در شکل ۱ــ۱۵ــ الف بردارهای سرعت در دو لحظه‌ی t_1 و t_2 روی مسیر نشان داده شده است. برای محاسبه‌ی تغییر سرعت در بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ از نقطه‌ی O' بردارهای مساوی با $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ رسم می‌کنیم و $\Delta \vec{v}$ را به‌دست می‌آوریم (شکل ۱ــ۱۷ــ ب). در این جا نیز، مشابه حرکت یک‌بعدی، بردار شتاب متوسط را در بازه‌ی زمانی Δt به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

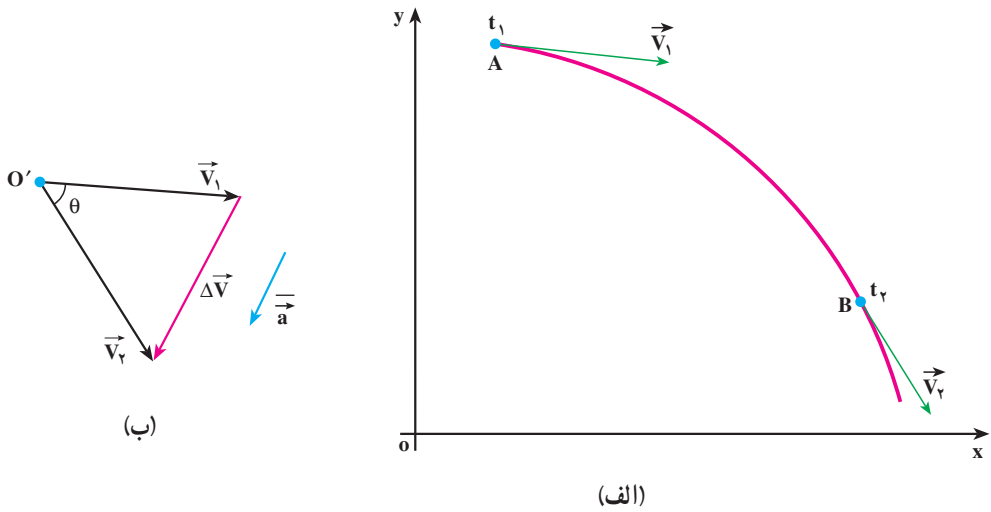
$$\vec{\bar{a}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad (۱ــ۲۸)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۱ــ۲۷ داریم :

$$\vec{\bar{a}} = (\frac{\Delta v_x}{\Delta t})\vec{i} + (\frac{\Delta v_y}{\Delta t})\vec{j}$$

که آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\vec{\bar{a}} = (\bar{a}_x)\vec{i} + (\bar{a}_y)\vec{j} \qquad (۱ــ۲۹)$$



شکل ۱ــ۱۵ــ بردار شتاب متوسط با $\Delta \vec{v}$ هم‌جهت است.

شتاب لحظه‌ای در لحظه‌ی t_1 را نیز می‌توان به‌صورت حدّ شتاب متوسط، هنگامی که Δt به‌سمت صفر میل می‌کند، تعریف کرد ؛ یعنی :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\vec{\bar{a}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad (۱ــ۳۰)$$

با توجه به مفهوم مشتق، رابطه‌ی ۱ــ۳۰ به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (۳۱ــ۱)$$

$$\vec{a} = \frac{d^{۲}(\vec{r})}{dt^{۲}} \qquad (۳۲ــ۱)$$

به کمک رابطه‌ی ۱ــ۲۹ می‌توانیم بنویسیم :

$$\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt})\vec{i} + (\frac{dv_y}{dt})\vec{j} \qquad (۳۳ــ۱)$$

که در آن $\frac{dv_x}{dt} = a_x$ و $\frac{dv_y}{dt} = a_y$ مؤلفه‌های شتاب لحظه‌ای هستند.

درنتیجه می‌توان نوشت :

$$\vec{a} = (a_x)\vec{i} + (a_y)\vec{j} \qquad (۳۴ــ۱)$$

رابطه‌ی ۱ــ۲۸ نشان می‌دهد که $\vec{a}$ و $\Delta\vec{v}$ هم‌جهت‌اند، ولی همان‌طور که در شکل ۱ــ۱۵ــب نشان داده شده است، در حرکت روی مسیر خمیده، معمولاً بردار شتاب متوسط $\vec{a}$ ، با بردارهای سرعت، ($\vec{v_۱}$ یا $\vec{v_۲}$) هم‌جهت نیست ؛ درحالتی هم که Δt به سمت صفر میل می‌کند و بردار $\vec{v_۲}$ به‌بردار $\vec{v_۱}$ بسیار نزدیک می‌شود، شتاب لحظه‌ای با سرعت لحظه‌ای نیز معمولاً هم‌جهت نخواهد بود، ولی به کمک رابطه‌ی ۱ــ۳۳ و با داشتن معادله‌ی سرعت، جهت بردار شتاب لحظه‌ای را که از این پس آن را به اختصار **شتاب** خواهیم نامید، می‌توان به‌دست آورد.

مثال ۱ــ۱۲

معادله‌ی حرکت دو بعدی جسمی در SI به‌صورت زیر است :

$$\begin{cases} x = ۲۰t^{۲} \\ y = -۵t^{۳} \end{cases}$$

بردارهای سرعت و شتاب این جسم را در لحظه‌ی $t = ۱s$ به‌دست آورید. آیا این دو بردار هم‌جهت‌اند؟

پاسخ

برای تعیین بردار سرعت، ابتدا مؤلفه‌های v_x و v_y را در $t=1s$ به‌دست می‌آوریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 40t \overset{t=1s}{\Rightarrow} v_x = 40 m/s$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -15t^2 \overset{t=1s}{\Rightarrow} v_y = -15 m/s$$

بنابراین بردار سرعت لحظه‌ای در $t=1s$ چنین خواهد بود :

$$\vec{v} = 40\vec{i} - 15\vec{j}$$

برای تعیین بردار شتاب نیز ابتدا مؤلفه‌های شتاب، یعنی a_x و a_y، را به‌دست می‌آوریم. مؤلفه‌ی افقی شتاب، ثابت است :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 40 m/s^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -30t$$

a_y تابع زمان است و در $t=1s$ برابر است با :

$$a_y = -30 m/s^2$$

با توجه به مقدارهای a_x و a_y در لحظه‌ی فوق، بردار شتاب در $t=1s$ نیز نوشته می‌شود :

$$\vec{a} = 40\vec{i} - 30\vec{j}$$

زاویه‌ای که بردارهای سرعت و شتاب در لحظه‌ی $t=1s$ با محور افقی می‌سازند به‌ترتیب برابرند با :

$$\tan\theta_1 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-15}{40}$$

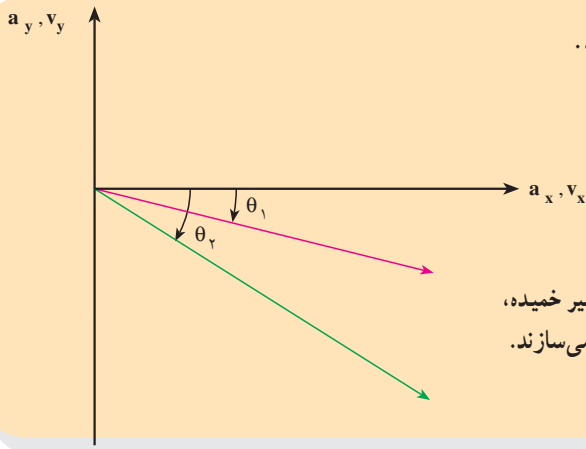
$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{-3}{8} \simeq -7^\circ$$

$$\tan\theta_2 = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{30}{40}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{-3}{4} \simeq -37^\circ$$

با مقایسه‌ی زاویه‌های θ_1 و θ_2 می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای سرعت و شتاب

در این لحظه هم‌جهت نیستند.



شکل ۱ــ۱۶ــ در حرکت روی مسیر خمیده، بردار شتاب و سرعت با هم زاویه می‌سازند.

تمرین‌های فصل اول

۱ــ معادله‌ی حرکت جسمی در SI به‌صورت $x = t^3 - 3t^2$ است. مطلوب است :

الف : بزرگی سرعت متوسط جسم در بازه‌ی زمانی ۱ تا ۲ ثانیه.

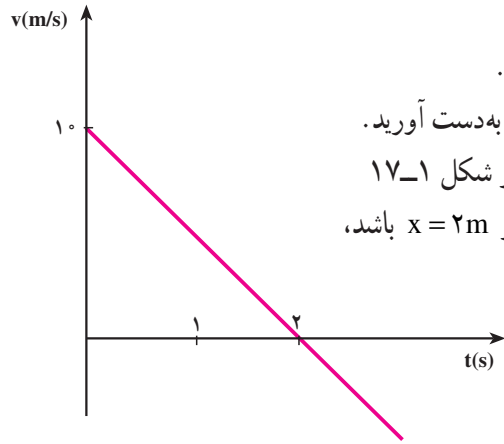
ب : بزرگی سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = 4s$.

۲ــ جسمی با سرعت ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند. جسم در لحظه‌ی $t = 2s$ در مبدأ مختصات و ۲ ثانیه بعد در $x = 6m$ است.

الف : معادله‌ی حرکت جسم را بنویسید.

ب : مکان جسم را در لحظه‌ی $t = 3s$ به‌دست آورید.

۳ــ معادله‌ی سرعت ــ زمان متحرکی در شکل ۱ــ۱۷ آمده است. اگر متحرک در لحظه‌ی $t = 0s$ ، در $x = 2m$ باشد، معادله‌ی حرکت آن را به‌دست آورید.



شکل ۱ــ۱۷

۴ــ معادله‌ی حرکت متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = 2t^3 + 4t$ است.

الف : شتاب متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی ۱ تا ۲ ثانیه

ب : شتاب متحرک در لحظه‌ی $t = 3s$ را به‌دست آورید.

۵ــ بیشینه‌ی شتاب خودرویی در حین ترمز کردن، در جاده‌ی خشک $5\,m/s^2$ و در جاده‌ی

خیس، $۲\,m/s^۲$ است. اگر این خودرو با سرعت $۷۲\,km/h$ در حرکت باشد و راننده ناگهان مانعی را در فاصله‌ی ۴۵ متری خود ببیند، آیا می‌تواند خودرو را به‌موقع متوقف کند؟ در صورتی که :

الف : جاده خشک باشد. ب : جاده خیس باشد. (زمان تأخیر واکنش راننده را ناچیز فرض کنید.)

۶ ــ خودرویی در پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب $۲\,m/s^۲$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه کامیونی با سرعت ثابت $۳۶\,km/h$ از کنار آن می‌گذرد.

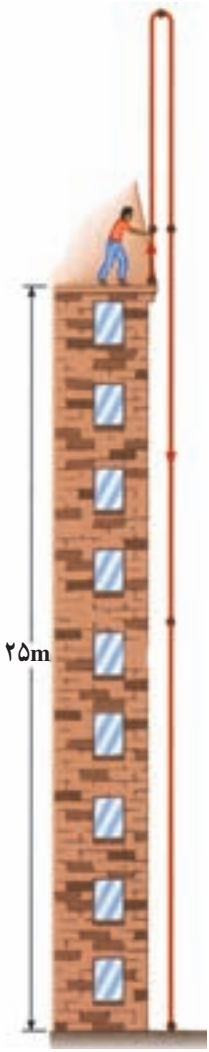
الف : نمودارهای مکان ــ زمان و سرعت ــ زمان را برای خودرو و کامیون رسم کنید.

ب : پس از چه مدتی، خودرو به کامیون می‌رسد؟

۷ــ در شکل ۱ــ ۱۸ توپی در راستای قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. توپ پس از ۴ ثانیه به محلّ پرتاب برمی‌گردد. توپ :

الف : با چه سرعتی پرتاب شده است؟ ب : تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

پ : با چه سرعتی به زمین می‌رسد؟ ت : بعد از چند ثانیه به زمین می‌رسد؟ $(g = ۱۰\,m/s^۲)$



شکل ۱ــ ۱۸

۸ ــ مثالی ذکر کنید که در آن سرعت یک جسم در یک لحظه، صفر ولی جسم در آن لحظه دارای شتاب باشد.

۹ــ کانگورو می‌تواند از مانعی به ارتفاع ۲/۵ متر بپرد.

الف : سرعت آن را هنگام بلند شدن از زمین حساب کنید.

ب : سرعت آن را به هنگام بازگشت به زمین محاسبه کنید.

فرض کنید حرکت کانگورو در راستای قائم است.

۱۰ــ بردارهای مکان ذره‌ی متحرکی در لحظه‌های $t_۱ = ۵\,s$ و $t_۲ = ۲۵\,s$ به‌ترتیب $\vec{r_۱} = ۲\vec{i} + ۱۴\vec{j}$ و $\vec{r_۲} = ۸\vec{i} + ۶\vec{j}$ است. بزرگی سرعت متوسط این ذره را بین دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ به‌دست آورید. با رسم یک نمودار جهت $\vec{v}$ را نشان دهید.

۱۱ــ معادله‌ی حرکت جسمی با دو رابطه‌ی زیر، در SI داده شده است :

$$x = ۶t \quad , \quad y = ۲t^۲ + ۱$$

الف : معادله‌ی سرعت جسم را بنویسید و بزرگی سرعت را در $t = ۲\,s$ محاسبه کنید.

ب : بردار سرعت متوسط جسم را بین لحظه‌های $t = ۱$ و $t = ۲$ ثانیه برحسب بردارهای یکّه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.