

و بدان! کسی که گنجینه‌های آسمان و زمین در دست اوست تو را در دعا رخصت داده و پذیرفتن دعایت را برعهده نهاده و تو را فرموده از او خواهی تا به تو دهد، و از او طلبی تا تو را بیمارزد. و میان تو و خود کسی را نگمارده تا تو را از وی بازدارد و از کسی ناگزیرت نکرده که نزد او برایت میانجی‌گری آرد، و اگر گناه کردی از توبهات منع ننموده و در کیفیت شتاب نفرموده و چون بدو باز گردی سرز نشت نکند، و آنجا که رسوا شدنت سزااست پردهات را نبرد؛ و در پذیرفتن توبه به بر تو سخت نگرفته و حساب گناهت را نکشیده، و از بخشایش نومیدت نگردانیده، بلکه بازگشتت را از گناه نیک شمرده و هر گناهت را یکی گرفته و هر کار نیکویت را ده به حساب آورده و در بازگشتت را برایت بازگذارده و چون بخوانیش آوایت را شنود، و چون راز خود را با او در میان نهی آن را داند، پس حاجت خود بدو نمایی و آنچه در دل داری پیش او بگشایی، و از اندوه خویش بدو شکایت کنی و خواهی تا غم تو را گشاید و در کارها یاریت نماید و از گنجینه‌های رحمت او آن را خواهی که بخشیدنش از جز او نیاید؛ از افزودن مدت زندگانی و تندرستی‌ها و در روزی‌ها فراوانی.

(تدریس این فصل اختیاری است)

### همبستگی و رگرسیون

شهاب برای پروژه کلاس خود مایل بود تأثیر سطح تحصیلات والدین را بر موفقیت تحصیلی فرزندان مطالعه کند. در انجام این پروژه او با یک مشکل جدی روبرو بود و آن اینکه جامعه‌ای که با آن سروکار داشت شامل یک متغیر نبود و او نمی‌دانست که در این شرایط چگونه باید عمل کند. از این رو به معلم مراجعه کرد و معلم به او پاسخ داد: جامعه‌ای که می‌خواهی مطالعه کنی یک جامعه با دو متغیر است که موضوع درس امروز ماست.

ما در بررسی این قبیل جوامع نه تنها کارهایی را که تا بحال آموخته‌ایم به کار می‌بریم، بلکه به دو سؤال نیز سعی می‌کنیم پاسخ دهیم و آن اینکه این متغیرها چقدر به هم وابسته‌اند و دیگر آنکه اگر مقدار یکی از متغیرها را بدانیم آیا می‌توانیم مقدار متغیر دیگر را «حدس» بزنیم.

#### جامعه‌های چند متغیری

تاکنون جوامعی را بررسی کرده‌ایم که در آن‌ها فقط یک متغیر وجود داشت. شما درباره قد همکلاسی‌های خود مطالعه کرده‌اید. نمودارهای مربوطه، میانگین و واریانس آن را تعیین کرده‌اید. همین کار را درباره وزن همکلاسی‌های خود جداگانه انجام داده‌اید. ولی هیچ‌گاه این دو متغیر را با هم مطالعه نکرده‌اید. از تأثیرات آن‌ها بر روی یکدیگر اطلاعی ندارید، هنوز نمی‌دانید که اگر قد همکلاسی خود را بدانید آیا می‌توانید وزن او را «حدس» بزنید، یعنی به‌طور تقریبی بگویید که وزن او چقدر است؟ شما نمی‌دانید که آیا افراد قد بلندتر وزن بیشتری دارند یا خیر، تغییرات این دو متغیر با هم چگونه است؟ تنها کاری که کرده‌اید در یکی از تمرین‌ها تعیین کرده‌اید که از این دو متغیر کدامیک تغییرات بیشتری در مقایسه با دیگری دارد.

می‌توانیم مسائلی را مطرح کنیم که در آن‌ها تعداد متغیرها از دو تا هم بیشتر باشد. مثلاً در کشاورزی میزان محصول، میزان آب، میزان کود، نوع کود، میزان آفتاب و نوع خاک مؤثرند. ملاحظه می‌شود که در مسائل کشاورزی حداقل با ۶ متغیر سروکار داریم. بررسی این قبیل مسائل و

دستیابی به نوع تأثیر این متغیرها بر روی یکدیگر جزء مسائل عمده آماری است و معمولاً در بخش تحقیقات کشاورزی با این قبیل متغیرها سروکار دارند. ما در این فصل هم به جهت سادگی و هم به جهت آنکه بسیاری از مسائل را می‌توان به جامعه‌هایی با دو متغیر تجزیه کرد به بررسی جامعه‌های دو متغیری می‌پردازیم.

## نمودار پراکنش

داده‌هایی را که تاکنون جمع‌آوری می‌کردید از نظر بگذرانید. به هر فرد یک عدد با یک صفت نسبت داده می‌شد، ولی اکنون به هر فرد دو مقدار نسبت داده می‌شود، زیرا ما دو متغیر داریم. برای هر متغیر یک مقدار اندازه گرفته می‌شود. برای آنکه مقادیر مربوط به متغیرها اشتباه نشود، داده‌ها را به صورت زوج مرتب می‌نویسیم. مثلاً اگر موضوع مورد مطالعه قد و وزن است و شما قد و وزن یکی از همکلاسی‌های خود را اندازه گرفته‌اید، داده‌ای به صورت مرتب شده (۵۲ و ۱۶۷) خواهید داشت که قد این همکلاسی را بر حسب سانتیمتر برابر ۱۶۷ و وزن او را بر حسب کیلو برابر ۵۲ است. نمایش (۵۲ و ۱۶۷) را یک «زوج مرتب» می‌نامند که نشان می‌دهد عددی که اول از سمت چپ نوشته شده نمایانگر قد و عددی که دوم نوشته شده نمایانگر وزن دانش‌آموز است.

## فعالیت

قد و وزن ۱۰ نفر از همکلاسی‌های خود را اندازه بگیرید و داده‌های حاصل را به صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید.



البته می‌توان داده‌ها را به صورت مرتب در دو ستون و یا دو سطر کنار هم نیز نشان داد. در یک مطالعه آماری خواسته‌اند تأثیر نوعی رژیم غذایی را روی موش‌های آزمایشگاهی بررسی کنند، از این رو وزن اولیه هر موش را اندازه گرفتند و پس از اعمال رژیم غذایی در مدت معینی، مجدداً وزن آن‌ها را اندازه گرفتند و داده‌ها عبارتند از:

(۲,۴) و (۳,۵) و (۱,۷) و (۲,۳) و (۱,۸)

که مؤلفه اول بیانگر وزن اولیه و مؤلفه دوم بیانگر وزن همان موش پس از اعمال رژیم غذایی است. نوع دیگری که می‌توان این داده‌ها را نشان داد چنین است:

شماره موش‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
وزن اولیه	۱	۲	۱	۳	۲
وزن پس از اعمال رژیم غذایی	۸	۳	۷	۵	۴

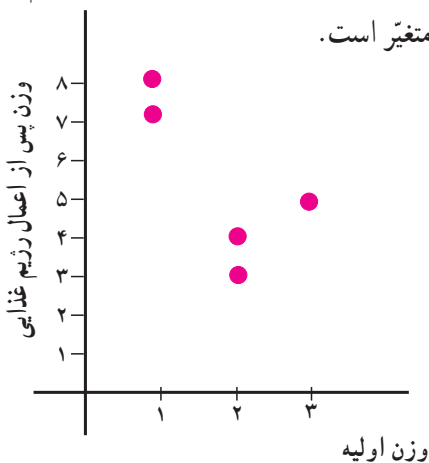
ممکن بود این اطلاعات را به صورت ستونی هم بنویسیم.

شماره موش‌ها	وزن اولیه	وزن پس از رژیم
۱	۱	۸
۲	۲	۳
۳	۱	۷
۴	۳	۵
۵	۲	۴

در هر صورت ثبت داده‌ها باید به گونه‌ای باشد که اولاً داده‌های مربوط به یک فرد در کنار هم

باشند و ثانیاً مشخص باشد که کدام مقدار مربوط به کدام متغیر است.

حال که داده‌ها را قرار شد به صورت زوج مرتب نشان دهیم، می‌توانیم آن‌ها را به صورت نقاطی در صفحه نمایش دهیم. شکل روبرو داده‌های مربوط به وزن موش‌ها را نشان می‌دهد. این نمودار را نمودار پراکنش می‌گویند.

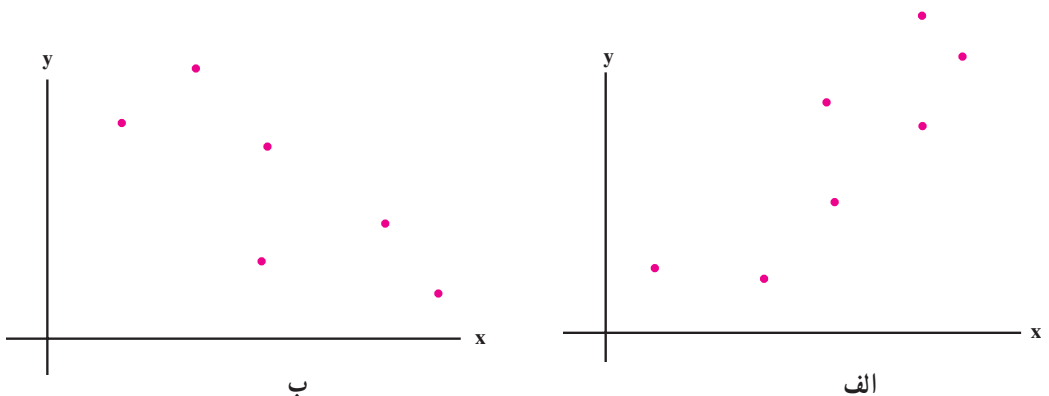




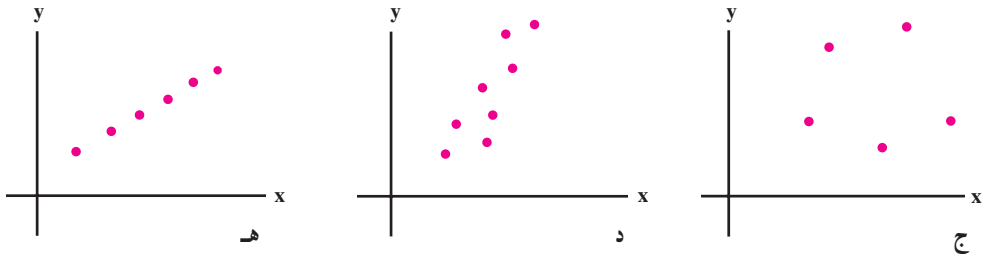


نمودار پراکنش مجموعه‌ای از نقاط در صفحه محورهای مختصات است که از رسم داده‌های مربوط به اندازه‌گیری در جامعه‌های دو متغیری به دست آمده است.

مطالعه این نمودار می‌تواند اطلاعاتی درباره جامعه در اختیار ما بگذارد. مثلاً نمودارهای زیر را در نظر بگیرید.



در نمودار «الف» وقتی مقادیر روی محور  $x$  افزایش می‌یابد، مقادیر روی محور  $y$  «عموماً» افزایش می‌یابد اما در نمودار «ب» برعکس است با افزایش مقادیر روی محور  $x$ ، مقادیر روی محور  $y$  «عموماً» کاهش می‌یابد.



در نمودار «ج» تغییرات در مقدار  $x$ ها هیچ گونه اطلاعی درباره تغییرات  $y$  نمی‌دهد، یعنی رفتار مقادیر  $x$  رفتار مقادیر  $y$  را مشخص نمی‌کند. نمودار «د» علاوه بر آنکه نشان می‌دهد دو متغیر با هم افزایش و یا کاهش می‌یابند، با داشتن مقادیر  $x$  با دقت بیشتری می‌توان  $y$  را حدس زد. دقت حدس زدن مقادیر  $y$  در این نمودار از دقت حدس در نمودار «الف» و «ب» بیشتر است. در نمودار «ه» حدس مقادیر  $y$  با دقت بیشتری انجام می‌شود. برای روشن‌تر شدن این مفاهیم فعالیت زیر را انجام دهید.

### فعالیت

نمودار پراکنش مربوط به داده‌های زیر را رسم کنید.

(۱,۲) و (۲,۳) و (۳,۴) و (۴,۵) و (۵,۶)

اگر نمودار را دقیق رسم کرده باشید متوجه خواهید شد که این نقاط روی یک خط راست قرار دارند، می‌توانید معادله آن خط را بیابید.

حال مطابق دستور العمل زیر مؤلفه دوم هر یک از این داده‌ها را تغییر دهید: برای هر نقطه سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم اگر شیر آمد به  $y$  یک واحد اضافه می‌کنیم و اگر خط بیاید از  $y$  یک واحد کم می‌کنیم. با تغییرات حاصل شده نمودار پراکنش را رسم کنید. این فعالیت را تکرار کنید منتها این بار مقادیری را که اضافه و یا کم می‌کنید تغییر دهید.

چه تغییری در نمودار پراکنش مشاهده می‌کنید؟

وابستگی  $x$  و  $y$  چگونه تغییر می‌کند؟

در این فعالیت می‌بینید که هر چقدر وابستگی خطی  $y$  و  $x$  بیشتر باشد مقدار  $y$  حاصل از داده‌ها به مقدار  $y$  حاصل از معادله خط نزدیکتر است. یعنی با داشتن  $x$  مقدار  $y$  را با خطای کمتری می‌توانید تعیین کنید.

شما می‌توانید فعالیت بالا را به جای خط با هر منحنی دیگری تکرار کنید. ما در این فصل فقط با خط کار می‌کنیم.



## تمرین

۱ - تعداد ساعات صرف شده و نمره کسب شده در آزمون فارسی برای هر دانش‌آموز کلاس

دوم یک دبیرستان به شکل زوج مرتب در زیر آورده شده است.

$(۲, ۱۰)$  و  $(۳, ۱۰)$  و  $(۳, ۱۴)$  و  $(۴, ۱۰)$  و  $(۴, ۱۴)$

$(۵, ۱۴)$  و  $(۵, ۱۶)$  و  $(۶, ۱۲)$  و  $(۶, ۱۶)$  و  $(۶, ۱۸)$

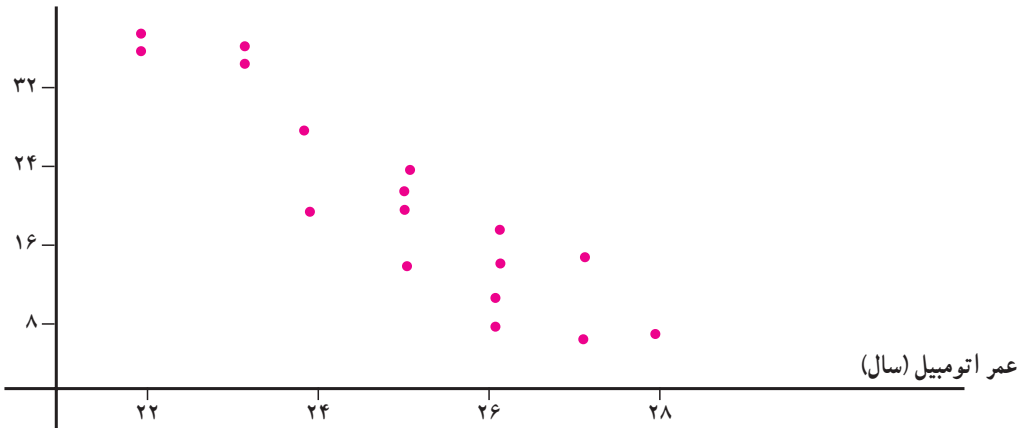
$(۷, ۱۴)$  و  $(۷, ۱۸)$  و  $(۷, ۲۰)$  و  $(۸, ۱۶)$  و  $(۸, ۱۸)$

نمودار پراکنش را برای نشان دادن ارتباط بین تعداد ساعات مطالعه و نمره آزمون رسم کنید.

چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۲ - نمودار زیر قیمت و عمر تعدادی اتومبیل را نشان می‌دهد.

قیمت (۱۰۰۰۰۰۰ تومان)

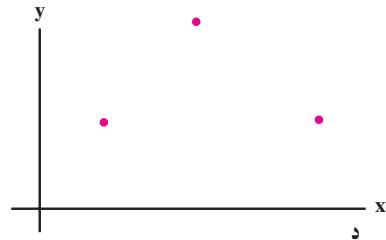
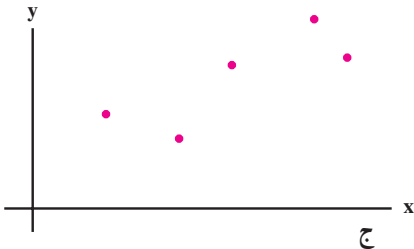
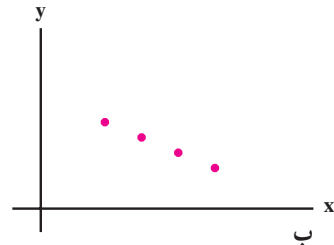
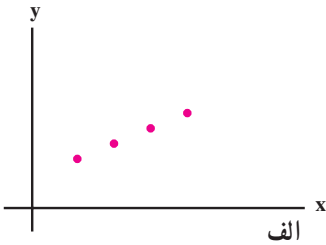


آیا ارتباطی بین این دو متغیر وجود دارد؟ توضیح دهید.



## همبستگی

در فعالیت‌های انجام شده دیده‌اید که پس از تغییراتی که در داده‌ها داده‌اید در برخی از آن‌ها نقاط به شکل یک خط نزدیکتر و در برخی دیگر دورتر می‌شوند. اگر نقاط به شکل یک خط نزدیکتر باشند به کمک  $x$  با خطای کمتری می‌توان  $y$  را تعیین کرد و برعکس هرچقدر نقاط از خط دورتر باشند خطای تعیین  $y$  بیشتر خواهد بود. هر چقدر خطای تعیین  $y$  به کمک  $x$  کمتر باشد می‌نویسیم دو متغیر همبستگی خطی بیشتری دارند مثلاً در شکل‌های زیر



در «الف» و «ب» بدون خطا می‌توانیم  $y$  را به کمک خطی که از این نقاط می‌گذرد تعیین کنیم. پس همبستگی بین  $x$  و  $y$  خیلی زیاد است. ولی در شکل «ج» نمی‌توانیم خطی را تعیین کنیم که تمام نقاط روی آن باشند. به نظر می‌رسد این نقاط به نحوی از خط راست دور شده‌اند پس همبستگی آن به اندازه همبستگی در شکل‌های «الف» و «ب» نیست. ولی باز خطای تعیین  $y$  به کمک  $x$  زیاد نیست. اما این خطا در شکل «د» خیلی زیاد است.

ما معیاری می‌خواهیم که این همبستگی را برای ما اندازه‌گیری کند. دستوری که برای محاسبه همبستگی معرفی شده است با نام ضریب همبستگی و با نماد  $r$ ، به صورت زیر است:

$$r = \frac{\text{میانگین } (y \text{ ها}) - (\text{میانگین } x \text{ ها}) \times \text{مجموع حاصلضرب } x \text{ ها و } y \text{ ها}}{\sqrt{(\text{انحراف معیار } y \text{ ها}) \times (\text{انحراف معیار } x \text{ ها})}}$$



در زیر داده‌هایی مربوط به وزن اولیه و بعد از رژیم موش‌ها آمده است.

شماره موش‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	جمع
وزن اولیه (x)	۱	۱	۲	۳	۲	۹
وزن بعد از اعمال رژیم غذایی (y)	۸	۳	۷	۶	۴	۲۸
حاصلضرب xها و yها	۸	۳	۱۴	۱۸	۸	۵۱

ضریب همبستگی بین وزن اولیه و وزن بعد از اعمال رژیم غذایی را محاسبه کنید.  
در این مسئله  $n=5$  و  $x$ ها را وزن اولیه و  $y$ ها را وزن بعد از اعمال رژیم غذایی گرفته‌ایم.  
ابتدا به محاسبه میانگین  $x$  و  $y$  می‌پردازیم:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1/8, \quad \bar{y} = \frac{28}{5} = 5/6,$$

$$\begin{aligned} \text{واریانس } x\text{ها} &= \frac{(1-1/8)^2 + (1-1/8)^2 + (2-1/8)^2 + (3-1/8)^2 + (2-1/8)^2}{5} \\ &= \frac{0/64 + 0/64 + 0/04 + 1/44 + 0/04}{5} = \frac{2/8}{5} = 0/56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{واریانس } y\text{ها} &= \frac{(8-5/6)^2 + (3-5/6)^2 + (7-5/6)^2 + (6-5/6)^2 + (4-5/6)^2}{5} \\ &= \frac{5/76 + 6/76 + 1/96 + 0/16 + 2/56}{5} = \frac{17/2}{5} = 3/44 \end{aligned}$$

$$\frac{\text{مجموع حاصلضرب } x\text{ها و } y\text{ها}}{n} = \frac{51}{5} = 10/2$$

بنابراین:

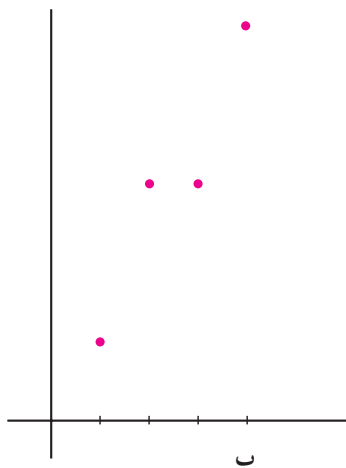
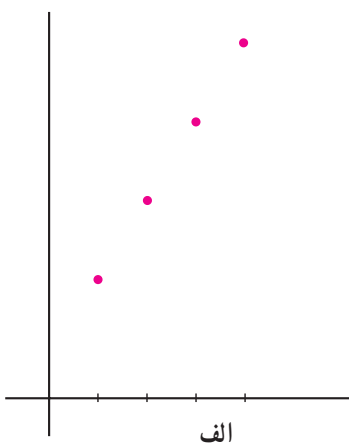
$$\begin{aligned} \text{ضریب همبستگی} &= \frac{10/2 - (1/8)(5/6)}{(\sqrt{0/56})(\sqrt{3/44})} \approx \frac{0/12}{1/39} \\ &\approx 0/09 \end{aligned}$$

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا ضریب همبستگی  $0/09$  نشان از همبستگی زیاد بین  $x$  و  $y$  است و یا خیر. برای آنکه بتوانیم به این سؤال پاسخ دهیم ضریب همبستگی را در برخی حالت‌های زیر حساب می‌کنیم:



x	۱	۲	۳	۴
y	۳	۵	۷	۹

x	۱	۲	۳	۴
y	۲	۶	۶	۱۰



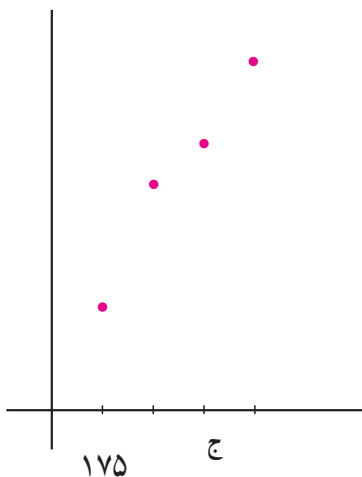
x	۱	۲	۳	۴
y	۲/۵	۵/۵	۶/۵	۸/۵

در شکل «الف» نقاط کاملاً روی خط قرار دارند پس باید بالاترین ضریب همبستگی را داشته باشند.

در شکل «ب» نقاط از خط دورتر شده‌اند پس باید ضریب همبستگی آن از ضریب همبستگی «الف» کمتر باشد.

در شکل «ج» نقاط از خط دور شده‌اند ولی نه به اندازه دوری حالت «ب»، پس باید ضریب همبستگی در این حالت از ضریب همبستگی در حالت «ب» بیشتر ولی از ضریب همبستگی حالت «الف» کمتر باشد.

حال با محاسبه صحت مطالب بالا را آزمایش می‌کنیم.



## ضریب همبستگی در حالت «الف»

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5, \quad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$x \text{ واریانس} = \frac{2/25 + 0/25 + 0/25 + 2/25}{4} = \frac{5}{4} = 1/25$$

$$y \text{ واریانس} = \frac{9 + 1 + 1 + 9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{مجموع حاصلضرب } x \text{ ها و } y \text{ ها} = 3 + 10 + 21 + 36 = 70$$

$$\text{ضریب همبستگی} = \frac{\frac{70}{4} - (2/5)(6)}{\sqrt{1/25} \times \sqrt{5}} = \frac{17/5 - 12}{\sqrt{6/25}} = \frac{2/5}{2/5} = 1$$

## ضریب همبستگی در حالت «ب»

$$\bar{x} = 2/5, \quad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$x \text{ واریانس} = 1/25,$$

$$y \text{ واریانس} = \frac{16 + 0 + 0 + 16}{4} = 8$$

$$\text{مجموع حاصلضرب } x \text{ ها و } y \text{ ها} = 2 + 12 + 18 + 40 = 72$$

$$\text{ضریب همبستگی} = \frac{\frac{72}{4} - (2/5)(6)}{\sqrt{1/25} \times \sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0.9486$$

## ضریب همبستگی در حالت «ج»

$$\bar{x} = 2/5, \quad x \text{ واریانس} = 1/25$$

$$y \text{ میانگین} = \frac{23}{4} = 5.75$$

$$\begin{aligned} y \text{ واریانس} &= \frac{(3/25)^2 + (0/25)^2 + (0/75)^2 + (2/75)^2}{4} \\ &= \frac{18/75}{4} = 4/6875 \end{aligned}$$

$$\frac{\text{مجموع حاصلضرب } x \text{ ها و } y \text{ ها}}{4} = \frac{2/5 + 11 + 19/5 + 34}{4} = \frac{67}{4} = 16.75$$

$$\text{ضریب همبستگی} = \frac{16.75 - (2/5)(5.75)}{\sqrt{1/25} \sqrt{4/6875}} = \frac{2/375}{\sqrt{5/8588}} \approx 0.9812$$

با مقایسه محاسبات در حالت‌های مختلف ملاحظه می‌شود که نتیجه محاسبات با انتظاری که از ضریب همبستگی داریم هماهنگی دارد.

البته ما هنوز به سؤالی که بعد از مثال از خود پرسیده بودیم پاسخ نداده‌ایم. سؤال این بود که ضریب همبستگی به اندازه  $0.9$  چه معنایی دارد. آیا این نشان از همبستگی زیاد است یا همبستگی کم. ما در این قسمت وارد تحلیل اندازه ضریب همبستگی نمی‌شویم فقط اضافه می‌کنیم که در عرف محاسبات آماری  $0.9$  ضریب همبستگی بالایی نیست.

ما تا بحال ضریب همبستگی‌هایی که محاسبه کردیم مثبت بودند، ممکن است سؤال شود آیا ممکن است ضریب همبستگی منفی هم باشد؟ پاسخ به این سؤال مثبت است. داده‌های زیر را در نظر بگیرید.

$x$	۱	۲	۳	۴	۵
$y$	۴	۳	۲	۱	۰

ضریب همبستگی این داده‌ها را محاسبه می‌کنیم.

البته با رسم نمودار پراکنش متوجه می‌شویم که این داده‌ها روی خط  $y = -x + 5$  قرار دارند.

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{4+3+2+1}{5} = 2$$

$$x \text{ واریانس} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

$$y \text{ واریانس} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

$$\frac{\text{مجموع حاصلضرب } x \text{ ها و } y \text{ ها}}{5} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

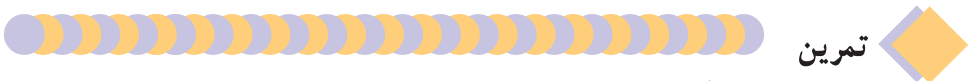
$$\text{ضریب همبستگی} = \frac{4 - (3)(2)}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$



حتماً متوجه شده‌اید در شرایطی که تعیین  $y$  با کمترین خطا انجام شد (مقادیر  $y$  و  $x$  روی یک خط قرار دارند) ضریب همبستگی ۱ یا -۱ به دست آمد، در سایر شرایط ضریب همبستگی بین این دو مقدار است. در این مرحله ما قادر به اثبات ویژگی‌های ضریب همبستگی نیستیم فقط به ذکر آن‌ها می‌پردازیم.

- ضریب همبستگی همواره بین -۱ و +۱ قرار دارد.
- اگر مقادیر  $x$  و  $y$  روی خطی با شیب زاویه مثبت باشد، ضریب همبستگی  $x$  و  $y$  برابر +۱ است.
- اگر مقادیر  $x$  و  $y$  روی خطی با ضریب منفی زاویه قرار گیرد، ضریب همبستگی  $x$  و  $y$  برابر -۱ است.

- اگر ضریب همبستگی مثبت باشد با افزایش  $x$ ، مقادیر  $y$  نیز عموماً افزایش می‌یابد و بالعکس.
- اگر ضریب همبستگی منفی باشد با افزایش  $x$ ، مقادیر  $y$  عموماً کاهش می‌یابد و بالعکس.
- هر چقدر ضریب همبستگی به ۰ نزدیکتر باشد تعیین  $y$  با خطای بیشتری انجام می‌شود.
- هر چقدر ضریب همبستگی به ۱ یا -۱ نزدیکتر باشد تعیین  $y$  با خطای کمتری انجام می‌شود.



### تمرین

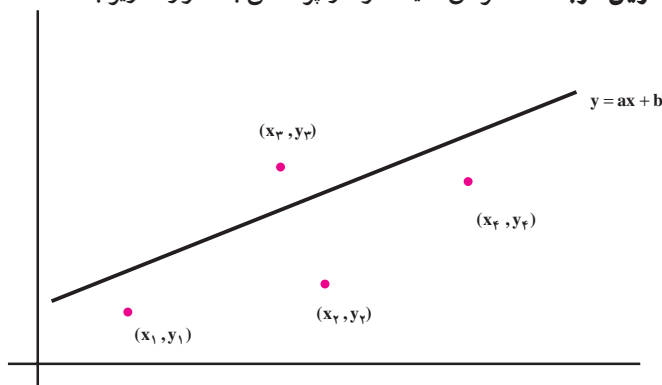
- ۱ - ضریب همبستگی قد و وزن همکلاسی‌های خود را حساب کنید.
- ۲ - ضریب همبستگی بین نمره درس آمار و مدلسازی و نمره یکی دیگر از درس‌ها را در کلاس حساب کنید.
- ۳ - ضریب همبستگی بین معدل دانش‌آموزان و تعداد افراد خانواده آن‌ها را حساب کنید.
- ۴ - گمان می‌کنید ضریب همبستگی بین کدام دو درس در کلاس بیش از همه است؟ درستی گمان خود را چگونه تحقیق می‌کنید؟
- ۵ - در تمرین‌های ۱ تا ۴ به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:
  - آیا می‌توانید علامت ضریب همبستگی را توجیه کنید؟
  - در کدام یک از موارد ضریب همبستگی به ۰ نزدیکتر است؟
  - آیا نتایج حاصل از تحلیل ضریب همبستگی‌ها معقول به نظر می‌رسد؟





## خط رگرسیون

تا بحال صحبت از این بود که هر چقدر نقاط به خط نزدیک تر باشند، ضریب همبستگی از صفر دورتر است و به ۱ یا -۱ نزدیک تر خواهد بود. ما اگر معادله خطی را که از آن صحبت می کنیم داشته باشیم و بدانیم ضریب همبستگی هم در حد قابل قبولی است آن گاه می توانیم با داشتن  $x$  مقدار  $y$  را از روی خط تعیین کنیم و تا «حدودی» مطمئن باشیم که خطای زیادی مرتکب نشده ایم. اما در مسائل عملی ما این خط را نداریم، در این مبحث می خواهیم روش یافتن این خط را بیان کنیم. روش کمترین مربعات: فرض کنید نمودار پراکنش به صورت زیر باشد.



می خواهیم خطی به معادله  $y = ax + b$  از بین این نقاط بگذرانیم به قسمتی که به همه نقاط «نزدیک» باشد. ما ذیلاً توضیح می دهیم که نزدیکی این خط به همه نقاط به چه معنی است؟ ما از این خط می خواهیم برای به دست آوردن  $y$ ها استفاده کنیم، مثلاً به جای  $y_1$  می خواهیم از مقدار  $ax_1 + b$  که از روی خط حاصل شده است استفاده کنیم، در این صورت مقدار خطایی که در این جابجایی مرتکب شده ایم عبارت است از  $(ax + b - y_1)$  و همین طور برای سایر نقاط می توانیم

این خطاها را حساب کنیم. از آنجایی که تعداد این خطاها ممکن است مثبت و یا منفی باشد، با به توان دو رساندن آن‌ها همگی را مثبت خواهیم کرد، در واقع می‌خواهیم خط را چنان تعیین کنیم تا مجموع مجذور خطاها می‌نیم شود، یعنی می‌خواهیم  $a$  و  $b$  را چنان به دست آوریم که عبارت:

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_3 + b - y_3)^2 + \dots$$

کمترین مقدار ممکن را بگیرد. این روش را روش کمترین مربعات می‌گویند و خط حاصل را خط رگرسیون  $y$  نسبت به  $x$  می‌گویند. ما بدون آنکه وارد روش‌های ریاضی محاسبه  $a$  و  $b$  شویم فقط به ذکر دستور محاسبه آن‌ها می‌پردازیم.

محاسبه  $a$  و  $b$  به روش کمترین مربعات

$$a = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \text{ضریب همبستگی} \times \frac{\text{انحراف معیار } y}{\text{انحراف معیار } x}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

حال خط رگرسیون  $y$  نسبت به  $x$  را در مسأله وزن موش‌ها به دست می‌آوریم. قبلاً دیدیم که:

$$\bar{x} = 1/6, \quad \bar{y} = 5/4$$

$$x \text{ انحراف معیار} = \sqrt{0/6}, \quad y \text{ انحراف معیار} = \sqrt{3/44}$$

$$r = 0/11$$

$$a = 0/11 \frac{\sqrt{3/44}}{\sqrt{0/6}} \approx 0/263$$

بنابراین:

$$b = 5/4 - 1/6 = 4/97$$

پس معادله خط رگرسیون عبارت است از:

$$y = 0/263x + 4/97$$

حال اگر وزن اولیه موشی  $1/5$  باشد، پس از اعمال رژیم غذایی وزن آن حدوداً چقدر خواهد بود؟ برای پاسخ به این سؤال از خط رگرسیون  $y$  نسبت به  $x$  استفاده می‌کنیم داریم  $x = 1/5$  و پس

$$y = (0/263)(1/5) + 4/97 = 5/36$$

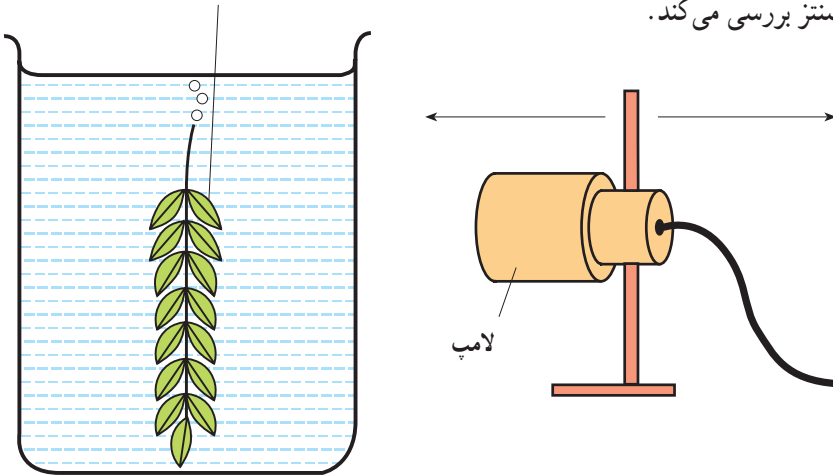
خط رگرسیون ابزاری است برای پیش‌بینی مقدار یک متغیر برحسب

متغیری که به آن وابسته است.

## تمرین

۱- مهرناز آزمایشی را تدارک دیده است که اثر نور را بر سرعت تهیه غذا توسط گیاه از طریق

فتوسنتز بررسی می کند.



مهرناز لامپ را در ۱۰۰ متری گیاه قرار داده و تعداد حباب‌هایی را که توسط گیاه در یک دقیقه تولید شد، شمرد. سپس لامپ را نزدیک‌تر کرده و تعداد حباب‌های ایجاد شده توسط گیاه در دقیقه را شمرد و جدول زیر را تهیه نمود.

فاصله لامپ از گیاه بر حسب cm	تعداد حباب‌ها در دقیقه
۱۰۰	۱۰
۸۰	۲۰
۶۰	۳۲
۴۰	۳۷
۲۰	۳۷

– نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.

– بدون محاسبه و به‌طور تقریبی، خط رگرسیون را رسم کنید.

– اگر لامپ را به ۱۰ سانتی‌متری گیاه منتقل کنیم، تعداد حباب‌ها در دقیقه را حدس بزنید.

– با استفاده از نتیجه حاصل شده جمله زیر را کامل کنید:

همان‌طور که فاصله لامپ .....، سرعت فتوسنتز .....

۲- نمودار پراکنش نتایج امتحانات درس ریاضی و درس فیزیک ۲۰ دانش‌آموز که به شرح زیر آمده است را رسم کنید.

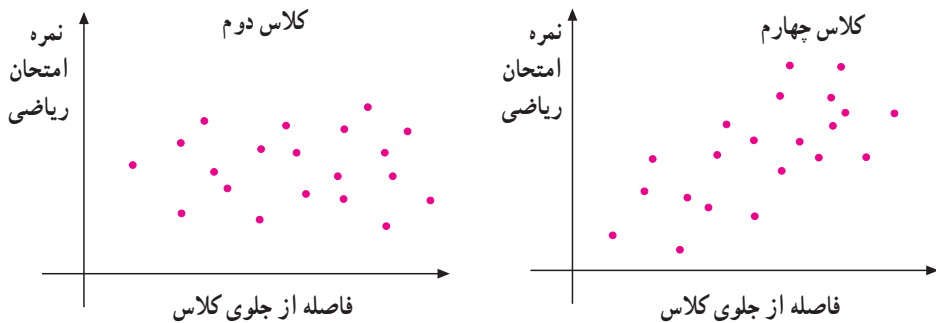
دانش‌آموز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
نمره ریاضیات	۱۸	۸	۱۲	۱۸	۱۶	۶	۱۰	۶	۱۶	۱۰	۱۲
نمره فیزیک	۱۶	۱۰	۸	۱۸	۱۴	۱۰	۱۰	۶	۱۰	۱۴	۱۰

دانش‌آموز	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
نمره ریاضیات	۱۲	۱۰	۱۶	۱۸	۱۲	۶	۱۴	۱۴	۱۲
نمره فیزیک	۱۶	۱۲	۱۶	۱۲	۱۲	۸	۱۲	۱۴	۱۶

- معادله خط رگرسیون را به دست آورید.

- آیا ارتباطی بین نتایج دو تست وجود دارد؟

۳- برخی از دانش‌آموزان تصور می‌کنند هرکس که در ردیف‌های جلوی کلاس می‌نشیند، نمرات بهتری در درس ریاضی کسب می‌کند. یکی از معلمین تصمیم گرفت این موضوع را در دو کلاس خود مورد بررسی قرار دهد. نمودارهای زیر نتیجه این بررسی است.



درستی نظر دانش‌آموزان را در دو کلاس مورد بررسی قرار دهید. دو نمودار فوق را تفسیر کنید.

۴- آشپزی زمان لازم برای پختن گوشت غذا به وزن‌های مختلف را در جدول صفحه بعد ثبت نموده است.

- روی محور افقی با در نظر گرفتن یک سانتی متر نشان گر یک کیلوگرم و روی محور عمودی با در نظر گرفتن هر سانتی متر نشان گر ۳۰ دقیقه، نمودار پراکنش را برای نشان دادن ارتباط بین وزن گوشت و زمان لازم برای پختن آن رسم کنید.
- خط رگرسیون را رسم کنید.
- با استفاده از خط رگرسیون زمان لازم را برای پختن ۳ کیلوگوشت تخمین بزنید.

وزن گوشت (kg)	زمان بر حسب دقیقه
۲	۱۳۰
۳/۵	۲۰۰
۵	۲۱۵
۵/۵	۲۸۰
۶/۵	۲۷۰

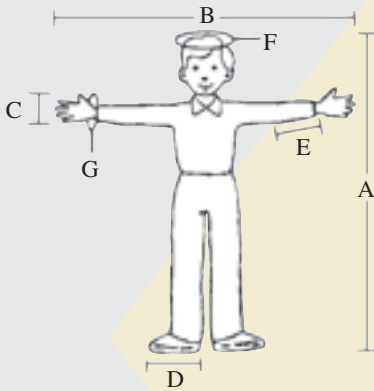
۵- خانم خانه‌داری از فرزندش که درس آمار خوانده بود خواست تا روی اندازه سیب‌زمینی‌های داخل کیسه‌های ۲ کیلویی بررسی انجام دهد. او هر یک از سیب‌زمینی‌ها را وزن کرده و جدول زیر را تهیه نمود:

تعداد سیب‌زمینی‌های موجود در کیسه	۲۰	۱۶	۱۸	۱۴	۱۴	۱۵	۱۳	۱۰
میانگین وزن سیب‌زمینی‌ها بر حسب گرم	۷۲	۱۰۵	۱۱۰	۱۲۵	۱۳۶	۱۴۲	۱۷۴	۱۹۲

- نمودار پراکنش داده‌ها را رسم کنید (۱ سانتی متر روی محور xها نشان‌دهنده یک سیب‌زمینی و ۱ سانتی متر روی محور yها نشان‌دهنده ۲۰ گرم)
- خط رگرسیون را رسم کنید.
- ارتباط بین تعداد سیب‌زمینی‌های موجود در یک بسته را با میانگین وزن بیان کنید.
- با استفاده از نمودار، میانگین وزن سیب‌زمینی‌ها را در بسته‌ای که ۱۷ سیب‌زمینی وجود دارد، تخمین بزنید.
- در یک بسته ۲ کیلوگرمی اگر میانگین وزن ۱۶۰ گرم باشد، تعداد سیب‌زمینی‌های بسته را (به نزدیک‌ترین عدد صحیح) تخمین بزنید.



در اندازه‌گیری زیر، کدامیک از اندازه‌ها با هم مرتبط هستند.



A : قد

B : فاصله بین دو دست

C : وجب

D : طول پا

E : میج تا آرنج

F : دور سر

G : دور میج دست

— اندازه‌های فوق را برای چند تن از همکلاسی‌هایتان به‌دست آورید.

— با استفاده از اندازه‌های به‌دست آمده معین کنید آیا جفت متغیری وجود دارد که

اندازه‌شان با هم مرتبط باشند.

اگر چنین است، خط رگرسیون را برایشان رسم کنید. گزارشی تهیه کنید و روی نتیجه

نظر بدهید. آیا با آنچه قبل از شروع پروژه حدس زدید هماهنگی دارد یا خیر؟ اگر داده‌ها را از

دو گروه زنان و مردان به‌دست آورید چه اتفاقی می‌افتد؟



## پروژه ۲

می خواهیم بدانیم آیا ارتباطی بین موفقیت محصل در دروس ریاضی و دروس غیر ریاضی وجود دارد؟ برای این منظور یکی از دروس ریاضی و یکی از دروس غیر ریاضی خود را انتخاب کنید و با نمونه مناسبی از کلاس درس وجود نوع ارتباط را تحقیق کنید. ضریب تغییرات در کدام یک از این دروس بیش تر است. در صورت وجود ارتباط خطی معادله خط کم ترین مربعات را به دست آورید.

– نتایج کار خود را با نتایج به دست آمده از تحقیق گروه های دیگر مقایسه کنید. آیا نتایج به دست آمده یکسان است؟

## منم که دیده به دیدار دوست کردم باز ...

### پروژه

آیا بین اوقات فراغت دانش آموزان و عملکرد آن‌ها در مدرسه ارتباطی وجود دارد؟

#### معیارهای ارزشیابی پروژه

هر پروژه با ۶ معیار ارزشیابی می‌شود:

**معیار ۱- تعریف و طراحی پروژه:** در این قسمت پروژه باید کاملاً تعریف شده باشد، طرحی برای اجرا و به پایان رسانیدن پروژه ارائه شده باشد.

۳- امتیاز

به‌طور مثال در پروژه ضمیمه این کار در قسمت خلاصه و مقدمه انجام شده است. پروژه کاملاً تعریف شده و شمای کلی کار ارائه شده است.

**معیار ۲- جمع‌آوری داده‌ها:** در این قسمت روش جمع‌آوری داده‌ها، ارتباط داده‌های جمع‌آوری شده با موضوع پروژه، سازمان‌دهی داده‌های جمع‌آوری شده و کافی بودن داده‌ها از نظر کمی و کیفی مورد نظر است.

۵- امتیاز

**معیار ۳- تجزیه و تحلیل داده‌ها:** در این قسمت تجزیه و تحلیل داده‌ها از دو جنبه محاسبات و ارائه نموداری مورد ارزشیابی قرار می‌گیرد.

استفاده مناسب از نمودارها، دقت در محاسبات عددی و استفاده از تکنیک‌های مختلف

تجزیه و تحلیل داده‌ها مورد نظر می‌باشد.

۶- امتیاز

**معیار ۴- ارزیابی:** در این قسمت نتیجه‌گیری و ارزیابی نتایج حاصل از جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل داده‌ها و نیز نقد پروژه توسط خود دانش‌آموز مورد توجه است.

۶- امتیاز

**معیار ۵- برقراری ارتباط:** چگونگی ارائه پروژه و استفاده صحیح از نمادها مورد بررسی می‌باشد.

۵- امتیاز

**معیار ۶- همکاری و ارائه شفاهی پروژه در کلاس**

۱۵- امتیاز

## خلاصه

اغلب، دانش‌آموزان فکر می‌کنند، به دلیل آن که استراحت کافی ندارند، نمی‌توانند تلاش بیشتری در مطالعه داشته باشند. برخی فکر می‌کنند چرا همکلاسی‌هایشان نمرات بهتری کسب می‌کنند ولی آن‌ها نمی‌توانند نمره خوبی کسب کنند. برخی فکر می‌کنند اگر اوقات فراغت بیشتری داشتند می‌توانستند عمل کرد بهتری داشته باشند. سؤال این است که آیا ارتباطی بین اوقات فراغت دانش‌آموزان و عمل کرد آن‌ها در مدرسه وجود دارد؟ این سؤال از طریق این پروژه مورد بررسی قرار گرفت. نمونه آماری در این پروژه، دانش‌آموزانی هستند که به‌طور تصادفی از میان دانش‌آموزان مدارس بین‌الملل دختران و پسران تهران انتخاب شدند. با استفاده از محاسبات آماری، این پروژه به پایان رسید. نتیجه نشان داد که این ارتباط وجود ندارد.

## فهرست محتوا

مقدمه	نتیجه محاسبات
جمع‌آوری داده‌ها	نتیجه‌گیری نهایی
تجزیه و تحلیل داده‌ها	ملحقات
محاسبات آماری	A: پرسش‌نامه
نمودارها	B: جداول
نتیجه‌گیری	C: محاسبه وقت بیکاری
بررسی مشکلات	منابع و مآخذ

هدف این پروژه، بررسی ارتباط بین اوقات فراغت و عمل کرد دانش‌آموزان در مدرسه می‌باشد. برای یک دانش‌آموز کاملاً عادی است که بشنود: «چرا وقت خودت را تلف می‌کنی؟» «چرا بیش‌تر درس نمی‌خوانی؟» و یا نصیحت‌هایی چون «بیش‌تر درس بخوان».

بیش‌تر دانش‌آموزان دوست ندارند نصیحت‌های خانواده‌هایشان را گوش کنند ولی آیا این دانش‌آموزان به اندازه کافی احساس مسئولیت می‌کنند و از وقت خود استفاده درست و لازم را دارند؟ آیا در برنامه‌ریزی برای اوقات خود معقول عمل می‌کنند؟ چقدر از زمان خود را صرف مطالعه می‌کنند و چقدر از آن را به‌هدر می‌دهند؟ ممکن است یک روز ۲ ساعت هدر شود، روز دیگر ۳ ساعت ... ولی در پایان هفته این ساعات باهم جمع می‌گردد. ساعتی که می‌شد بهره‌ی بیش‌تری از آن‌ها جست و عمل کرد بهتری داشت.

بیش‌تر خانواده‌ها می‌گویند: شما به اندازه کافی درس نمی‌خوانی و اگر بیش‌تر درس بخوانی نمره‌ی بهتری خواهی گرفت. آیا چنین است؟

این پروژه با توزیع پرسش‌نامه بین دانش‌آموزان آغاز گشت. در این رابطه داده‌ها جمع‌آوری شده و مورد ارزیابی و تجزیه و تحلیل قرار گرفتند. در این بررسی از محاسبات آماری، نمودارها و نیز محاسبه احتمالات شرطی استفاده شد.

## جمع‌آوری داده‌ها

به دلیل مشکلات موجود برای جمع‌آوری داده در مدارس، دو مدرسه بین‌الملل تهران به‌عنوان جامعه آماری در نظر گرفته شد و ۴۰ دانش‌آموز به‌طور تصادفی از بین دانش‌آموزان این دو مدرسه به‌عنوان نمونه انتخاب شدند. دانش‌آموزان از کلاس‌های اول دبیرستان تا پیش‌دانشگاهی پسر و دختر، انتخاب شدند.

جمع‌آوری داده‌ها می‌توانست از دو طریق مصاحبه و پرسش‌نامه انجام شود ولی روش پرسش‌نامه به‌نظر مناسب‌تر آمد. در این نظرخواهی، اسامی خواسته نشده بود تا دانش‌آموزان بتوانند با راحتی خیال پاسخ‌های خود را بدهند. از طریق مصاحبه ممکن بود دانش‌آموزان پاسخ‌های درست ندهند و نیز زمان بیش‌تری مورد نیاز بود. در پرسش‌نامه از طول زمان و چگونگی گذراندن اوقات فراغت دانش‌آموزان سؤال شد و این که چه مقدار از این زمان فراغت صرف مطالعه می‌شود و معدل دانش‌آموزان چقدر است؟ یک نسخه از پرسش‌نامه و برخی جداول حاوی اطلاعات ضمیمه این گزارش است.

روند محاسبه اوقات بیکاری نیز در ضمیمه C آمده است. جداول ۱ و ۲ و ۳ و ۴ برخی از داده‌های جمع‌آوری شده را نشان می‌دهند.



جدول ۱: زمان صرف شده برای فعالیت‌های  
غیر از درس خواندن در هفته

دانش آموزان شماره	زمان برحسب ساعت در هفته
۱	۹
۲	۷
۳	۱۳
۴	۶
۵	۱۸
۶	۲/۵
۷	۴
۸	۴/۵
۹	۴۹
۱۰	۳۲
۱۱	۱۷
۱۲	۱۷
۱۳	۳
۱۴	۵
۱۵	۶
۱۶	۷۶
۱۷	۹
۱۸	۲
۱۹	۷
۲۰	۲۲
۲۱	۳۰
۲۲	۳۵
۲۳	۳۰
۲۴	۲۴
۲۵	۴۵
۲۶	۳۰
۲۷	۷۱
۲۸	۲۰
۲۹	۸
۳۰	۱
۳۱	۶
۳۲	۷

جدول ۲: زمان صرف شده برای مطالعه بعد  
از مدرسه در اوقات فراغت (در هفته)

دانش آموزان شماره	زمان برحسب ساعت در هفته
۱	۰
۲	۵
۳	۲۸
۴	۶
۵	۶
۶	۵-۶
۷	۳
۸	۳
۹	۴
۱۰	۱۴
۱۱	۱۴-۱۶
۱۲	۴۵
۱۳	۵
۱۴	۸
۱۵	۱۲
۱۶	۱۰
۱۷	۳
۱۸	۷-۸
۱۹	۲۸
۲۰	۱۲-۱۵
۲۱	۲
۲۲	۲
۲۳	۲
۲۴	۲
۲۵	۲
۲۶	۱۴
۲۷	۴
۲۸	۴
۲۹	۸
۳۰	۱۰
۳۱	۱۰
۳۲	۱۲

جدول ۳: معدل آخرین سال دانش آموزان

دانش آموزان شماره	معدل بر حسب درصد
۱	۹۵
۲	۹۶/۷۵
۳	۹۷
۴	۸۸
۵	۸۶
۶	۸۳
۷	۹۴/۵
۸	۸۸/۶۳
۹	۷۰
۱۰	۸۶
۱۱	۸۹/۸
۱۲	۷۸/۵
۱۳	۷۱
۱۴	۸۶
۱۵	۷۸/۵
۱۶	۸۵
۱۷	۸۰
۱۸	۸۳
۱۹	۸۵
۲۰	۹۳
۲۱	۹۳
۲۲	۹۳
۲۳	۵۹/۵
۲۴	۶۵/۴
۲۵	۷۳/۵
۲۶	۷۸/۵
۲۷	۷۳/۵
۲۸	۷۳/۶
۲۹	۷۸
۳۰	۸۰
۳۱	۷۸
۳۲	۷۰

جدول ۴: زمان فراغت دانش آموزان

دانش آموزان شماره	ساعات فراغت
۱	۵۰/۷۵
۲	۳۵
۳	۴۲
۴	۳۹
۵	۵۰
۶	۳۳/۸۳
۷	۲۱
۸	۱۵
۹	۲۸
۱۰	۳۹/۵
۱۱	۳۹/۵
۱۲	۵۳/۵
۱۳	۶۳/۱۶
۱۴	۵۶/۵
۱۵	۵۹/۵
۱۶	۵۶/۸۳
۱۷	۳۴
۱۸	۴۶
۱۹	۳۷/۵
۲۰	۴۳
۲۱	۳۵/۵۸
۲۲	۳۸/۲۵
۲۳	۲۸/۵۸
۲۴	۵۲
۲۵	۲۵/۵
۲۶	۲۲/۵
۲۷	۳۸
۲۸	۲۸/۱۶
۲۹	۳۲/۵
۳۰	۳۱/۷۵
۳۱	۳۲/۵
۳۲	۲۵/۵

## تجزیه و تحلیل داده‌ها

این قسمت از دو بخش محاسبات و نمودارها تشکیل شده است: ابتدا میانگین و انحراف معیار برای زمان فراغت و معدل هریک از دانش‌آموزان حساب شد. نمودارهای میله‌ای نیز رسم شدند.

صفحات ۱۹۲، ۱۹۳ و ۱۹۴.

## ارزیابی مشکلات

در انجام این پروژه متأسفانه با مشکلاتی روبرو بودم که عبارتند از:

- به دلیل مشکل عدم آشنایی به زبان فارسی این بررسی محدود به مدارس بین‌الملل تهران شد.
- در این بررسی ۸ پاسخ‌نامه به دلیل مخدوش بودن پاسخ‌ها کنار گذاشته شد. بنابراین نمونه به ۳۲ کاهش یافت.
- محدودیت زمان

## نتایج

قبل از آن که هرگونه نتیجه‌گیری شود، نتایج مشاهدات به قرار زیر ارائه می‌شوند.

- محاسبات آماری روی معدل نشان دادند که ۷ نفر از ۳۲ نفر دانش‌آموزان عمل کرد بسیار عالی داشتند. ۱۱ نفر عمل کرد خوب و ۹ نفر عمل کرد قابل قبول، ۴ نفر ضعیف و یک نفر خیلی ضعیف بودند.
- محاسبات روی اوقات فراغت نشان دادند که ۶ نفر وقت آزاد بسیار داشتند و ۷ نفر بیش‌تر از کافی، ۱۴ نفر وقت آزاد کافی داشتند. ۴ نفر وقت کافی نداشتند و یک نفر اصلاً وقت آزاد نداشت.
- اطلاعات اضافی عبارتند از ۲۴ نفر از ۳۲ نفر از اوقات بیکاری خود خسته می‌شوند.
- ۹ نفر از ۳۱ نفر حداقل یک‌بار در طول تحصیل‌شان از یک درس نمره قبولی نیاورده‌اند.
- ۲۶ نفر از ۳۰ نفر از عمل کرد خود راضی نیستند و می‌خواهند آن را بهبود دهند.
- ۲۴ نفر از ۳۲ نفر عقیده داشتند که اگر وقت بیش‌تری صرف مطالعه کنند نتیجه بهتری خواهند داشت.

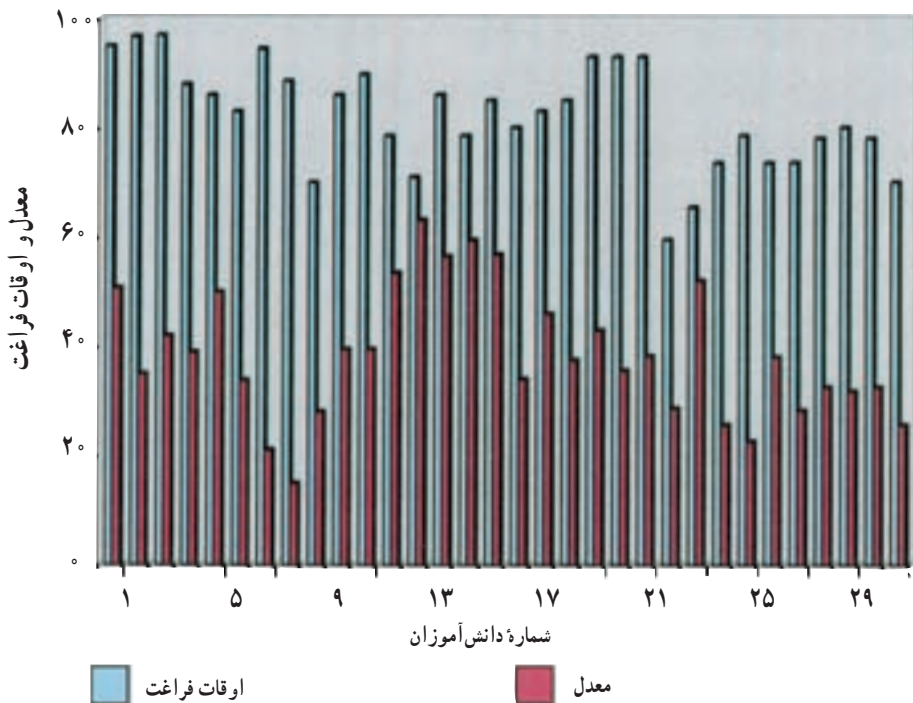
جدول ۱- جدول فراوانی اوقات بیکاری

زمان فراغت	فراوانی	فراوانی × زمان فراغت	انحراف از میانگین	مجذور انحراف از میانگین	فراوانی × مجذور انحراف از میانگین
۱۵	۱	۱۵	-۲۴	۵۷۶	۵۷۶
۲۱	۱	۲۱	-۱۵	۲۲۵	۲۲۵
۲۲/۵	۱	۲۲/۵	-۱۶/۵	۲۷۲/۲۵	۲۷۲/۲۵
۲۵/۵	۲	۵۱	-۱۳/۵	۱۸۲/۲۵	۳۶۴/۵
۲۸	۱	۲۸	-۱۱	۱۲۱	۱۲۱
۲۸/۱۶	۱	۲۸/۱۶	-۱۰/۸۴	۱۱۷/۵۰۵۶	۱۱۷/۵۰۵۶
۲۸/۵۸	۱	۲۸/۵۸	-۱۰/۴۲	۱۰۸/۵۷۶۴	۱۰۸/۵۷۶۴
۳۱/۷۵	۱	۳۱/۷۵	-۷/۲۵	۵۲/۵۶۲۵	۵۲/۵۶۲۵
۳۲/۵	۲	۶۵	-۶/۵	۴۲/۲۵	۸۴/۵
۳۳/۸۳	۱	۳۳/۸۳	-۵/۱۷	۲۶/۷۲۸۹	۲۶/۷۲۸۹
۳۴	۱	۳۴	-۵	۲۵	۲۵
۳۵	۱	۳۵	-۴	۱۶	۱۶
۳۵/۵۸	۱	۳۵/۵۸	-۳/۴۲	۱۱/۶۹۶۴	۱۱/۶۹۶۴
۳۷/۵	۱	۳۷/۵	-۱/۵	۲/۲۵	۲/۲۵
۳۸	۱	۳۸	-۱	۱	۱
۳۸/۲۵	۱	۳۸/۲۵	-۰/۷۵	۰/۵۶۲۵	۰/۵۶۲۵
۳۹	۱	۳۹	۰	۰	۰
۳۹/۵	۲	۷۹	۰/۵	۰/۲۵	۰/۵
۴۲	۱	۴۲	۳	۹	۹
۴۳	۱	۴۳	۴	۱۶	۱۶
۴۶	۱	۴۶	۷	۴۹	۴۹
۵۰	۱	۵۰	۱۱	۱۲۱	۱۲۱
۵۰/۷۵	۱	۵۷/۷۵	۱۱/۷۵	۱۳۸/۰۶۲۵	۱۳۸/۰۶۲۵
۵۲	۱	۵۲	۱۳	۱۶۹	۱۶۹
۵۳/۵	۱	۵۳/۵	۱۴/۵	۲۱۰/۲۵	۲۱۰/۲۵
۵۶/۵	۱	۵۶/۵	۱۷/۵	۳۰۶/۲۵	۳۰۶/۲۵
۵۶/۸۳	۱	۵۶/۸۳	۱۷/۸۳	۳۱۷/۹۰۸۹	۳۱۷/۹۰۸۹
۵۹/۵	۱	۵۹/۵	۲۰/۵	۴۲۰/۲۵	۴۲۰/۲۵
۶۳/۱۶	۱	۶۳/۱۶	۲۴/۱۶	۵۸۳/۷۰۵۶	۵۸۳/۷۰۵۶
	۳۲	۱۲۳۴/۳۹			۲۳۴۶/۰۵۹۳

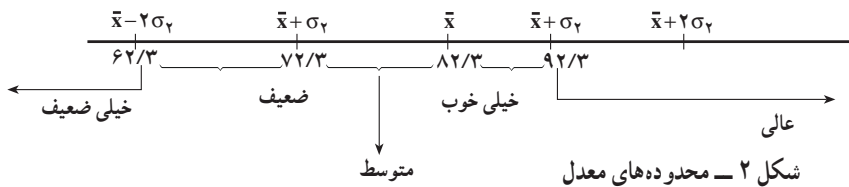
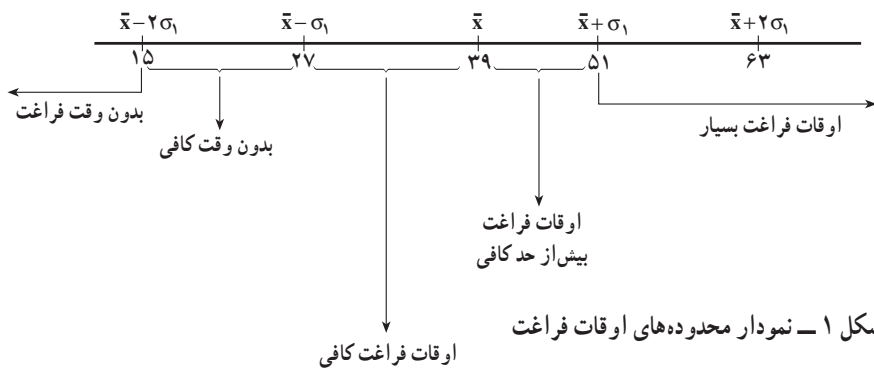
جدول ۲- جدول فراوانی برای معدل

معدل	فراوانی	معدل × فراوانی	انحراف از میانگین	مجذور انحراف از میانگین	مجذور انحراف از میانگین × فراوانی
۶۰	۱	۶۰	-۲۳	۵۲۹	۵۲۹
۶۵	۱	۶۵	-۱۸	۳۲۴	۳۲۴
۷۰	۲	۱۴۰	-۱۳	۱۶۹	۳۳۸
۷۱	۱	۷۱	-۱۲	۱۴۴	۱۴۴
۷۴	۳	۲۲۲	-۹	۸۱	۲۴۳
۷۶	۱	۷۶	-۷	۴۹	۴۹
۷۸	۲	۱۵۶	-۵	۲۵	۵۰
۷۹	۳	۲۳۷	-۴	۱۶	۴۸
۸۰	۲	۱۶۰	-۳	۹	۱۸
۸۳	۲	۱۶۶	۰	۰	۰
۸۵	۲	۱۷۰	۲	۴	۸
۸۶	۳	۲۵۸	۳	۹	۲۷
۸۸	۱	۸۸	۵	۲۵	۲۵
۸۹	۱	۸۹	۶	۳۶	۳۶
۹۰	۱	۹۰	۷	۴۹	۴۹
۹۳	۳	۲۷۹	۱۰	۱۰۰	۳۰۰
۹۵	۳	۲۸۵	۱۲	۱۴۴	۴۳۲
۹۷	۲	۱۹۴	۱۴	۱۹۶	۳۹۲
	۳۴	۲۸۱۶			۳۰۱۲





ارتباط بین معدل و اوقات فراغت



## نتیجه‌گیری

با توجه به نمودارها و محاسبات انجام شده نتیجه می‌شود که ارتباط محسوسی بین مقدار اوقات فراغت و عمل کرد در مدرسه وجود ندارد. معدل دانش‌آموز ارتباطی به میزان اوقات فراغت ندارد. دانش‌آموزان بسیاری وجود دارند که وقت فراغت بسیار دارند ولی عمل کرد بالایی ندارند.

### ضمیمه A: «پرسش‌نامه»

این پرسش‌نامه شامل سؤالاتی در زمینه چگونگی گذراندن اوقات فراغت شما، زمانی که صرف فعالیت‌های غیر مدرسه‌ای و زمانی که صرف مطالعه می‌شود می‌باشد. هدف این بررسی، پیدا کردن ارتباط بین اوقات فراغت دانش‌آموزان و عمل کرد آن‌ها در مدرسه است. این پرسش‌نامه ناشناس است. بنابراین، لطفاً صادقانه پاسخ دهید.

با تشکر از همکاری شما

۱- ساعت شروع مدرسه و پایان مدرسه را بیان کنید (لازم به ذکر است در این دو مدرسه ساعات درسی به دلیل انتخاب واحدها متغیر است)

شنبه یکشنبه دوشنبه سه‌شنبه چهارشنبه پنجشنبه

ساعت شروع مدرسه

ساعت پایان مدرسه

۲- چقدر زمان لازم است تا از مدرسه به خانه برگردید؟

۳- معمولاً ساعت چند می‌خوابید؟

۴- چند ساعت بعد از مدرسه در هفته کار می‌کنید؟

۵- چند ساعت در هفته به تماشای تلویزیون یا انجام دیگر تفریحات می‌پردازید؟

۶- معدل شما در سال گذشته چند است؟

۷- آیا از درسی مردود شده‌اید؟

در این ضمیمه اطلاعات مربوط به ۲۰ دانش آموز آورده شده است.

جدول ۱: ساعات شروع و پایان مدرسه در طول روزهای هفته

ضمیمه B:

شماره دانش آموزان	شنبه		یکشنبه		دوشنبه		سه شنبه		چهارشنبه		پنجشنبه	
	شروع	پایان	شروع	پایان	شروع	پایان	شروع	پایان	شروع	پایان	شروع	پایان
۱	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۱۵ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	.....	.....
۲	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ
۳	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	.....	.....
۴	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	.....	.....
۵	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۱۲:۳۰ ب.ظ
۶	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۱۱:۱۰ ب.ظ
۷	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ
۸	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ
۹	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	.....	.....
۱۰	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	.....	.....
۱۱	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	.....	.....
۱۲	۸:۰۰ ظ.ق	۱۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۱۱:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۱۲:۳۰ ب.ظ	۹:۳۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۱۲:۳۰ ب.ظ
۱۳	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۱۱:۱۰ ظ.ق	۱۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۱۲:۳۰ ب.ظ
۱۴	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۱۲:۳۰ ب.ظ
۱۵	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۹:۳۰ ظ.ق	۴:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۱۲:۳۰ ب.ظ
۱۶	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۳۰ ب.ظ	.....	.....
۱۷	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۳۰ ب.ظ	.....	.....
۱۸	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۳۰ ب.ظ	.....	.....
۱۹	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ
۲۰	۸:۰۰ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۹:۱۵ ظ.ق	۱۲:۳۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۲:۳۰ ب.ظ	۹:۱۵ ظ.ق	۴:۰۰ ب.ظ	۸:۰۰ ظ.ق	۱۱:۰۰ ب.ظ

\* - ق. ظ یعنی قبل از ظهر و ب. ظ یعنی بعد از ظهر

جدول ۳: زمان لازم برای رسیدن از  
خانه به مدرسه

جدول ۴: ساعت خواب دانش آموزان

شماره دانش آموزان	زمان (ساعت)
۱	۰/۳۰
۲	۰/۳۰
۳	۰/۳۰
۴	۳/۳۰
۵	۰/۳۰
۶	۰/۴۵
۷	۰/۳۰
۸	۱/۳۰
۹	۰/۳۰
۱۰	۱/۰
۱۱	۱/۰
۱۲	۰/۱۵
۱۳	۰/۳۰
۱۴	۰/۳۰
۱۵	۰/۳۰-۱/۰
۱۶	۰/۲۰
۱۷	۰/۲۰-۰/۳۰
۱۸	۰/۱۵-۰/۳۰
۱۹	۰/۰۵
۲۰	۰/۳۵
۲۱	۰/۳۰
۲۲	۰/۴۰
۲۳	۰/۳۰
۲۴	۰/۳۰
۲۵	۰/۳۰
۲۶	۱/۳۰
۲۷	۰/۴۵
۲۸	۱/۳۰
۲۹	۱/۰
۳۰	۰/۴۵
۳۱	۱/۰
۳۲	۱/۰

شماره دانش آموزان	زمان (ساعت)
۱	قبل از ظهر ۱۲،۳۰
۲	بعد از ظهر ۱۱،۰۰
۳	بعد از ظهر ۱۱،۰۰
۴	قبل از ظهر ۱۲،۰۰
۵	قبل از ظهر ۱،۳۰
۶	بعد از ظهر ۱۱،۰۰
۷	بعد از ظهر ۹،۰۰
۸	بعد از ظهر ۹،۰۰
۹	بعد از ظهر ۱۰،۰۰
۱۰	بعد از ظهر ۱۱،۰۰
۱۱	بعد از ظهر ۱۱،۰۰
۱۲	قبل از ظهر ۱،۳۰
۱۳	قبل از ظهر ۲،۰۰
۱۴	قبل از ظهر ۲،۰۰
۱۵	قبل از ظهر ۳،۰۰
۱۶	قبل از ظهر ۱،۰۰
۱۷	بعد از ظهر ۱۰،۰۰
۱۸	قبل از ظهر ۱۲،۰۰
۱۹	بعد از ظهر ۱۱،۰۰
۲۰	بعد از ظهر ۱۱،۳۰
۲۱	بعد از ظهر ۱۱،۰۰
۲۲	بعد از ظهر ۱۱،۰۰
۲۳	بعد از ظهر ۱۰،۰۰
۲۴	بعد از ظهر ۱۱،۰۰
۲۵	بعد از ظهر ۹،۳۰
۲۶	بعد از ظهر ۱۰،۰۰
۲۷	بعد از ظهر ۱۱،۰۰
۲۸	بعد از ظهر ۱۰،۳۰
۲۹	بعد از ظهر ۱۰،۰۰
۳۰	بعد از ظهر ۱۰،۰۰
۳۱	بعد از ظهر ۱۰،۰۰
۳۲	بعد از ظهر ۹،۰۰

## ضمیمه C: محاسبه اوقات فراغت

اوقات فراغت دانش‌آموزان به صورت زیر محاسبه شده است. طول روز ۱۲ ساعت در نظر گرفته شده است. ساعت در هفته  $7 \times 12 = 84$

محاسبه اوقات فراغت دانش‌آموز شماره ۱ بنابر جدول (ضمیمه B): تعداد ساعاتی را که دانش‌آموزان در مدرسه صرف می‌کنند می‌توان پیدا کرد: به طور مثال:

$$6/5 + 7/25 + 7/5 + 6/5 + 6/5 = 34/25 \text{ ساعت در هفته}$$

با استفاده از جدول ۲ (ضمیمه B)، زمان لازم برای رسیدن به منزل در طول هفته عبارت است از:

روز ساعت

$$0/5 \times 5 = 2/5 \text{ ساعت در هفته}$$

دانش‌آموز شماره ۱ معمولاً ساعت نیم بعد از نیمه شب می‌خوابد پس طول روز برای او ۵ ساعت در روز بیش‌تر از فرض ۱۲ ساعت است پس  $0/5 \times 7 = 3/5$  باید به زمان فراغت اضافه شود:

$$[ (84 - (34/5 + 2/5)) ] + 3/5 = 59/75 \text{ ساعت}$$

وقت بیکاری دانش‌آموز شماره ۱

## منابع و مراجع

۱- سالنامه آمار کشور، سال‌های ۱۳۷۱ و ۱۳۷۳ و ۱۳۷۶، مرکز آمار ایران

- 2- DUNCAN AND CHRISTINE GRAHAM, MAINSTREAM MATHEMATICS FOR GCSE, MACMILLAN PRESS ltd.
- 3- GEOFF BUCKWELL. GCSE CORE MATHEMATICS, MCMILLAN WORKOUT SERIES.
- 4- ALLAN G. BLUMAN, ELEMENTARY STATISTICS, Wm .C. BROWN PUBLISHER.
- 5- PERM S. MANN, INTRODUCTORY STATISTICS, JOHN WILEY & SONS.
- 6- BRASE & BRASE, UNDERSTANDABLE STATISTICS.
- 7- GEOFF BUCKWELL, MASTERING MATHEMATICS, MCMILLAN MASTER SERIES.
- 8- HAROLD R. JACOBS, MATHEMATICS A HUMAN ENDEAVOR, FREEMAN.
- 9- JAN DE LANGE JZN, HELEEN VERHANGE, DATA VISUALIZATION.
- 10- EWART SMITH, MATHS FOR INTERMEDIATE GNVQ.
- 11- B.L. AGARWAL, BASIC STATISTICS.
- 12- JAMES M. LANDWEHR & ANN E. WATKINS EXPLORING DATA.
- 13- ROBERT JOHNSON, ELEMENTARY STATISTICS, SIXTH EDITION DUXBURY PRESS.

- 14- JOHN E. FREUND, GARY A. SIMON, STATISTICS A FIRST COURSE FIFTH EDITION. PRENTICE - HALL INTERNATIONAL EDITIOW.
- 15- THE SCHOOL MATEMATICS PROJECT. STATISTICS, MATHEMATICS FOR A AND AS LEVEL, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- 16- MATHEMATICS PLUS. HARCOURT BRACE & COMPANY.
- 17- HOUGHTON MIFFLIN, UNIFIED MATHEMATICS, HOUGHTON MIFFLIN COMPANY / BOSTON.
- 18- SUE BRIGGS, HIGHER GCSE, OXFORD MATHEMATICS, OXFORD UNIVERSITY PRESS.

تعدادی از تصاویر از مجموعه مجلات NATIONAL GEOGRAPHIC انتخاب شده‌اند.







