ی کار گروه را به کلاس گزارش دهید.



شکل ۳ــ۱۴

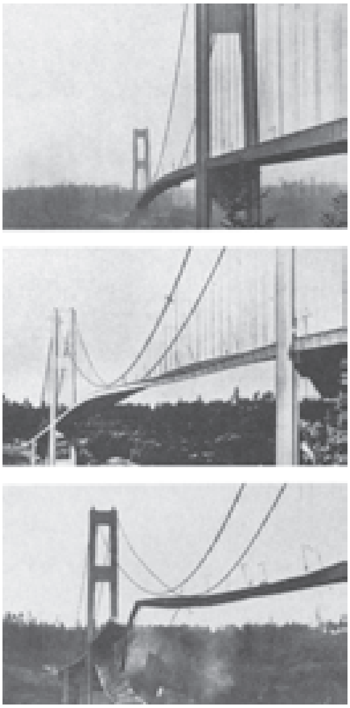
در این فعالیت با نوسان آونگ شماره‌ی ۵ آونگ‌های ۱ و ۳ و ۴ نیز به نوسان درمی‌آیند، اما پس از چند نوسان می‌ایستند ؛ ولی آونگ شماره‌ی ۲ که دوره‌ی آن با آونگ شماره‌ی ۵ یکسان است، در مدت طولانی‌تری می‌ایستد ؛نتیجه این که :

اگر به نوسانگری یک نیروی دوره‌ای اعمال شود، در صورتی که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر یکسان باشد، دامنه‌ی نوسان تا مقدار بیشینه‌ای افزایش می‌یابد و از آن پس، حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد. در این صورت می‌گوییم پدیده‌ی **تشدید** رخ داده است. در حالتی هم که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر برابر نیست، انرژی به نوسانگر منتقل می‌شود ؛ مثلاً، در فعالیت ۳ــ ۵ به آونگ‌های ۱ و ۳ و ۴ انرژی منتقل می‌شود و آن‌ها را به حرکت درمی‌آورد. ولی بیش‌ترین انرژی در حالت تشدید به نوسانگر منتقل می‌شود (مانند آونگ ۲).

پرسش ۳ــ۱

اگر نیروی اتلافی به نوسانگر وارد نشود، پیش‌بینی می‌کنید، در اثر تشدید، نوسانگر چگونه رفتار کند؟

پدیده‌ی تشدید ممکن است مفید و یا برعکس مشکل‌زا باشد ؛ مثلاً، در ساعت کوکی این پدیده مفید است. فنر کوک شده یک نیروی دوره‌ای بر رقاصک ساعت اعمال می‌کند که بسامد آن با بسامد نوسان رقاصک برابر است و در نتیجه تشدید رخ می‌دهد و باعث می‌شود که حرکت نوسانی رقاصک ادامه یابد. پدیده‌ی تشدید ممکن است اثر مخرب نیز داشته باشد و باعث تخریب ساختمان‌ها و تأسیسات شود ؛ به‌عنوان مثال، پل تاکومانروز در سال ۱۹۴۰ به علت نزدیک بودن بسامدهای وزش باد با بسامد طبیعی پل در اثر تشدید تخریب شد. شکل ۳ــ۱۵ مراحل مختلف به نوسان درآمدن پل و تخریب آن را نشان می‌دهد.



شکل ۳ــ۱۵

تمرین‌های فصل سوم

۱ــ توضیح دهید در حرکت هماهنگ ساده‌ی وزنه ــ فنر، اگر دامنه‌ی نوسان دو برابر شود، چه تغییری در دوره، بیشینه‌ی سرعت و انرژی مکانیکی نوسانگر ایجاد می‌شود؟

۲ــ جهت سرعت و شتاب را در حرکت هماهنگ ساده، در دو حالت الف و ب ، با هم مقایسه کنید و درباره‌ی نتیجه‌ی این مقایسه توضیح دهید.

الف : نوسانگر به مبدأ (وضع تعادل) نزدیک می‌شود.

ب : نوسانگر از مبدأ دور می‌شود.

۳ــ آیا در حرکت هماهنگ ساده اندازه و جهت نیروی بازگرداننده ثابت است؟ آیا امکان دارد این نیرو با بردار مکان جسم از مبدأ هم‌جهت باشد؟ توضیح دهید.

۴ــ اگر بیشینه‌ی سرعت نوسانگر وزنه ــ فنری دو برابر شود، انرژی کل آن چند برابر می‌شود؟

۵ــ در لحظه‌ای که انرژی جنبشی یک نوسانگر وزنه ــ فنر ۳ برابر انرژی پتانسیل آن است مکان نوسانگر چند برابر دامنه‌ی نوسان آن است؟ سرعت و شتاب نوسانگر در این لحظه به‌ترتیب، چند برابر بیشینه‌ی سرعت و بیشینه‌ی شتاب نوسانگر است؟

۶ــ دامنه‌ی نوسان یک حرکت هماهنگ ساده $۳\times۱۰^{-۲}m$ و بسامد آن ۵ هرتز است. معادله‌ی این حرکت را در دو حالت زیر بنویسید و در هر یک از دو حالت نمودار مکان ــ زمان را در یک دوره رسم کنید.

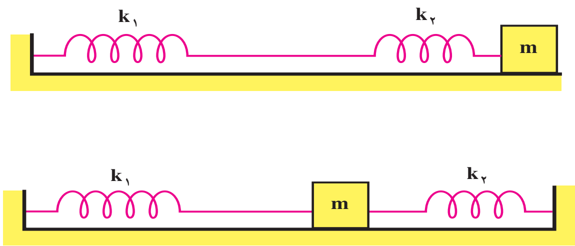
الف : در لحظه‌ی صفر نوسانگر در مبدأ قرار دارد.

ب : در لحظه‌ی صفر مکان نوسانگر $+۳\times۱۰^{-۲}m$ است.

۷ــ وزنه‌ای به جرم m به دو فنر با ضریب ثابت $k_۱$ و $k_۲$ به دو روش مختلف که در شکل‌های ۳ــ۱۶ــ الف و ب نشان داده شده است بسته شده و روی سطح افقی دارای حرکت هماهنگ ساده است. نشان دهید که اگر از اصطکاک چشم‌پوشی کنیم دوره‌ی نوسان‌های وزنه ــ فنر از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود :

الف : $$T=۲\pi\sqrt{m\left(\frac{۱}{k_۱}+\frac{۱}{k_۲}\right)}$$

ب : $$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k_۱+k_۲}}$$



شکل ۳ــ۱۶

۸ــ وزنه‌ای را به انتهای فنر سبکی می‌آویزیم، طول فنر به‌اندازه‌ی d زیاد می‌شود. نشان دهید که اگر وزنه را از وضع تعادل خارج و رها کنیم دوره‌ی نوسان آن از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود :

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

۹ــ وزنه‌ای به جرم ۴۰۰g به فنر سبکی آویخته شده است. اگر وزنه را به اندازه‌ی ۳cm از وضع تعادل خارج و رها کنیم با دوره‌ی $T = ۰/۶۲۸s$ به نوسان درمی‌آید. $(g = ۱۰ m/s^۲)$

الف : ثابت فنر، اندازه و جهت سرعت نوسانگر را وقتی وزنه در ۱/۵ سانتی‌متری بالای وضع تعادل قرار دارد و سرعت آن، رو به افزایش است تعیین کنید.

ب : انرژی پتانسیل کشسانی فنر را در حالت الف به‌دست آورید.

۱۰ــ فنر سبکی در امتداد قائم آویزان است. وزنه‌ای را به انتهای فنر می‌بندیم و آن را طوری نگه می‌داریم که طول فنر تغییر نکند. اگر در این حال، وزنه را رها کنیم تا ۲۰ سانتی‌متر پایین رفته و برمی‌گردد و با حرکت هماهنگ ساده به نوسان ادامه می‌دهد. دامنه، دوره و سرعت آن‌را هنگام عبور از وضع تعادل محاسبه کنید.

۱۱ــ معادله‌ی حرکت هماهنگ ساده‌ای را بنویسید که دامنه‌ی آن ۴cm و دوره‌ی آن ۰/۴s و در لحظه‌ی صفر در $x = +۲cm$ قرار دارد و سرعت آن منفی است. نمودار مکان ــ زمان این حرکت را در یک دوره رسم کنید.

۱۲ــ معادله‌ی نیروی وارد بر یک نوسانگر (وزنه ــ فنر) به جرم ۰/۵kg که در امتداد قائم با دامنه‌ی A نوسان می‌کند در SI به‌صورت $F = -۲۰۰y$ است. سرعت این نوسانگر هنگام عبور از وضع تعادل ۱۰m/s است. در لحظه‌ی صفر $y = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}A$ و سرعت آن در جهت مثبت است. شتاب حرکت را در لحظه‌ی $t = \frac{T}{۴}s$ حساب کنید (T دوره‌ی حرکت است).

۱۳ــ معادله‌ی حرکت هماهنگ ساده‌ی یک نوسانگر در SI به‌صورت $x = ۰/۰۵ \sin(۲۰\pi t + \frac{۲\pi}{۳})$ است.

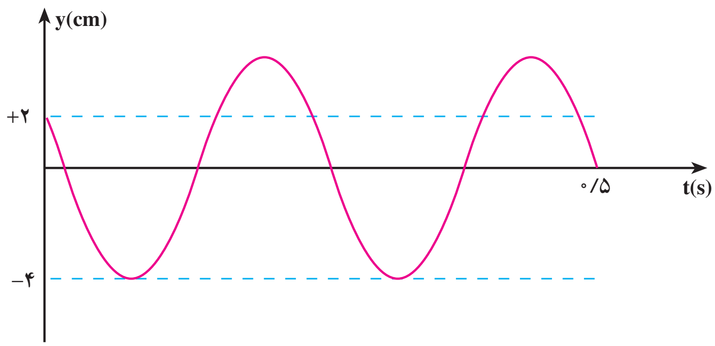
الف : در چه زمانی پس از لحظه‌ی صفر، برای اولین بار سرعت نوسانگر به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد؟

ب : در چه فاصله‌ای از مبدأ انرژی جنبشی نوسانگر برابر با انرژی پتانسیل آن خواهد شد؟

۱۴ــ نمودار مکان ــ زمان نوسانگر مطابق شکل ۳ــ۱۷ است :

الف : معادله‌های حرکت و سرعت و شتاب این نوسانگر را بنویسید.

ب : چه زمانی پس از لحظه‌ی صفر، برای اولین بار به‌ترتیب، سرعت و شتاب آن بیشینه می‌شود؟



شکل ۳ــ۱۷

۱۵ــ پیستون‌های یک اتومبیل ۴ سیلندر در حالت خلاص تقریباً حرکت نوسانی ساده دارند. اگر دامنه‌ی نوسان آن‌ها ۵۰ میلی‌متر و بسامد آن ۱۱۰ هرتز باشد، کمیت‌های زیر را به دست آورید.

الف : بیشینه‌ی سرعت پیستون‌ها

ب : بیشینه‌ی شتاب نوسان آن‌ها