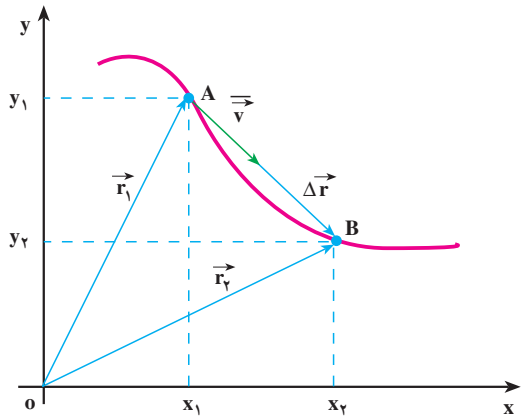
در رابطه‌ی ۱ــ۲۱، $\Delta x = x_2 - x_1$ و $\Delta y = y_2 - y_1$ است.



شکل ۱ــ۱۳ــ بردار سرعت متوسط و بردار تغییر مکان هم‌جهت‌اند.

سرعت متوسط جسم در یک بازه‌ی زمانی معین، همانند حالت یک بعدی، به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (۱ــ۲۲)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۱ــ۲۱ داریم :

$$\vec{\bar{v}} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\vec{i} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\vec{j} \qquad (۱ــ۲۳)$$

اگر $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ را با $\bar{v}_x$ و $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ را با $\bar{v}_y$ نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$\vec{\bar{v}} = \bar{v}_x \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} \qquad (۱ــ۲۴)$$

پرسش ۱ــ۱

رابطه‌ی ۱ــ۲۲ نشان می‌دهد که سرعت متوسط، کمیتی برداری است و $\vec{\bar{v}}$ با $\Delta \vec{r}$ هم جهت است ؛ چرا؟

مثال ۱ــ۱۰

معادله‌های حرکت جسمی در دو بُعد، در SI به صورت زیر است :

$x = ۲t$ و $y = -t^۲ + ۴t$

الف : بردار مکان جسم را در لحظه‌های $t_۱ = ۱s$ و $t_۲ = ۲s$ به دست آورید.

ب : سرعت متوسط آن را در بازه‌ی زمانی ۱ تا ۲ ثانیه تعیین و بزرگی آن را حساب کنید.

پاسخ

الف : در $t_۱ = ۱s$:

$x_۱ = ۲m$ و $y_۱ = -۳m$

$\vec{r}_۱ = ۲\vec{i} + ۳\vec{j}$

به همین ترتیب در $t_۲ = ۲s$: $x_۲ = ۴m$ و $y_۲ = ۴m$

$\vec{r}_۲ = ۴\vec{i} + ۴\vec{j}$

ب : در بازه‌ی زمانی ۱ تا ۲ ثانیه :

$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۴ - ۲ = ۲m$

$\Delta y = y_۲ - y_۱ = ۴ - ۳ = ۱m$

$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲}{۱} = ۲ m/s$

$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۱}{۱} = ۱ m/s$ $\quad \vec{\bar{v}} = ۲\vec{i} + \vec{j}$

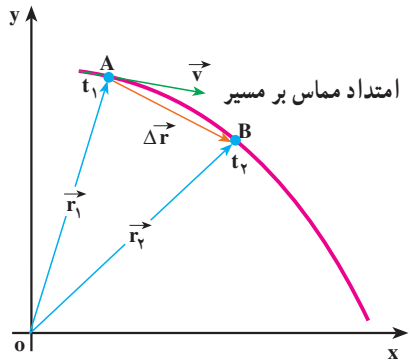
$(\bar{v})^۲ = (\bar{v}_x)^۲ + (\bar{v}_y)^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۵$

$\bar{v} = \sqrt{۵} \simeq ۲/۲۳ m/s$

سرعت لحظه‌ای: در شکل ۱ــ۱۴نمودار حرکت جسمی روی یک مسیر خمیده در صفحه‌ی xoy نشان داده شده است. مکان جسم در دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ ، مشخص شده است. پیش‌تر گفتیم که بردار سرعت متوسط در یک بازه‌ی زمانی معین، با بردار جابه‌جایی مربوط به آن، هم‌جهت است.

همچنین می‌دانید هنگامی که بازه‌ی زمانی Δt ، کوچک و کوچک‌تر شود، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود ؛ یعنی، بردار سرعت لحظه‌ای حدّ بردار سرعت متوسط است وقتی Δt به سمت صفر، میل می‌کند :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\vec{\bar{v}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (۱ــ۲۵)$$



شکل ۱ــ۱۴ــ سرعت لحظه‌ای در امتداد مماس بر مسیر حرکت است.

به عبارت دیگر می‌توان گفت که «سرعت لحظه‌ای، مشتق بردار مکان جسم، نسبت به زمان است» :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (۱ــ۲۶)$$

در حدّی که Δt به سمت صفر میل کند، با استفاده از رابطه‌ی ۱ــ۲۱ می‌توان سرعت لحظه‌ای جسم را برحسب مؤلفه‌های آن در دو امتداد x و y به‌دست آورد :

$$\vec{v} = (\frac{dx}{dt})\vec{i} + (\frac{dy}{dt})\vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_x)\vec{i} + (v_y)\vec{j} \qquad (۱ــ۲۷)$$

در شکل ۱ــ۱۴می‌بینید که وقتی t_2 به سمت t_1 میل کند، راستای بردار جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ ، به سمت راستای مماس بر منحنی مسیر، در نقطه‌ی A میل خواهد کرد. بنابراین، چون بردار سرعت متوسط همواره هم‌جهت با جابه‌جایی است، در حدّی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، بردار سرعت لحظه‌ای بر مسیر حرکت در نقطه‌ی A مماس خواهد شد. بدین ترتیب می‌توان گفت هنگامی که جسم روی یک مسیر خمیده حرکت می‌کند، جهت بردار سرعت آن که همواره بر مسیر حرکت مماس است، در هر لحظه تغییر می‌کند. از این پس، برای اختصار، بردار سرعت لحظه‌ای را سرعت می‌نامیم.

مثال ۱ــ۱۱

خودرویی در یک صفحه‌ی افقی که آن را در این‌جا صفحه‌ی xoy می‌نامیم، حرکت می‌کند. معادله‌های حرکت آن در SI به‌صورت زیر است :

$$x = ۶t + ۵ \quad و \quad y = ۴t^۲$$

بزرگی سرعت خودرو را در $t = ۱s$ به‌دست آورید.

پاسخ

با استفاده از رابطه‌ی ۱ــ۲۷ مؤلفه‌های سرعت به‌دست می‌آید :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ۶\,m/s$$

ملاحظه می‌شود که مؤلفه‌ی افقی سرعت مقدار ثابتی دارد و تابع زمان نیست. به همین ترتیب برای مؤلفه‌ی قائم سرعت داریم :

$$v_y = \frac{dy}{dt} = ۸t$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود این مؤلفه، تابع زمان است و بزرگی آن در $t = ۱s$ برابر است با :

$$v_y = ۸\,m/s$$

پس بزرگی سرعت در $t = ۱s$ برابر است با :

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰\,m/s$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

می‌دانید وقتی که سرعت جسم در حال حرکت تغییر می‌کند، حرکت را شتاب‌دار می‌گویند. البته این تغییر سرعت می‌تواند به‌معنای تغییر در بزرگیِ سرعت، تغییر در جهتِ سرعت و یا هر دو باشد. دیدیم که وقتی مسیر حرکت جسم خمیده است، جهت سرعت آن الزاماً تغییر می‌کند. بنابراین، حرکت بر روی مسیر منحنی، حرکتی شتاب‌دار است. حتّی اگر بزرگی سرعت هم تغییر نکند.

فعالیت ۱ــ۳

دو حرکت شتاب‌دار مثال بزنید که در آن‌ها، بزرگی سرعت تغییر نکند.